Degré, valuation d'un polynome

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

permettent alors de calculer plus aisément que ne l'indiquaient les définitions, la somme et le produit de polynômes.

Ainsi:

$$= a_0 b_0 e_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) e_1 + (a_1 b_1 + a_2 b_0) e_2 \, .$$
$$AB = (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2) (b_0 e_0 + b_1 e_1)$$

On retrouve les règles de calcul élémentaires.

Enfin la règle de calcul $e_p e_q = e_{p+q}$ pour le produit de deux polynômes de la base permet de montrer facilement que si A et B sont deux polynômes tels que AB $= 0$, l'un au moins des polynômes est nul. Supposons en effet que ni A, ni B ne sont nuls; alors soit parmi les termes $a_k e_k$ de A celui d'indice le plus élevé $a_p e_p$ tel que $a_p \neq 0$ et de même $b_q e_q$ dans B. Dans AB figure $a_p b_q e_{p+q}$ et comme $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, AB $\neq 0$.

Ainsi AB $= 0$ entraîne A $= 0$ ou B $= 0$. Il en résulte que si A $\neq 0$ et si AB $= 0$, alors B $= 0$. Il en résulte encore que si A $\neq 0$ et si AB $=$ AC, on a A (B — C) $= 0$, donc B — C $= 0$, donc B $=$ C. En d'autres termes cela signifie que *tout polynôme différent de* 0 *est régulier pour la multiplication.*

Degré, valuation d'un polynome

Définition. — Soit $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ un polynôme. Nous appellerons *degré de A* et nous le désignerons par *degA*, le plus grand entier $n \geqslant 0$ tel que $a_n \neq 0$:

$$n = \deg A$$

Cela signifie que si $k \leqslant n$, il y a au moins un $a_k \neq 0$ et que $a_k = 0$ quel que soit $k > n$.

deg A $= 0$ signifie que A est une constante, mais ne signifie pas nécessairement que A $= 0$.

Le degré de 0 n'est pas défini.

Le degré et les deux lois algébriques.

D'après la définition du degré, on a les propriétés suivantes:

1° Si $\deg A > \deg B$, alors $\deg (A + B) = \deg A$
Si $\deg A = \deg B = n$ et si $a_n + b_n \neq 0$, alors $\deg (A + B) = \deg A = \deg B$.

Dans le cas général:

deg (A + B) $\leqslant$ max (deg A, deg B), c'est-à-dire est inférieur ou égal au plus grand des entiers deg A, deg B.

2° Si AB $\neq 0$, deg AB $=$ deg A $+$ deg B.

Définition. — Soit $A = (a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ un polynôme. Nous appellerons *valuation de A* et nous la désignerons par $v(A)$, le plus petit entier $m \geqslant 0$ tel que $a_m \neq 0$.

Cela entraîne que si $m \geqslant 1$ on a $a_k = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$. La valuation de 0 n'est pas définie.

On remarquera que quel que soit A: $v(A) \leqslant \deg A$.

La valuation et les deux lois algébriques.

D'après la définition, on a les propriétés suivantes:

1° Si $v(A) > v(B)$, alors $v(A + B) = v(B)$.
Si $v(A) = v(B) = m$ *et* si $a_m + b_m \neq 0$,
alors $v(A + B) = v(A) = v(B)$.

Dans le cas général: $v(A + B) \geqslant \min(v(A), v(B))$, c'est-à-dire supérieure ou égale au plus petit des entiers $v(A)$, $v(B)$.

2° Si AB $\neq 0$, alors $v(AB) = v(A) + v(B)$.

Remarque. — Une condition *nécessaire* (seulement) pour que A $=$ B est que deg A $=$ deg B *et* $v(A) = v(B)$. La négation de cette proposition signifie que si l'une des conditions deg A $=$ deg B ou $v(A) = v(B)$ n'est pas réalisée, alors A $\neq$ B.

Le problème de la division des polynomes

L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes est un anneau commutatif unitaire, mais n'est pas un corps, c'est-à-dire que la division n'est pas en général possible, c'est-à-dire encore, que deux polynômes A et B étant donnés il n'existe pas en général de polynômes X tel que A $=$ BX.

Définition. — On dit que A est divisible par B $\neq 0$, s'il existe Q tel que A $=$ BQ. On dit aussi que A est multiple de B ou que B divise A ou est diviseur de A. Alors A est aussi multiple de Q.

Si Q existe, il est unique car s'il existait encore Q' tel que $A = BQ'$ on aurait $BQ = BQ'$ et comme B $\neq 0$, $Q = Q'$.