

AUSGEWÄHLTE EINZELPROBLEME DER KOMBINATORISCHEN GEOMETRIE IN DER EBENE

Autor(en): **Hadwiger, H. / Debrunner, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-31350>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

573 : 579.1

AUSGEWÄHLTE EINZELPROBLEME
DER KOMBINATORISCHEN GEOMETRIE
IN DER EBENE

VON

H. HADWIGER und H. DEBRUNNER, Bern

Es gibt verschiedene mathematische Sachgebiete, wo elementare Aufgaben unmittelbar in höhere und teilweise ungelöste Fragestellungen übergehen, so dass dort einfachste Gegenstände der Schulmathematik eng benachbart mit solchen sind, die wissenschaftliches Interesse bieten und von Spezialisten bearbeitet werden. Wesentlich ist dabei, dass die beiden fachlichen Standorte nicht wie üblich durch weit ausgebaute höhere Theorien und vielschichtige Begriffsskalen voneinander getrennt sind.

Ein Sachgebiet dieser Art ist die kombinatorische Geometrie, die bei Beschränkung auf die Ebene einen besonders einfachen Charakter aufweist. Ihre Fragestellungen knüpfen unmittelbar an die Grundbegriffe der ebenen Elementargeometrie an und beziehen sich dann auf die Vielfalt der primitivsten Vorgänge und Verknüpfungen wie diejenigen des Umfassens, Treffens und Zerlegens usw. und auf die hier in Erwägung zu ziehenden kombinatorischen Möglichkeiten.

Das Gebiet ist mit der kombinatorischen Topologie verwandt; jedoch tritt die eigentlich topologische Betrachtungsweise stark zurück, und die Problematik bleibt der Elementargeometrie verpflichtet. Wie dies von H. HOPF [22]¹ ausführlicher geschil-

¹ Eckige Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

dert worden ist, treten in der kombinatorischen Geometrie metrische und topologische Gesichtspunkte in eine gewisse Wechselbeziehung.

Die von uns vorgenommene Zusammenstellung zahlreicher Einzelprobleme hält sich übrigens nicht vollkommen streng an den methodischen Rahmen der kombinatorischen Geometrie; diese bildet nur das engste Kernstück eines Fragenkreises, der durch die Ganzheit und Einfachheit seiner Gegenstände und durch den rein kombinatorischen Habitus der erforderlichen Schlüsse einen besonderen Anreiz auszuüben vermag.

Wie man — um dieser Geschmacksrichtung zu folgen und um sich damit einer Wandlung anzupassen, die methodisch und sachlich vom gewohnten klassischen Machtbereich zu einem mehr neuzeitlich orientierten Arbeitsgebiet mit neuartigen reizvollen Möglichkeiten überführt — ausgerüstet mit nur elementaren Begriffen fragen kann, das soll durch die hier zusammengetragenen Beispiele dem Leser nahe gebracht werden.

An Vorkenntnissen ist ausser den allgemeinen Grundlagen der Elementargeometrie und der Lehre von den reellen Zahlen wenig erforderlich; eine gewisse Vertrautheit mit dem mengenmässigen Denken ist nützlich; wichtig ist der Begriff der ebenen Punktmenge. Wo erforderlich, werden weniger geläufige Bezeichnungen kurz erläutert.

In Teil I. werden ausgesuchte Lehrsätze, nach Aussagengruppen geordnet, ohne Beweis, aber mit einlässlicherem Kommentar und mit Literaturhinweisen zusammengestellt. Die Beweise — vielfach nur kurz angedeutet — folgen in Teil II. So findet mancher Leser auch Gelegenheit, sich im Aufsuchen und Ausführen eigener Beweisideen zu üben. Besondere Interessenten mögen durch die zahlreichen Zitate auch da und dort den Weg zu aktueller Fachliteratur finden und auch die angedeuteten ungelösten Probleme weiterverfolgen.

Wir hoffen mit diesen ausgewählten Einzelproblemen Anregung zu intensiverer Beschäftigung mit den anziehenden Fragen der kombinatorischen Geometrie zu bieten und den in diesem Sachgebiet bestehenden unmittelbaren Kontakt zwischen Schulmathematik und wissenschaftlicher Forschung zu lebendiger Wirkung gelangen zu lassen.

I. TEIL.

Die Aussagen der ersten kleinen Gruppe beziehen sich auf Inzidenzverhältnisse bei Punkten, Geraden und Kreisen und gehören also der kombinatorischen Elementargeometrie an.

