

VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \geq 1,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est divergente.

- b) Si $f(x)$ est mesurable et positive à partir d'un x et reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de $f(x)$ et s'il existe un nombre δ , $0 < \delta < 1$, tel qu'à partir d'un x ,

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \delta, \quad 0 < \delta < 1,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est convergente.

VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Quelle est la portée du critère B d'Ermakof comparée à celle des critères connus ? On trouve souvent l'assertion que le critère B d'Ermakof (avec $\Psi(x) = e^x$) « embrasse » tous les critères de la série logarithmique de MORGAN-BERTRAND. Or ceci n'est vrai qu'en partie.

Si l'on considère *les critères de première espèce* dans lesquels a_{ν} est comparé avec différentes fonctions de l'index ν , le critère B d'Ermakof n'est pas même plus efficace que le critère de Cauchy portant sur $\sqrt[\nu]{a_{\nu}}$.

En effet, nous allons construire une fonction $f(x)$ positive, continue, non croissante et tendant vers 0 avec $x \rightarrow \infty$, telle que l'on a

$$f(x) \leq e^{-x} \quad (x \geq 1), \quad (\text{VI, 1})$$

$$\frac{f(e^{x_{\nu}}) e^{x_{\nu}}}{f(x_{\nu})} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad (\text{VI, 2})$$

pour une suite x_{ν} tendant vers l'infini. Alors la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ est

convergente et le critère de Cauchy sur $\sqrt[n]{a_n}$ est applicable tandis que le critère du théorème B ne s'applique pas.

Posons à cet effet

$$x_1 = 1, \dots, x_{\nu+1} = e^{x_\nu} + 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Définissons $f(x)$ dans l'intervalle $\langle x_\nu, e^{x_\nu} \rangle$ par

$$f(x) = e^{-x_{\nu+1}} \quad (x_\nu \leq x \leq e^{x_\nu}).$$

Quant à l'intervalle de longueur un entre e^{x_ν} et $x_{\nu+1} = e^{x_\nu} + 1$, la fonction $f(x)$ y est définie comme fonction linéaire et *continue* dans tout l'intervalle fermé $\langle e^{x_\nu}, x_{\nu+1} \rangle$:

$$f(e^{x_\nu} + t) = t \cdot e^{-x_{\nu+1}} + (1 - t) e^{-x_\nu} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Alors $f(x)$ sera positive, continue et non croissante. Pour tout x de l'intervalle $\langle x_\nu, x_{\nu+1} \rangle$ elle est au plus égale à

$$f(x_\nu) = e^{-x_{\nu+1}} \leq e^{-x},$$

d'où (VI, 1).

D'autre part, on a d'après la définition de $f(x)$ pour $\nu \rightarrow \infty$

$$f(e^{x_\nu}) = f(x_\nu), \quad \frac{f(e^{x_\nu}) e^{x_\nu}}{f(x_\nu)} = e^{x_\nu} \rightarrow \infty,$$

c'est-à-dire (VI, 2).

Nous montrerons dans la section suivante qu'il n'en est plus de même pour les critères de seconde espèce portant sur le quotient $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$.

Nous allons d'abord faire quelques observations sur les séries de MORGAN-BERTRAND. Nous désignerons par $lg_k x$ ($k = 1, 2, \dots$) la k -ième itérée du lgx , c'est-à-dire

$$lg_0 x = x, \quad lg_1 x = lgx, \dots, \quad lg_{n+1} x = lg(lg_n x), \dots \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{VI, 1}$$

En plus, nous poserons

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = \frac{1}{x}, \dots, \quad L_{n+1}(x) = \frac{1}{x lgx \dots lg_n x}, \dots \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{VI, 2}$$

Les séries de MORGAN-BERTRAND ont alors la forme

$$\sum_{\nu \geq \nu_0}^{\infty} \frac{L_n(\nu)}{lg_n^{1+s} \nu} \quad (\text{VI, 3})$$

et sont convergentes pour $s > 0$ et divergentes pour $s \leq 0$.

