

Base de l'espace vectoriel des polynomes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

BASE DE L'ESPACE VECTORIEL DES POLYNÔMES

Les propriétés de l'espace vectoriel des polynômes permettent d'écrire tout polynôme A sous la forme :

$$A = a_0 (1, 0, 0, \dots) + a_1 (0, 1, 0, \dots) + \dots + a_n (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

c'est-à-dire, en désignant par e_k le polynôme dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de rang $k + 1$ qui vaut 1,

$$A = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n .$$

L'ensemble des polynômes e_k s'appelle base et l'écriture précédente réalise ce qu'on appelle la *décomposition de A sur la base*. $a_p e_p$ s'appelle terme de degré p .

La définition de l'égalité de deux polynômes entraîne que cette décomposition est *unique*.

Appliquons la définition du produit de deux polynômes à deux polynômes e_p, e_q . On a $e_p = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots)$ où $\alpha_k = 0$ si $k \neq p$ et $\alpha_p = 1$; $e_q = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q, \beta_{q+1}, \dots)$ où $\beta_k = 0$ si $k \neq q$ et $\beta_q = 1$.

Le $(k + 1)^e$ coefficient de $e_p e_q$ est $\alpha_k \beta_0 + \alpha_{k-1} \beta_1 + \dots + \alpha_0 \beta_k$. Ce coefficient ne peut être différent de zéro que s'il contient $\alpha_p \beta_p$. Or le $(k + 1)^e$ coefficient de $e_p e_q$ est une somme de termes tels que la somme des indices de chaque terme $\alpha_{k-m} \beta_m$ est k ; on ne trouvera donc $\alpha_p \beta_p$ que dans le $(p + q + 1)^e$ coefficient ce qui entraîne que seul le $(p + q + 1)^e$ coefficient de $e_p e_q$ n'est pas nul. Ce dernier coefficient est par définition :

$$\alpha_{p+q} \beta_0 + \alpha_{p+q-1} \beta_1 + \dots + \alpha_p \beta_q + \dots + \alpha_0 \beta_{p+q} = \alpha_p \beta_q = 1 .$$

Donc :

$$e_p e_q = e_q e_p = e_{p+q} .$$

Les propriétés suivantes :

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha (\beta A) = \alpha \beta A$$

$$A (B + C) = AB + AC$$

$$e_p e_q = e_{p+q} .$$

permettent alors de calculer plus aisément que ne l'indiquaient les définitions, la somme et le produit de polynômes.

Ainsi :

$$= a_0 b_0 e_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) e_1 + (a_1 b_1 + a_2 b_0) e_2 .$$

$$AB = (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2) (b_0 e_0 + b_1 e_1)$$

On retrouve les règles de calcul élémentaires.

Enfin la règle de calcul $e_p e_q = e_{p+q}$ pour le produit de deux polynômes de la base permet de montrer facilement que si A et B sont deux polynômes tels que $AB = 0$, l'un au moins des polynômes est nul. Supposons en effet que ni A, ni B ne sont nuls; alors soit parmi les termes $a_k e_k$ de A celui d'indice le plus élevé $a_p e_p$ tel que $a_p \neq 0$ et de même $b_q e_q$ dans B. Dans AB figure $a_p b_q e_{p+q}$ et comme $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $AB \neq 0$.

Ainsi $AB = 0$ entraîne $A = 0$ ou $B = 0$. Il en résulte que si $A \neq 0$ et si $AB = 0$, alors $B = 0$. Il en résulte encore que si $A \neq 0$ et si $AB = AC$, on a $A(B - C) = 0$, donc $B - C = 0$, donc $B = C$. En d'autres termes cela signifie que *tout polynôme différent de 0 est régulier pour la multiplication.*

DEGRÉ, VALUATION D'UN POLYNÔME

Définition. — Soit $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$ un polynôme. Nous appellerons *degré de A* et nous le désignerons par $\text{deg} A$, le plus grand entier $n \geq 0$ tel que $a_n \neq 0$:

$$n = \text{deg} A$$

Cela signifie que si $k \leq n$, il y a au moins un $a_k \neq 0$ et que $a_k = 0$ quel que soit $k > n$.

$\text{deg} A = 0$ signifie que A est une constante, mais ne signifie pas nécessairement que $A = 0$.

Le degré de 0 n'est pas défini.

Le degré et les deux lois algébriques.

D'après la définition du degré, on a les propriétés suivantes :

1° Si $\text{deg} A > \text{deg} B$, alors $\text{deg} (A + B) = \text{deg} A$

Si $\text{deg} A = \text{deg} B = n$ et si $a_n + b_n \neq 0$, alors
 $\text{deg} (A + B) = \text{deg} A = \text{deg} B$.