1. *Liegt auf der Verbindungsgeraden je zweier Punkte einer endlichen Punktmenge stets wenigstens ein dritter Punkt der Menge, so liegen alle Punkte auf einer Geraden.*

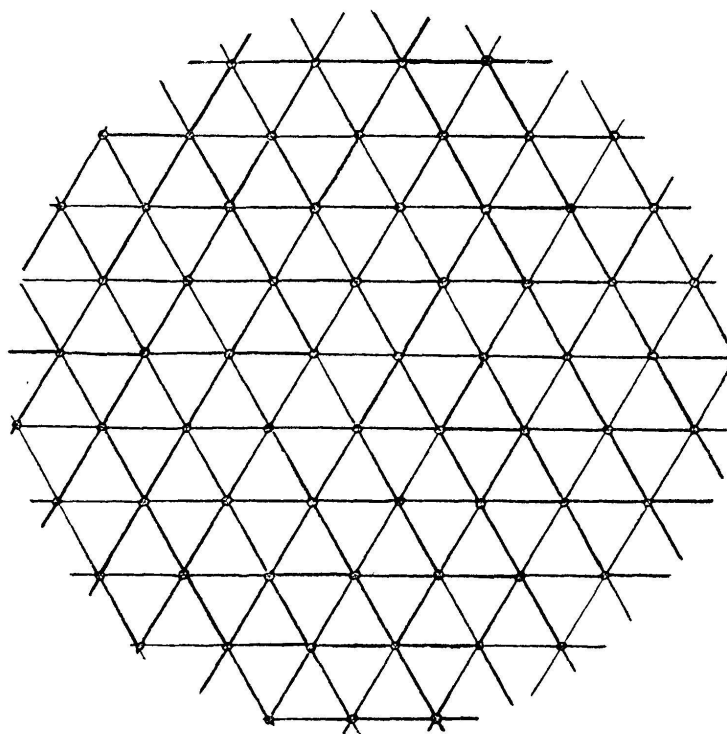


FIG. 1

Zu diesem 1893 von J. J. SYLVESTER [55] vermuteten Theorem findet sich ein kurzer Beweis von T. GALLAI (Grünwald) bei N. G. DE BRUIJN-P. ERDÖS [6], wo die Aussage auch als Korollar eines rein kombinatorischen Satzes erscheint. Für weitere Beweise, Verallgemeinerungen und Varianten vgl. P. ERDÖS [11], H. S. M. COXETER [7], G. A. DIRAC [9] und Th. MOTZKIN [39].

2. *Geht durch den Schnittpunkt je zweier Geraden einer endlichen Geradenmenge stets wenigstens eine dritte Gerade, so gehen alle Geraden durch einen Punkt.*

Die Aussagen **1** und **2** sind nicht mehr richtig, wenn die Punkt- und Geradenmengen nicht endlich sind. Dies zeigt bei-

spielsweise für beide Aussagen simultan das reguläre abzählbar-unendliche Punkt- und Geradensystem in Fig. 1.

3. *Liegt auf jeder Kreislinie durch je drei Punkte einer endlichen Punktmenge stets wenigstens ein vierter Punkt der Menge, so liegen alle Punkte auf einer Kreislinie.*

In Voraussetzung und Behauptung eng mit Aussage **3** verwandt ist der folgende Satz über beschränkte (d.h. in einem Kreis von endlichem Radius enthaltene) abgeschlossene Punkt-mengen:

4. *Hat eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge die Eigenschaft, dass die Symmetrieachse je zweier Punkte auch Symmetrieachse der ganzen Menge ist, so liegen ihre Punkte auf einer Kreislinie.*

Dass die Aussagen **3** und **4** für nicht endliche und nicht beschränkte Punkt-mengen unrichtig werden, ist dann trivial, wenn man kontinuierlich-unendliche Punkt-mengen in Betracht zieht. In der Tat genügt es, die ganze Ebene als Punkt-menge zu betrachten. Dagegen gibt es auch abzählbar-unendliche Punkt-mengen, für welche die Voraussetzungen von Aussage **3** und **4** erfüllt sind, ohne dass sie Teilmengen einer Kreislinie sind. In der Tat: Man wähle eine aus vier Punkten bestehende Menge A_0 , die nicht auf einer Kreislinie oder einer Geraden liegt. Nun konstruiere man auf rekursive Weise eine aufsteigende Folge endlicher Punkt-mengen A_n ($n = 0, 1, \dots$), indem man $A_n = \varphi(A_{n-1})$ ($n = 1, 2, \dots$) setzt, wobei $\varphi(A)$ die Vereinigungsmenge aller Punkt-mengen bezeichnet, die durch Spiegelung von A an sämtlichen Symmetrieachsen von Punktpaaren aus A hervorgehen. Wie man sich leicht überlegt, ist die Vereinigungsmenge $S = \cup A_n$ eine abzählbar-unendliche Punkt-menge mit der gewünschten Symmetrieeigenschaft; auf jeder durch drei Punkte von S gelegten Kreislinie liegt stets wenigstens ein vierter Punkt von S , falls die drei Punkte nicht ein reguläres Dreieck bilden, und bei geringfügiger Erweiterung der Konstruktion φ auch in diesem letztern Falle.

