

Degré, valuation d'un polynome

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

permettent alors de calculer plus aisément que ne l'indiquaient les définitions, la somme et le produit de polynômes.

Ainsi :

$$= a_0 b_0 e_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) e_1 + (a_1 b_1 + a_2 b_0) e_2 .$$

$$AB = (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2) (b_0 e_0 + b_1 e_1)$$

On retrouve les règles de calcul élémentaires.

Enfin la règle de calcul $e_p e_q = e_{p+q}$ pour le produit de deux polynômes de la base permet de montrer facilement que si A et B sont deux polynômes tels que $AB = 0$, l'un au moins des polynômes est nul. Supposons en effet que ni A, ni B ne sont nuls; alors soit parmi les termes $a_k e_k$ de A celui d'indice le plus élevé $a_p e_p$ tel que $a_p \neq 0$ et de même $b_q e_q$ dans B. Dans AB figure $a_p b_q e_{p+q}$ et comme $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $AB \neq 0$.

Ainsi $AB = 0$ entraîne $A = 0$ ou $B = 0$. Il en résulte que si $A \neq 0$ et si $AB = 0$, alors $B = 0$. Il en résulte encore que si $A \neq 0$ et si $AB = AC$, on a $A(B - C) = 0$, donc $B - C = 0$, donc $B = C$. En d'autres termes cela signifie que *tout polynôme différent de 0 est régulier pour la multiplication.*

DEGRÉ, VALUATION D'UN POLYNÔME

Définition. — Soit $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ un polynôme. Nous appellerons *degré de A* et nous le désignerons par $\text{deg} A$, le plus grand entier $n \geq 0$ tel que $a_n \neq 0$:

$$n = \text{deg} A$$

Cela signifie que si $k \leq n$, il y a au moins un $a_k \neq 0$ et que $a_k = 0$ quel que soit $k > n$.

$\text{deg} A = 0$ signifie que A est une constante, mais ne signifie pas nécessairement que $A = 0$.

Le degré de 0 n'est pas défini.

Le degré et les deux lois algébriques.

D'après la définition du degré, on a les propriétés suivantes:

1° Si $\text{deg} A > \text{deg} B$, alors $\text{deg} (A + B) = \text{deg} A$

Si $\text{deg} A = \text{deg} B = n$ et si $a_n + b_n \neq 0$, alors
 $\text{deg} (A + B) = \text{deg} A = \text{deg} B$.

Dans le cas général :

$\deg(A + B) \leq \max(\deg A, \deg B)$, c'est-à-dire est inférieur ou égal au plus grand des entiers $\deg A$, $\deg B$.

2° Si $AB \neq 0$, $\deg AB = \deg A + \deg B$.

Définition. — Soit $A = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ un polynôme. Nous appellerons *valuation de A* et nous la désignerons par $\nu(A)$, le plus petit entier $m \geq 0$ tel que $a_m \neq 0$.

Cela entraîne que si $m \geq 1$ on a $a_k = 0$ pour $0 \leq k \leq m-1$. La valuation de 0 n'est pas définie.

On remarquera que quel que soit A : $\nu(A) \leq \deg A$.

La valuation et les deux lois algébriques.

D'après la définition, on a les propriétés suivantes :

1° Si $\nu(A) > \nu(B)$, alors $\nu(A + B) = \nu(B)$.

Si $\nu(A) = \nu(B) = m$ et si $a_m + b_m \neq 0$,

alors $\nu(A + B) = \nu(A) = \nu(B)$.

Dans le cas général : $\nu(A + B) \geq \min(\nu(A), \nu(B))$, c'est-à-dire supérieure ou égale au plus petit des entiers $\nu(A)$, $\nu(B)$.

2° Si $AB \neq 0$, alors $\nu(AB) = \nu(A) + \nu(B)$.

Remarque. — Une condition *nécessaire* (seulement) pour que $A = B$ est que $\deg A = \deg B$ et $\nu(A) = \nu(B)$. La négation de cette proposition signifie que si l'une des conditions $\deg A = \deg B$ ou $\nu(A) = \nu(B)$ n'est pas réalisée, alors $A \neq B$.

LE PROBLÈME DE LA DIVISION DES POLYNOMES

L'ensemble \mathcal{P} des polynômes est un anneau commutatif unitaire, mais n'est pas un corps, c'est-à-dire que la division n'est pas en général possible, c'est-à-dire encore, que deux polynômes A et B étant donnés il n'existe pas en général de polynômes X tel que $A = BX$.

Définition. — On dit que A est divisible par $B \neq 0$, s'il existe Q tel que $A = BQ$. On dit aussi que A est multiple de B ou que B divise A ou est diviseur de A. Alors A est aussi multiple de Q.

Si Q existe, il est unique car s'il existait encore Q' tel que $A = BQ'$ on aurait $BQ = BQ'$ et comme $B \neq 0$, $Q = Q'$.