

§ 7. La transformation de Fourier-Laplace

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS

Seconde partie

PAR

Jean BRACONNIER, Lyon

§ 7. La transformation de Fourier-Laplace

1. Il est naturellement intéressant d'étudier d'autres « caractères » du groupe G , que les éléments de \hat{G} . Ainsi, on dira qu'une représentation continue de G dans le groupe multiplicatif des nombres complexes $\neq 0$ est un *caractère généralisé* du groupe G ; il est clair que si un caractère généralisé de G est borné, il appartient à \hat{G} . L'ensemble des caractères généralisés de G , muni de la multiplication usuelle des fonctions et de la topologie de convergence compacte dans G est un groupe topologique abélien et complet. Il est facile de construire les caractères généralisés de G : remarquons d'abord que le groupe des caractères généralisés de G est le produit direct du groupe \hat{G} et du groupe des caractères réels et > 0 de G , de telle sorte qu'il suffit d'étudier ces derniers caractères. Désignons alors par $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$ l'espace vectoriel formé des *représentations réelles* (i.e. dans \mathbf{R}) et continues de G ; dans $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$, les topologies de convergence simple et de convergence compacte coïncident et, muni de l'une de ces topologies, $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$ est un espace de BANACH. L'application $l \rightarrow \exp(2\pi l)$ est un isomorphisme du groupe *additif* de $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$ sur le groupe des caractères > 0 de G et, par suite, $(\hat{x}, l) \rightarrow \hat{x} \exp(2\pi l)$, est un isomorphisme de $\hat{G} \times \text{Hom}(G, \mathbf{R})$ sur le groupe des caractères généralisés de G .

Les caractères généralisés ont été introduits par G. MACKEY [20] et J. RISS [28].

Par exemple, l'espace $\text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ s'identifie avec \mathbf{R}^n , car toute représentation réelle et continue de \mathbf{R}^n est une forme linéaire continue et, par suite, de la forme $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1$ où $\mathbf{y}_1 \in \mathbf{R}^n$; chaque caractère généralisé de \mathbf{R}^n est donc de la forme $\mathbf{x} \rightarrow \exp(2i\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + 2\pi\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1)$; on identifiera le groupe des caractères généralisés de \mathbf{R}^n avec le groupe \mathbf{C}^n , en associant à $\mathbf{y} + i\mathbf{y}_1$ le caractère décrit ci-dessus.

Soit alors μ une mesure sur G ; l'ensemble $\Gamma(\mu)$ des $l \in \text{Hom}(G, \mathbf{R})$ tels que $\exp(2\pi l) \mu \in \mathcal{M}^1(G)$ est convexe; on appelle transformée de FOURIER-LAPLACE de μ la transformée de FOURIER de la mesure $\exp(2\pi l) \mu$ ($l \in \Gamma(\mu)$); plus précisément on appelle transformée de LAPLACE¹ de μ la fonction continue L_μ définie dans $\hat{G} \times \Gamma(\mu)$ par

$$L_\mu(\hat{x}, l) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} \exp(2\pi l(x)) d\mu(x). \quad (1)$$

Par exemple, la transformée de LAPLACE² de la mesure $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbf{R}^n)$ est la fonction $L_\mu(\mathbf{z}) = \int \exp(-2i\pi\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x})$, holomorphe dans l'intérieur du cylindre $\mathbf{R}^n \times \Gamma(\mu)$ de \mathbf{C}^n ; si le support de μ est compact, L_μ est une fonction *entière de type exponentiel*, d'après le théorème de PALEY-WIENER. De même, la transformée de LAPLACE de $f \in L^1(\mathbf{Z})$ s'identifie à la fonction

$$L_f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \exp(2i\pi n z),$$

définie et de période 1 dans la bande $\mathbf{R} \times \Gamma(f)$ du plan complexe, et holomorphe à l'intérieur de cette bande, $\Gamma(f)$ étant l'intervalle formé des nombres réels l tels que la famille $(f(n) \exp(-2\pi n l))_{n \in \mathbf{N}}$ soit sommable.