Wir lassen eine weitere Gruppe von Aussagen folgen, in welchen die Ganzzahligkeit oder auch die Rationalität von Distanzen eine Rolle spielt.

Die Menge der Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems ganz sind, bilden das ebene *Einheitsgitter*; ihre Punkte heissen *Gitterpunkte*.

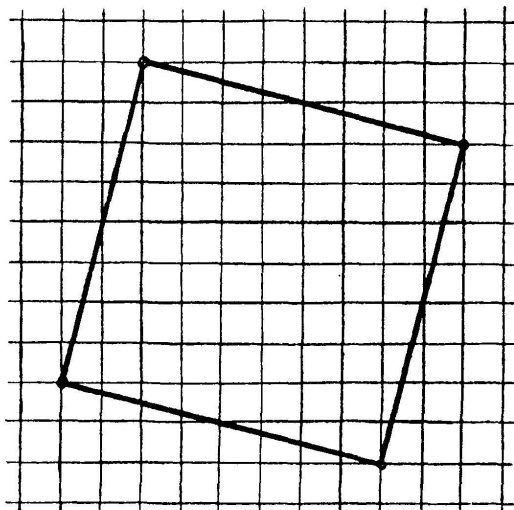


FIG. 2

5. *Bilden n Gitterpunkte ($n > 2$) ein reguläres n -Eck, so ist $n = 4$, d.h. das Quadrat ist das einzige reguläre Viereck, das im Einheitsgitter eingelagert werden kann.*

Einen originellen Beweis hierfür gab W. SCHERRER [52], für den Fall $n = 3$ vgl. auch G. PÓLYA-G. SZEGÖ [43], Bd. 2, S. 156, Aufgabe 238.

Ein Quadrat lässt sich selbstverständlich auch auf nicht-triviale Weise im Gitter einlagern; dies illustriert Fig. 2. Über die Eckenwinkel eingelagerter Rhomben gilt die Aussage:

6. *Bilden vier Gitterpunkte einen nichtquadratischen Rhombus mit dem Eckenwinkel α , so ist α/π irrational; d.h. das Quadrat ist der einzige im Einheitsgitter eingelagerte Rhombus, dessen Eckenwinkel mit dem vollen Winkel kommensurabel sind.*

Im engsten Zusammenhang hiermit steht eine Feststellung über die Winkel in pythagoreischen Dreiecken, d.h. in rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen. Hier gilt:

7. Ist α ein Basiswinkel eines pythagoreischen Dreiecks, so ist α/π irrational.

Die Aussagen 6 und 7 sind geometrische Korollarien des folgenden goniometrischen Satzes (vgl. H. HADWIGER [18]):

8. Ist $0 < \alpha < \pi/2$ und fällt $\cos \alpha$ rational aus, so ist entweder $\alpha = \pi/3$ oder α/π ist irrational.

9. Hat eine unendliche Punktmenge die Eigenschaft, dass ihre Punktepaare ganzzahlige Distanzen aufweisen, so liegt sie ganz auf einer Geraden.

Dieser Satz von P. ERDÖS [12] (vgl. auch A. DELACHET [8], S. 50 und E. TROST [57]) darf als besonders typisch für eine gewisse Kategorie von Aussagen gelten, die uns dadurch besonders ansprechen, dass aus einfachsten Voraussetzungen eine starke und unerwartete Folgerung gezogen wird.

Besonders beachtenswert ist der Umstand, dass aus 9 nicht der Schluss gezogen werden darf, es gebe eine Höchstzahl k_0 derart, dass die Behauptung immer schon dann gilt, wenn die Anzahl k der Punkte mit ausschliesslich ganzzahligen Punktdistanzen grösser ist als k_0 . Es gibt nämlich zu jedem k derartige Punktmenge, die nicht linear sind, sogar solche der Eigenschaft, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Solche Punktmenge wurden wiederholt konstruiert, u.a. von M. ALTWEGG [1], A. MÜLLER [40] und F. STEIGER [53].

