VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \geqq 1\,,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est divergente.

b) *Si* f (x) *est mesurable et positive à partir d'un* x *et reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de* f (x) *et s'il existe un nombre* δ, 0 < δ < 1, *tel qu'à partir d'un* x,

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \delta\,, \qquad 0 < \delta < 1\,,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est convergente.

VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Quelle est la portée du critère B d'Ermakof comparée à celle des critères connus ? On trouve souvent l'assertion que le critère B d'Ermakof (avec $\Psi(x) = e^x$) « embrasse » tous les critères de la série logarithmique de Morgan-Bertrand. Or ceci n'est vrai qu'en partie.

Si l'on considère *les critères de première espèce* dans lesquels a_ν est comparé avec différentes fonctions de l'index ν, le critère B d'Ermakof n'est pas même plus efficace que le critère de Cauchy portant sur $\sqrt[\nu]{a_\nu}$.

En effet, nous allons construire une fonction $f(x)$ positive, continue, non croissante et tendant vers 0 avec $x \longrightarrow \infty$, telle que l'on a

$$f(x) \leqq e^{-x} \qquad (x \geqq 1)\,, \tag{VI, 1}$$

$$\frac{f\left(e^{x_\nu}\right) e^{x_\nu}}{f(x_\nu)} \longrightarrow \infty \qquad (x \longrightarrow \infty) \tag{VI, 2}$$

pour une suite x_ν tendant vers l'infini. Alors la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ est convergente et le critère de Cauchy sur $\sqrt[\nu]{a_\nu}$ est applicable tandis que le critère du théorème B ne s'applique pas.

Posons à cet effet

$$x_1 = 1 \, , \quad \dots \, , \quad x_{\nu+1} = e^{x_\nu} + 1 \qquad (\nu = 1, 2, \dots) \, .$$

Définissons $f(x)$ dans l'intervalle $\langle x_\nu, e^{x_\nu} \rangle$ par

$$f(x) = e^{-x_{\nu+1}} \quad (x_\nu \leqq x \leqq e^{x_\nu}) \, .$$

Quant à l'intervalle de longueur *un* entre e^{x_ν} et $x_{\nu+1} = e^{x_\nu} + 1$, la fonction $f(x)$ y est définie comme fonction linéaire et *continue* dans tout l'intervalle fermé $\langle e^{x_\nu}, x_{\nu+1} \rangle$:

$$f\left(e^{x_\nu} + t\right) = t \cdot e^{-x_{\nu+2}} + (1 - t)\, e^{-x_{\nu+1}} \quad (0 \leqq t \leqq 1) \, .$$

Alors $f(x)$ sera positive, continue et non croissante. Pour tout x de l'intervalle $\langle x_\nu, x_{\nu+1} \rangle$ elle est au plus égale à

$$f(x_\nu) = e^{-x_{\nu+1}} \leqq e^{-x} \, ,$$

d'où (VI, 1).

D'autre part, on a d'après la définition de $f(x)$ pour $\nu \longrightarrow \infty$

$$f\left(e^{x_\nu}\right) = f(x_\nu) \, , \quad \frac{f\left(e^{x_\nu}\right) e^{x_\nu}}{f(x_\nu)} = e^{x_\nu} \longrightarrow \infty \, ,$$

c'est-à-dire (VI, 2).

Nous montrerons dans la section suivante qu'il n'en est plus de même pour les critères de seconde espèce portant sur le quotient $\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$.

Nous allons d'abord faire quelques observations sur les séries de Morgan-Bertrand. Nous désignerons par $lg_k\, x$ $(k = 1, 2, \dots)$ la k-ième itérée du lgx, c'est-à-dire

$$lg_0\, x = x \, , \quad lg_1\, x = lgx \, , \dots \, , \quad lg_{n+1}\, x = lg\left(lg_n\, x\right) , \dots \quad (n = 1 \, , 2 \, , \dots) \, . \tag{VI, 1}$$

En plus, nous poserons

$$\mathrm{L}_0(x) = 1 \, , \ \mathrm{L}_1(x) = \frac{1}{x} \, , \ \dots, \ \mathrm{L}_{n+1}(x) = \frac{1}{xlgx \dots lg_n\, x} \, , \ \dots \ (n = 1, 2, \dots) \, . \tag{VI, 2}$$

Les séries de MORGAN-BERTRAND ont alors la forme

$$\sum_{\nu \geqq \nu_0}^{\infty} \frac{\mathrm{L}_n(\nu)}{lg_n^{1+s}\,\nu} \tag{VI, 3}$$

et sont convergentes pour $s > 0$ et divergentes pour $s \leqq 0$.