On ne connaît que peu de propriétés de la transformation de LAPLACE dans le cas où G est distinct de \mathbf{R}^n et de \mathbf{Z}^n . Signalons seulement que, si Γ est un ensemble convexe de $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$, l'ensemble des mesures μ sur G telles que $\exp(2\pi l) \mu \in \mathcal{M}^1(G)$

¹ Les propriétés qu'on trouvera ici se rattachent essentiellement à celles de la transformation de LAPLACE dans \mathbf{R} , dite « bilatère ».

² On trouvera des généralisations et des propriétés de la transformation de LAPLACE dans \mathbf{R}^n , par exemple dans L. SCHWARTZ, *Meedlanden Lunds Univ. Met. Sem.*, fasc. dédié à M. RIESZ (1952), pp. 196-206, article où l'on trouvera, d'autre part, des indications bibliographiques.

pour tout $l \in \Gamma$, devient une algèbre lorsqu'on le munit des opérations usuelles et du produit de composition, et que la transformation de LAPLACE $\mu \rightarrow L_\mu$ est un isomorphisme de cette algèbre sur une algèbre de fonctions continues dans $\hat{G} \times \Gamma$.

Signalons encore ceci: le groupe $\text{Hom}(\hat{G}, \mathbf{R})$ est canoniquement isomorphe au groupe $\text{Hom}(\mathbf{R}, G)$ des représentations continues de \mathbf{R} dans G , c'est-à-dire des sous-groupes à un paramètre de G . Si r est un tel sous-groupe à un paramètre, on peut définir la dérivée au point $x \in G$ d'une fonction f définie au voisinage de x par $D_r f(x) = \left. \frac{df(xr(t))}{dt} \right|_{t=0}$. On peut à partir de là développer des éléments de calcul différentiel dans les groupes abéliens, susceptibles de s'appliquer en particulier à l'étude de la transformation de LAPLACE [20, 28]. J. RISS [28] a de plus édifié une théorie des distributions dans les groupes abéliens en utilisant les dérivées définies plus haut et étudié la transformation de FOURIER de ces distributions. Mais, à l'heure actuelle, le maniement de ces techniques est encore trop malaisé pour permettre une théorie intéressante de la transformation de LAPLACE.

2. On appelle *semi-norme* sur le groupe G une fonction > 0 , intégrable dans tout compact de G et telle que $\omega(xy) \leq \omega(x) \omega(y)$ quels que soient $x \in G$ et $y \in G$. Si ω est une semi-norme dans G , l'espace vectoriel $L^1(G, \omega)$ formé des fonctions intégrables dans G pour la mesure positive $\omega(x) dx$ est aussi formé des fonctions f telles que $f\omega \in L^1(G)$ (on identifie toujours des fonctions presque partout égales dans G). Normé par $N_1(f, \omega) = \int |f(x)| \omega(x) dx$ et muni du produit de composition usuel (formule (2) du § 2), $L^1(G, \omega)$ devient une algèbre normée. De plus, si $f \in L^1(G, \omega)$ et si $x \in G$, on a $U_x \cdot f \in L^1(G, \omega)$ et $N_1(U_x \cdot f, \omega) \leq \omega(x) N_1(f, \omega)$; on voit ainsi que U est une représentation de G dans le groupe des endomorphismes continus et inversibles de l'espace de BANACH $L^1(G, \omega)$ (cf. § 8, n° 1).

Tout caractère continu de l'algèbre $L^1(G, \omega)$ est de la forme $\chi(f) = \int f(x) \overline{\varphi(x)} dx$, où φ est une fonction telle que $\varphi/\omega \in L^\infty(G)$; on vérifie alors que φ est (presque partout) égale à un caractère généralisé $\hat{x} \exp(2\pi l)$ de G tel que $\exp(2\pi l) \leq \omega$.

Ainsi le *spectre* de l'algèbre $L^1(G, \omega)$ est en correspondance biunivoque, et même homéomorphe, avec l'espace $\hat{G} \times \Gamma$ où Γ est l'ensemble compact de convexe de $\text{Hom}(G, \mathbf{R})$ formé des $l \leq \frac{1}{2\pi} \log \omega$. On vient donc de voir que la valeur pour $f \in L^1(G, \omega)$ du caractère correspondant au point $(\hat{x}, l) \in \hat{G} \times \Gamma$ est $\int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} \exp(2\pi l(x)) f(x) dx$, c'est-à-dire égale à la valeur au point (\hat{x}, l) de la transformée de LAPLACE de f ; *la transformation de LAPLACE est ainsi une représentation biunivoque et continue de l'algèbre $L^1(G, \omega)$ sur une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues dans l'espace localement compact $\hat{G} \times \Gamma$, et nulles à l'infini.*

On peut alors déterminer les *idéaux réguliers maximaux* de $L^1(G, \omega)$: *chacun d'eux est formé des fonctions de $L^1(G, \omega)$ dont la transformée de LAPLACE s'annule en un point bien déterminé de $\hat{G} \times \Gamma$.* On peut de plus développer pour l'algèbre $L^1(G, \omega)$ des considérations analogues à celles du § 5, n° 1. Mais on ignore en général si le théorème taubérien subsiste pour cette algèbre; un résultat dans ce sens est le suivant: *si la semi-norme ω sur \mathbf{R} est telle que $\frac{\log \omega(x)}{1+x^2}$ soit intégrable dans \mathbf{R} , alors tout idéal fermé de $L^1(\mathbf{R}, \omega)$ distinct de $L^1(\mathbf{R}, \omega)$ est contenu dans un idéal régulier maximal* (c'est-à-dire que, pour qu'un idéal fermé I de $L^1(\mathbf{R}, \omega)$ soit égal à $L^1(\mathbf{R}, \omega)$, il faut et il suffit que pour tout point z de la bande $\mathbf{R} \times \Gamma$ de \mathbf{C} , il existe une fonction $f \in I$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi zx) f(x) dx \neq 0$). Ce résultat est dû à A. BEURLING¹.

3. La transformation de LAPLACE permet encore d'étudier, dans une certaine mesure, d'autres algèbres de groupe. On sait que l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_c(G)$ des mesures à support compact sur G est le dual de l'espace $\mathcal{C}(G)$ des fonctions continues dans G , muni de la topologie de convergence compacte (cf. § 1, n° 1); dans tout ce qui suit, on supposera $\mathfrak{M}_c(G)$ muni de la topologie

¹ Cf. A. BEURLING, Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. *Congrès int. des Mathématiciens, Helsinki* (1938).

faible définie par $\mathcal{C}(G)$. Muni du produit de composition et de l'involution usuels (§ 2, n° 2), $\mathfrak{M}_c(G)$ est une *algèbre involutive*; les idéaux de $\mathfrak{M}_c(G)$ que l'on considérera seront toujours *faiblement fermés*: ce sont aussi les sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{M}_c(G)$, faiblement fermés et stables pour toutes les translations par les éléments de G .

Comme $x \rightarrow \varepsilon_x$ est un homéomorphisme de G dans $\mathfrak{M}_c(G)$, on vérifie facilement que les caractères (faiblement continus) de $\mathfrak{M}_c(G)$ sont de la forme $\chi_{\hat{x},l}(\mu) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} \exp(2\pi l(x)) d\mu(x)$ où (\hat{x}, l) est un point arbitraire de $\hat{G} \times \text{Hom}(\hat{G}, \mathbf{R})$; $\chi_{\hat{x},l}(\mu)$ est ainsi la valeur au point (\hat{x}, l) de la transformée de LAPLACE de la mesure μ ; on voit ainsi que la transformation de LAPLACE est une représentation biunivoque de l'algèbre involutive $\mathfrak{M}_c(G)$ sur une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues dans $\hat{G} \times \text{Hom}(G, \mathbf{R})$.

Si H est une partie de $\mathcal{C}(G)$, l'ensemble des mesures μ orthogonales aux translatées par les éléments de G des fonctions de H (i.e. telles que $\int \overline{U_s \cdot f(x)} d\mu(x) = 0$ si $s \in G$ et $f \in H$) est un idéal H' de $\mathfrak{M}_c(G)$, formé des mesures μ telles que $\tilde{\mu} \star f = 0$ si $f \in H$. Si l'ensemble des fonctions $U_s \cdot f$ ($s \in G, f \in H$) n'est pas total, on dit que H est *moyenne périodique*: pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une mesure $\mu \neq 0$ à support compact et telle que $\tilde{\mu} \star f = 0$ pour toute $f \in H$. On appelle *ensemble spectral* de $H \subset \mathcal{C}(G)$ l'ensemble fermé de $\hat{G} \times \text{Hom}(G, \mathbf{R})$ formé des points (\hat{x}, l) tels que l'on puisse approcher uniformément sur tout compact de G la fonction $\hat{x} \exp(2\pi l)$ par des combinaisons linéaires de translatées de fonctions de H .

De même, si I est un idéal de $\mathfrak{M}_c(G)$, on appelle *ensemble cospectral* de I l'ensemble fermé de $\hat{G} \times \text{Hom}(G, \mathbf{R})$ constitué par les points où s'annulent les transformées de LAPLACE de toutes les mesures appartenant à I . *L'ensemble spectral de $H \subset \mathcal{C}(G)$ est l'ensemble cospectral de l'idéal H'* . Dans le cas où G est quelconque, on voit facilement qu'on ne peut pas, en général, approcher les fonctions de $H \subset \mathcal{C}(G)$ par des combinaisons linéaires de caractères généralisés correspondant aux éléments de l'ensemble spectral de H ou, ce qui revient au même, qu'un

idéal de $\mathcal{M}_c(G)$ n'est pas complètement déterminé par son ensemble cospectral.

Mais, dans le cas de $G = \mathbf{R}$, L. SCHWARTZ [29] a pu élaborer une théorie complète, dont nous allons indiquer les résultats essentiels. Rappelons d'abord que la transformée de LAPLACE $L_\mu(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi zx) d\mu(x)$ d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_c(\mathbf{R})$ est une fonction entière (de type exponentiel). Soit alors H une partie de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$; on appelle *spectre* de H l'ensemble des fonctions exponentielles monômes $x \rightarrow x^n \exp(2i\pi zx)$ ($n \in \mathbf{N}$, $z \in \mathbf{C}$) que l'on peut approcher uniformément dans tout compact de \mathbf{R} par des combinaisons linéaires de translatées de fonctions de H ; si la fonction $x^n \exp(2i\pi zx)$ appartient au spectre de H , il en est de même de la fonction $x^m \exp(2i\pi zx)$ où $0 \leq m \leq n$: l'ensemble spectral de H est alors l'ensemble des nombres complexes z tels que $\exp(2i\pi zx)$ appartienne au spectre de H (d'où une distinction entre spectre et ensemble spectral, le second n'étant en quelque sorte qu'une partie du premier). Si H est moyenne périodique, l'ensemble spectral de H est fermé et discret; en fait, il est beaucoup plus « raréfié », comme on le verra plus loin. Le résultat fondamental peut alors s'exprimer de la façon suivante: *si H est moyenne périodique, le spectre de H est une partie topologiquement libre de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ et toute fonction de H peut être approchée uniformément sur tout compact de \mathbf{R} par des combinaisons linéaires de fonctions de son spectre. On a même beaucoup plus: toute fonction $f \in H$ possède un développement formel canonique suivant le spectre de H ; ce développement détermine la fonction f et permet de la reconstituer par le procédé de sommation d'ABEL; il converge même vers f si f est suffisamment dérivable.*

Soit maintenant I un idéal de $\mathcal{M}_c(\mathbf{R})$. Si $I \neq \{0\}$, l'ensemble cospectral de I est un ensemble fermé et *discret*; posons $\nu_I(z) = 0$ si le nombre complexe z n'appartient pas à l'ensemble spectral de I et, dans le cas contraire, désignons par $\nu_I(z)$ le minimum de l'ordre du zéro qu'ont au point z les transformées de LAPLACE des mesures appartenant à I ; on appelle *cospectre* de I l'ensemble des fonctions $x \rightarrow x^n \exp(2i\pi zx)$ telles que $0 \leq n < \nu_I(z)$. On complète cette définition en appelant cospectre de l'idéal $\{0\}$

l'ensemble de toutes les exponentielles monômes. Le cospectre d'un idéal I est ainsi formé des fonctions $x^n \exp(2i\pi zx)$ telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-2i\pi zx) d\mu(x) = 0$$

pour toute $\mu \in I$. Réciproquement, si $H \subset \mathcal{C}(\mathbf{R})$, le spectre de H est le cospectre de l'idéal H' défini ci-dessus. Si H est moyenne périodique, l'ensemble spectral de H est de *densité finie*, en ce sens que

$$\sum_{|z| \leq r} \nu_{H'}(z) = O(r)$$

quand r tend vers l'infini.