On a évidemment

$$L_n(e^x) = e^{-x} L_n(x) lg_{n-1} x \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (\text{VI, 4})$$

donc, en posant $\varphi(x) = \frac{L_n(x)}{lg_n^{1+s} x}$:

$$\frac{\varphi(e^x) e^x}{\varphi(x)} = \frac{lg_n^{1+s} x}{lg_{n-1}^s x}. \quad (\text{VI, 5})$$

Or, pour $x \rightarrow \infty$, cette expression tend vers ∞ pour $s \leq 0$, et vers 0 pour $s > 0$. On voit que le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = e^x$ permet de décider immédiatement la question de la convergence ou divergence des séries de MORGAN-BERTRAND.

Quel sera le résultat si l'on pose $\Psi(x) = x^k$ ($k > 1$) ? On a évidemment les relations

$$k x^{k-1} L_2(x^k) = L_2(x), \quad lg_2(x^k) = \left(1 + \frac{lg k}{lg_2 x}\right) lg_2 x,$$

donc

$$\frac{L_2(x^k) k x^{k-1}}{lg_2^{1+s}(x^k)} \bigg/ \frac{L_2(x)}{lg_2^{1+s} x} = \left(1 + \frac{lg k}{lg_2 x}\right)^{-1-s}. \quad (\text{VI, 6})$$

(VI, 6) tend vers un pour $x \rightarrow \infty$, de sorte que le critère B de convergence pour $s > 0$ est en défaut pour les séries de MORGAN-BERTRAND correspondant à $n = 2$. (VI, 6) est < 1 pour $s > -1$ et n'est ≥ 1 que pour $s \leq -1$. Le critère B d'Ermakof ne permet donc de prouver la divergence des séries de MORGAN-BERTRAND correspondant à $n = 2$ que pour $s \leq -1$. D'autre part, il résulte immédiatement des relations

$$\frac{k x^{k-1} x^{1+s}}{x^{k(1+s)}} = k x^{-s(k-1)}, \quad \frac{k x^{k-1} x (lg x)^{1+s}}{x^k (k lg x)^{1+s}} = k^{-s}$$

que pour $n = 0$ et $n = 1$ la question de la convergence (ou divergence) des séries de MORGAN-BERTRAND est complètement résolue par le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = x^k$ ($k > 1$).

VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.

Les critères de seconde espèce reposent sur le fait que si l'on a

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} \leq \frac{c_{\nu+1}}{c_{\nu}} \quad (a_{\nu}, c_{\nu} > 0 ; \nu = 1, 2, \dots),$$

la convergence de Σc_{ν} entraîne celle de Σa_{ν} , donc la divergence de Σa_{ν} entraîne la divergence de Σc_{ν} . On obtient les différentes formes de ce critère par un choix convenable des « séries de comparaison »: la série convergente Σc_{ν} , ou la série divergente Σa_{ν} .

Or si les a_{ν} et les c_{ν} convergent vers 0 en décroissant, le principe suivant est « en général » valable:

Si la convergence de la série de comparaison Σc_{ν} s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi(x)$, le même critère d'Ermakof assure directement la convergence de Σa_{ν} . Si la divergence de la série Σa_{ν} s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof, ce même critère assure aussi la divergence de Σc_{ν} .

Toutefois, pour les énoncés précis, il faut utiliser des hypothèses supplémentaires. Nous dirons d'une fonction $f(x)$ non nulle à partir d'un x , qu'elle possède la propriété E si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x + \theta)}{f(x)} = 1 \tag{VII, 1}$$

uniformément par rapport à θ pour $|\theta| \leq 1$.

Avec cette notion, nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme. — *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions positives pour $x \geq x_0$, dont l'une au moins jouit de la propriété E, tandis que l'autre est ou bien non croissante, ou bien jouit de la propriété E. Soient $\Psi(x)$, $\Phi(x)$ deux fonctions positives pour $x \geq x_0$ avec $\Psi(x) \geq x + 1$. Alors si l'on a pour tout entier $\nu \geq n_0$:*