On a évidemment

$$\mathrm{L}_n(e^x) = e^{-x}\,\mathrm{L}_n(x)\,lg_{n-1}\,x \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,, \tag{VI, 4}$$

donc, en posant $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{L}_n(x)}{lg_n^{1+s}\,x}$:

$$\frac{\varphi(e^x)\,e^x}{\varphi(x)} = \frac{lg_n^{1+s}\,x}{lg_{n-1}^{s}\,x}\,. \tag{VI, 5}$$

Or, pour $x \longrightarrow \infty$, cette expression tend vers ∞ pour $s \leqq 0$, et vers 0 pour $s > 0$. On voit que le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = e^x$ permet de décider immédiatement la question de la convergence ou divergence des séries de MORGAN-BERTRAND.

Quel sera le résultat si l'on pose $\Psi(x) = x^k\ (k > 1)$? On a évidemment les relations

$$k\,x^{k-1}\,\mathrm{L}_2(x^k) = \mathrm{L}_2(x)\,, \qquad lg_2(x^k) = \left(1 + \frac{lg\,k}{lg_2\,x}\right) lg_2\,x\,,$$

donc

$$\frac{\mathrm{L}_2(x^k)\,k\,x^{k-1}}{lg_2^{1+s}(x^k)} \Bigg/ \frac{\mathrm{L}_2(x)}{lg_2^{1+s}\,x} = \left(1 + \frac{lg\,k}{lg_2\,x}\right)^{-1-s}. \tag{VI, 6}$$

(VI, 6) tend vers *un* pour $x \longrightarrow \infty$, de sorte que le critère B de convergence pour $s > 0$ est en défaut pour les séries de MORGAN-BERTRAND correspondant à $n = 2$. (VI, 6) est < 1 pour $s > -1$ et n'est $\geqq 1$ que pour $s \leqq -1$. Le critère B d'Ermakof ne permet donc de prouver la divergence des séries de MORGAN-BERTRAND correspondant à $n = 2$ que pour $s \leqq -1$. D'autre part, il résulte immédiatement des relations

$$\frac{k\,x^{k-1}\,x^{1+s}}{x^{k(1+s)}} = k\,x^{-s(k-1)}, \qquad \frac{k\,x^{k-1}\,x\,(lg\,x)^{1+s}}{x^k\,(k\,lg\,x)^{1+s}} = k^{-s}$$

que pour $n = 0$ et $n = 1$ la question de la convergence (ou divergence) des séries de MORGAN-BERTRAND est complètement résolue par le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = x^k \, (k > 1)$.

VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.

Les critères de seconde espèce reposent sur le fait que si l'on a

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leqq \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} \quad (a_\nu , \, c_\nu > 0 \; ; \quad \nu = 1, 2, \ldots) \, ,$$

la convergence de Σc_ν entraîne celle de Σa_ν, donc la divergence de Σa_ν entraîne la divergence de Σc_ν. On obtient les différentes formes de ce critère par un choix convenable des « séries de comparaison »: la série convergente Σc_ν ou la série divergente Σa_ν.

Or si les a_ν et les c_ν convergent vers 0 en décroissant, le principe suivant est « en général » valable:

Si la convergence de la série de comparaison Σc_ν *s'obtient au moyen d'un critère* B *d'Ermakof avec la fonction conjuguée* $\Psi(\mathrm{x})$, *le même critère d'Ermakof assure directement la convergence de* Σa_ν. *Si la divergence de la série* Σa_ν *s'obtient au moyen d'un critère* B *d'Ermakof, ce même critère assure aussi la divergence de* Σc_ν.

Toutefois, pour les énoncés précis, il faut utiliser des hypothèses supplémentaires. Nous dirons d'une fonction $f(x)$ non nulle à partir d'un x, qu'elle possède *la propriété* E *si l'on a*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x + \theta)}{f(x)} = 1 \tag{VII, 1}$$

uniformément par rapport à θ pour $|\theta| \leqq 1$.

Avec cette notion, nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme. — *Soient* $\mathrm{f(x)}$ *et* $\mathrm{g(x)}$ *deux fonctions positives pour* $\mathrm{x} \geqq \mathrm{x}_0$, *dont l'une au moins jouit de la propriété* E, *tandis que l'autre est ou bien non croissante, ou bien jouit de la propriété* E. *Soient* $\Psi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x})$ *deux fonctions positives pour* $\mathrm{x} \geqq \mathrm{x}_0$ *avec* $\Psi(\mathrm{x}) \geqq \mathrm{x} + 1$. *Alors si l'on a pour tout entier* $\nu \geqq \mathrm{n}_0$: