DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA RELATION $\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4$ ENTRE LES DIFFÉRENTES FONCTIONS DE JACOBI

PAR

Balth. VAN DER POL

L'objet de cet article est l'équation bien connue qui relie les quatrièmes puissances des trois fonctions $\theta_0\,(0, \tau)$, $\theta_2\,(0, \tau)$ et $\theta_3\,(0, \tau)$ de Jacobi définies par

$$\theta_3\,(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} ,$$

$$\theta_0\,(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n\, q^{n^2} ,$$

$$\theta_2\,(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} ,$$

où $q = e^{i\pi\tau}$ avec $\operatorname{Im}\tau > 0$, τ étant le module des fonctions θ. Si nous écrivons avec Jacobi

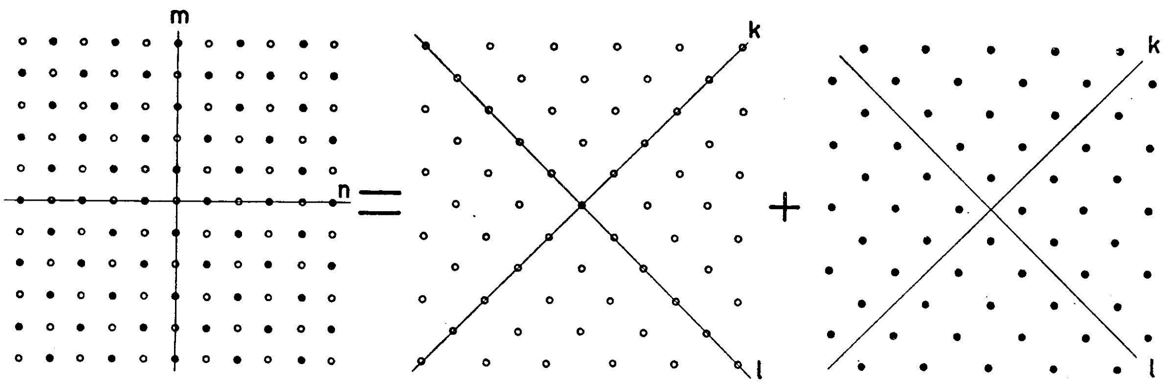
$$\theta_2^2/\theta_3^2 = k \quad \text{et} \quad \theta_0^2/\theta_3^2 = k' ,$$

l'équation en question est équivalente à

$$k^2 + k'^2 = 1 .$$

Cette relation, qui est fondamentale dans la théorie des fonctions elliptiques est habituellement démontrée au moyen de substitutions modulaires. Il est cependant intéressant de savoir qu'il est possible d'en donner une démonstration ne faisant aucun appel aux propriétés des fonctions elliptiques.

A cet effet, considérons les sommets de coordonnées (m, n) du quadrillage infini de la figure, m et n prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Tournons maintenant le système de coordonnées autour de l'origine d'un angle égal à $\pi/4$, et appelons k et l les nouvelles coordonnées. Ainsi, le réseau A peut être considéré comme une superposition de deux nouveaux réseaux B_1 et B_2, B_2 étant décalé par rapport à B_1 dans les deux directions perpendiculaires k et l d'une distance égale à un demi-pas des nouveaux systèmes. Les points appartenant au réseau B_1 sont ceux pour lesquels dans le quadrillage original $(m + n)$ et $(m - n)$ sont pairs (marqués par un petit cercle). Ceux appartenant au réseau B_2 sont caractérisés par le fait que $(m + n)$ et $(m - n)$ sont impairs (marqués par un point).



A $\qquad$ B_1 $\qquad$ B_2

On a donc pour le réseau B_1

$$m + n = 2l \quad \text{et} \quad m - n = 2k \ ,$$

c'est-à-dire

$$m = l + k \ , \quad n = l - k \ ; \tag{1}$$

tandis que pour B_2

$$m + n = 2l + 1 \quad \text{et} \quad m - n = 2k + l \ ,$$

c'est-à-dire

$$m = l + k + l \ , \quad n = l - k \ . \tag{2}$$

Considérons à présent une fonction $f(m, n)$ définie sur tous les points du réseau A telle que les sommes de $f(m, n)$ étendues sur les réseaux B_1 et B_2 convergent *séparément.* Dans ce cas, on aura, d'après les formules de transformation (1) et (2),

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m, n) = \sum_{B_1} f(m, n) + \sum_{B_2} f(m, n)$$

c'est-à-dire

$$\sum\sum f(m, n) = \sum\sum f(l+k\,,\ l-k) + \sum\sum f(l+k+1\,,\ l-k)), \qquad (3$$

en omettant d'écrire les limites des sommes qui, par la suite, seront toujours $-\infty$ et $+\infty$.

Cette relation suffit à démontrer l'équation mentionnée de Jacobi.

En effet, d'après la définition de $\theta_3(0, \tau)$ on a

$$\theta_3^2(0, \tau) = \sum\sum q^{m^2+n^2},$$

et en faisant usage de (3), il vient

$$\sum\sum q^{m^2+n^2} = \sum\sum q^{2(l^2+k^2)} + \sum\sum q^{2\left\{(l+\frac{1}{2})^2+(k+\frac{1}{2})^2\right\}},$$

c'est-à-dire

$$\theta_3^2(0, \tau) = \theta_3^2(0, 2\tau) - \theta_2^2(0, 2\tau)\,. \qquad (4)$$

En appliquant cette même transformation à

$$\theta_0^2(0, \tau) = \sum\sum (-1)^{n+m} q^{n^2+m^2},$$

on obtient

$$\sum\sum(-1)^{n+m} q^{n^2+m^2} = \sum\sum(-1)^{2l} q^{2(l^2+k^2)} + \\ + \sum\sum(-1)^{2l+1} q^{2\left\{(t+\frac{1}{2})^2+(k+\frac{1}{2})^2\right\}},$$

c'est-à-dire

$$\theta_0^2(0, \tau) = \theta_3^2(0, 2\tau) - \theta_2^2(0, 2\tau)\,. \qquad (5)$$

Enfin, en l'appliquant en dernier lieu à

$$\theta_3(0, \tau)\,\theta_0(0, \tau) = \sum\sum(-1)^m q^{m^2+n^2},$$

il vient

$$\sum\sum (-1)^n q^{m^2+n^2} = \sum\sum (-1)^{l-k} q^{2(k^2+l^2)} + \\ + \sum\sum (-1)^{l+k} q^{2\left\{(k+\frac{1}{2})^2+(l+\frac{1}{2})^2\right\}} = \\ = \left(\sum(-1)^l q^{2l^2}\right)^2 + \left(\sum(-1)^l q^{2(l+\frac{1}{2})^2}\right)^2 .$$

Or,

$$\sum (-1)^l q^{2(l+\frac{1}{2})^2} = 0 ,$$

car les termes à indices $l = i$ et $l = -i-1$, $(i = 0, 1, \ldots)$ se détruisent mutuellement; ainsi

$$\theta_3(0, \tau)\, \theta_0(0, \tau) = \theta_0^2(0, 2\tau) . \tag{6}$$

En multipliant à présent (4) et (5) membre à membre, on obtient

$$\theta_3^2(0, \tau)\, \theta_0^2(0, \tau) = \theta_3^4(0, 2\tau) - \theta_2^4(0, 2\tau)$$

qui, d'après (6) se réduit à

$$\theta_0^4(0, 2\tau) = \theta_3^4(0, 2\tau) - \theta_2^4(0, 2\tau) ,$$

ou plus simplement à

$$\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4 . \tag{7}$$

C'est l'équation mentionnée de Jacobi que l'on peut ainsi établir d'une manière tout à fait élémentaire.

En conclusion, remarquons que la transformation définie par (3) n'est pas applicable seulement aux fonctions $\theta(0, \tau)$ mais également à bien d'autres fonctions; on obtient, par exemple, pour les fonctions

$$\theta_0(v, \tau) , \quad \theta_1(v, \tau) , \quad \theta_2(v, \tau) \quad \text{et} \quad \theta_3(v, \tau)$$

la relation

$$\theta_3^4(v, \tau) + \theta_1^4(v, \tau) = \theta_0^4(v, \tau) + \theta_2^4(v, \tau)$$

qui, pour $v = 0$, se réduit à (7).