

III. Construction d'une solution de l'équation d'Abel.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

vertu de (II, 18), la relation (II, 19) est aussi valable pour tout $x \geq a_0$ et l'on a

$$f(x) \leq C \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \quad (x \geq a_0).$$

La série (II, 7) est convergente avec (II, 5).

Les assertions *a)* et *b)* sont complètement démontrées.

III. Construction d'une solution de l'équation d'Abel.

Dans cette section nous allons construire avec Ermakof, pour chaque fonction $\Psi(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme de la section II une fonction $\varphi(x)$ jouissant des propriétés exigées dans ce lemme, sauf, pour le moment, les propriétés $\gamma)$ et $\delta)$.

Désignons l'inverse de la fonction $y = \Psi(x)$ ($x \geq a_0$) par

$$x = \psi(y) \quad (y \geq a_1 = \Psi(a_0)).$$

La fonction $\psi(y)$ est continue et croissante pour $y \geq a_1$, et l'on a

$$\psi'(y) = \frac{1}{\Psi'(x)} \quad (y = \Psi(x), \quad x \geq a_0, \quad y \geq a_1). \quad (\text{III, 1})$$

Posons

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= x, & \psi_1(x) &= \psi(x), & \psi_2(x) &= \psi(\psi(x)), & \dots, \\ \psi_n(x) &= \psi(\psi_{n-1}(x)). \end{aligned}$$

Alors $\psi_n(x)$ est l'inverse de la fonction $\Psi_n(x)$ donnée par (II, 9). Donc, en résolvant (II, 11) par rapport à x^* , on a

$$x^* = \psi_n(x). \quad (\text{III, 2})$$

La valeur de x donnée par (II, 11) parcourt évidemment l'intervalle

$$a_n \leq x < a_{n+1}, \quad (\text{III, 3})$$

où les a_n sont définies par (II, 10).

Donc, dès qu'un $x \geq a_0$ est donné, l'entier n et le nombre x^* dans l'intervalle (a_0, a_1) sont univoquement déterminés par la relation (II, 11).

Posons maintenant

$$\varphi(x) = n + 1 + \frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0} \quad (x \geq a_0), \quad (\text{III, 4})$$

où l'entier n est déterminé par (III, 3) et x^* par (III, 2). Il résulte de (II, 11)

$$\Psi(x) = \Psi_{n+1}(x^*),$$

donc

$$\varphi(\Psi(x)) = n + 2 + \frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0} = \varphi(x) + 1.$$

La fonction $\varphi(x)$ donnée par (III, 4) satisfait donc à l'équation d'Abel.

D'autre part, si x tend vers ∞ , le nombre n déterminé par (III, 3) tend aussi vers ∞ . Donc, $\frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0}$ étant situé dans l'intervalle $(0, 1)$, on a $\varphi(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$).

La fonction $\psi_n(x)$ est continue pour tout entier n . Donc, tant que x reste dans l'intervalle (III, 3), x^* et $\varphi(x)$ sont continus.

On a évidemment pour tout $n \geq 0$

$$\varphi(a_n) = n + 1.$$

Donc $\varphi(x)$ est positive et continue pour $x > a_0$ autant que x est différente de chaque a_v ($v = 1, 2, \dots$). $\varphi(x)$ est, de plus, *continue de droite* en tout point a_n ($n = 0, 1, \dots$).

Je dis que $\varphi(x)$ est aussi continue de gauche en chaque point a_{n+1} ($n = 0, 1, \dots$). En effet, si x tend *en croissant* vers l'extrémité de droite de l'intervalle (III, 3), x^* tend vers a_1 , et d'après (III, 4) $\varphi(x)$ tend vers $n + 2 = \varphi(a_{n+1})$. Donc $\varphi(x)$ est *continue pour tout $x \geq a_0$* .

Il résulte, en plus, de (III, 4) et (III, 2) que $\varphi(x)$ est dérivable à l'intérieur de tout intervalle (III, 3), c'est-à-dire pour $a_n < x < a_{n+1}$. On a évidemment

$$\varphi'(x) = \frac{1}{a_1 - a_0} \frac{d\psi_n(x)}{dx},$$

$$(a_1 - a_0) \varphi'(x) = \psi'(\psi_{n-1}(x)) \psi'(\psi_{n-2}(x)) \dots \psi'(\psi(x)) \psi'(x) \quad (\text{III}, 5)$$

$$(a_n < x < a_{n+1}) .$$

La même expression donne encore la *dérivée de droite* de $\varphi(x)$ en a_n , de sorte que $\varphi'_+(x)$ est continue dans l'intervalle (III, 3).

On a en particulier

$$(a_1 - a_0) \varphi'_+(a_0) = 1, \quad (a_1 - a_0) \varphi'_+(a_1) = \psi'(a_1), \quad \dots$$

$$(a_1 - a_0) \varphi'_+(a_n) = \psi'(a_n) \psi'(a_{n-1}) \dots \psi'(a_1) \quad (n = 1, 2, \dots) . \quad (\text{III}, 6)$$

Pour l'extrémité de droite de l'intervalle (III, 3), l'expression (III, 5) tend avec $x \uparrow a_{n+1}$ vers

$$\frac{d\psi_n(a_{n+1})}{dx} = \psi'(a_{n+1}) \psi'(a_n) \dots \psi'(a_2) .$$

Or, ceci est aussi

$$(a_1 - a_0) \varphi'_-(a_{n+1}),$$

où $\varphi'_-(a_{n+1})$ est la *dérivée de gauche* de $\varphi(x)$ en a_{n+1} . En effet, on a

$$(a_1 - a_0) \varphi'_-(a_{n+1}) = \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{(a_1 - a_0)(n+2) - [(n+1)(a_1 - a_0) + \psi_n(x) - a_0]}{a_{n+1} - x} =$$

$$= \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{a_1 - \psi_n(x)}{a_{n+1} - x} = \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{\psi_n(a_{n+1}) - \psi_n(x)}{a_{n+1} - x} = \frac{d\psi_n(a_{n+1})}{dx} .$$

On a donc en particulier

$$(a_1 - a_0) \varphi'_-(a_n) = \psi'(a_n) \psi'(a_{n-1}) \dots \psi'(a_2) \quad (n > 0)$$

où le second membre a la valeur un pour $n = 1$. Donc, en comparant avec (III, 6),

$$\varphi'_+(a_n) = \psi'(a_1) \varphi'_-(a_n), \quad \varphi'_-(a_n) = \Psi'(a_0) \varphi'_+(a_n) . \quad (\text{III}, 7)$$

On voit que $\varphi'(x)$ est continue à l'intérieur de chacun des intervalles $\langle a_n, a_{n+1} \rangle$, à condition de prendre aux extrémités les dérivées du côté correspondant. Au point de discontinuité a_n ($n = 1, 2, \dots$) on a (III, 7). Il résulte maintenant de l'hypothèse de la continuité de $\Psi'(x)$ que la propriété β) est satisfaite.