Le théorème indiqué ci-dessus permet alors de faire la théorie des idéaux de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$. Si $z \in \mathbf{C}$ et si n est un entier > 0 , désignons par $Z(z, n)$ l'idéal de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$ formé des mesures dont la transformée de LAPLACE a au point z un zéro d'ordre $\geq n$; $Z(z, n)$ est de codimension finie n . *Les idéaux maximaux de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$ sont les idéaux $Z(z, 1)$; les idéaux primaires (i.e. qui sont contenus dans un idéal maximal unique) sont les $Z(z, n)$; enfin tout idéal de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$ est l'intersection des idéaux primaires qui le contiennent.* Autrement dit, tout idéal $I \neq \{0\}$ de $\mathfrak{M}_c(\mathbf{R})$ est formé des mesures μ dont les transformées de LAPLACE ont, en chaque point $z \in \mathbf{C}$, un zéro d'ordre $\geq \nu_I(z)$, ou ce qui revient au même, telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-2i\pi zx) d\mu(x) = 0$$

si $0 \leq n < \nu_I(z)$.

On possède une théorie tout à fait analogue pour l'espace des fonctions indéfiniment dérivables dans \mathbf{R} dont le support est compact et pour l'espace des distributions dans \mathbf{R} (au lieu de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$)¹.

Par contre, on ignore à peu près complètement ce qui subsiste de ces résultats pour $G = \mathbf{R}^n$ ($n > 1$) et, à fortiori, pour G

¹ En dehors de [29], on trouvera d'importants compléments dans J. P. KAHANE, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles. *Ann. Inst. Fourier*, t. V, pp. 39-130 (1953-1954).

quelconque. On a toutefois des résultats analogues aux précédents, dans le cas de $G = \mathbf{R}^2$, lorsqu'on substitue à l'espace $\mathcal{C}(\mathbf{R}^2)$ l'espace des fonctions entières, le plan complexe étant identifié à \mathbf{R}^2 [29].

Il est naturellement entendu que ce qu'on vient de lire ne saurait passer pour un exposé de la théorie de la transformation de LAPLACE et que le lecteur *devra* se reporter aux travaux la concernant pour avoir d'autres renseignements.

§ 8. Représentations des groupes et de leurs algèbres

On sait l'intérêt considérable que l'on trouve à faire opérer les groupes finis et les groupes compacts dans les espaces vectoriels de dimensions finies, et les rapports étroits qui lient les algèbres de ces groupes et les représentations ainsi obtenues. De telles représentations s'avèrent insuffisantes dans le cas des groupes localement compacts quelconques et il est nécessaire de représenter ceux-ci comme groupes d'opérateurs dans des espaces tels que les espaces de BANACH ou de HILBERT. Bien que l'on puisse pratiquement, dans le cas des groupes abéliens, se borner à l'étude de leurs caractères, ces représentations sont si étroitement liées à l'analyse harmonique qu'il a semblé utile de résumer ici quelques-unes de leurs propriétés. L'exposé qu'on lira ici est très succinct et on n'y trouvera pas trace des travaux importants dont a été l'objet, en ces dernières années, la théorie de la représentation des groupes ¹.

1. Dans ce paragraphe, on désigne par G un groupe localement compact, non nécessairement abélien. Soit E un espace de BANACH complexe et $\mathcal{L}^2(E)$ l'algèbre normée des endomorphismes continus de E . Soit T une représentation de G dans le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}^2(E)$ telle que, si on désigne par T_x l'endomorphisme de E correspondant à $x \in G$ et par $T_x \cdot \mathbf{a}$

¹ On ne peut que citer ici, sans autres précisions, les travaux de F. BRUHAT, I. GELFAND, R. GODEMENT, HARISH-CHANDRA, G. W. MACKEY, E. MAUTNER, M. NEUMARK, I. SEGAL, etc.