Nach einer Idee von A. MÜLLER lässt sich eine auf der Einheitskreislinie dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge angeben, welche die Eigenschaft aufweist, dass jedes Punktepaar eine rationale Distanz besitzt. Es sei nämlich P_n der Punkt mit den Polarkoordinaten $\rho = 1$, $\varphi = 2n\theta$, wo θ durch $\cos \theta = 4/5$ bestimmt ist, so dass nach Aussage 8 θ/π irrational wird. Die Punkte der Folge P_n ($n = 0, 1, \dots$) sind paarweise verschieden und die erzeugte abzählbar-unendliche Punktmenge liegt auf der Einheitskreislinie. Sie liegt dort dicht und nach dem Gleichverteilungstheorem von H. WEYL sogar gleichverteilt, doch ist dies hier ohne Bedeutung. Für eine Distanz eines Punktepaares ergibt sich $d(P_n, P_m) = 2 |\sin(n - m)\theta|$, und wegen $\sin \theta = 3/5$ und $\cos \theta = 4/5$ ist dies nach goniometri-

schen Formeln eine rationale Zahl. Betrachtet man jetzt k Punkte dieser Menge, so lässt sich durch eine geeignete ähnliche Vergrößerung erzielen, dass alle auftretenden Distanzen ganzzahlig werden. Dabei liegen keine drei Punkte auf einer Geraden!

* * *

Die folgende Aussagengruppe befasst sich mit der Hüllenbildung und Separation bei ebenen Punktmengen. Zunächst einige Erklärungen: Eine Punktmenge heisst bekanntlich *konvex*, wenn sie mit zwei Punkten stets auch die ganze Verbindungsstrecke enthält. Unter der *konvexen Hülle* einer Punktmenge versteht man die kleinste konvexe Punktmenge, welche jene als Teil enthält. Mit andern Worten ist die konvexe Hülle der Durchschnitt aller konvexen Punktmengen, welche die gegebene als Teil enthalten.

10. *Ein Punkt gehört dann und nur dann zur konvexen Hülle einer Punktmenge, wenn er bereits der konvexen Hülle von drei geeigneten Punkten der Menge angehört.*

Aus dieser Aussage folgt, dass die konvexe Hülle identisch ist mit der Vereinigungsmenge aller Dreiecksbereiche, deren Ecken der gegebenen Menge zugehören.

11. *Ein Punkt ist dann und nur dann innerer Punkt der konvexen Hülle einer Punktmenge, wenn er bereits innerer Punkt der konvexen Hülle von vier geeigneten Punkten der Menge ist.*

Die Aussagen **10** und **11** sind ebene Sonderfälle nützlicher, von E. STEINITZ [54] und W. GUSTIN [17] stammender Sätze. Vgl. auch O. HANNER-H. RÅDSTRÖM [20] und C. V. ROBINSON [49].

Zwei Punktmengen wollen wir *separierbar* nennen, wenn es eine Gerade gibt, welche keine der Mengen trifft und sie voneinander trennt; beide Punktmengen liegen dann im Innern der beiden Halbebenen, die durch die Gerade erzeugt werden. Über die Separierbarkeit gilt das folgende Kriterium von P. KIRCHBERGER [29] (vgl. auch H. RADEMACHER-I. J. SCHOENBERG [44]):

12. *Zwei Punktmengen sind dann und nur dann separierbar, wenn je zwei ihrer Teilmengen, deren Vereinigung höchstens vier Punkte enthält, separierbar sind.*
13. *Jede Punktmenge, die wenigstens vier Punkte enthält, lässt sich in zwei nichtleere, punktfremde und nichtseparierbare Teilmengen zerlegen.*

Hiezu vgl. F. W. LEVI [36] und R. RADO [46].

* * *

Wir wenden uns jetzt einem Fragenkreis zu, in dessen Mittelpunkt das berühmte Helly'sche Theorem steht. Die zahlreichen Varianten, Sätze vom Helly'schen Typ, die sich in der Regel auf Eibereiche beziehen, bilden einen sehr typischen Teil der kombinatorischen Konvexgeometrie.

Unter einem *Eibereich* verstehen wir hier eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Punktmenge.

14. *Haben je drei Eibereiche einer (endlichen oder unendlichen) Menge von Eibereichen einen Punkt gemeinsam, so haben alle Eibereiche der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Dies ist der ebene Sonderfall des bekannten Helly'schen Satzes. Vgl. E. HELLY [21], J. RADON [48], D. KÖNIG [35], u.a.m. Wie man unmittelbar mit einfachsten Beispielen einsieht, kann die Anzahl drei nicht durch zwei ersetzt werden. Dies ist aber bei starken Voraussetzungen über die Gestalt der Eibereiche möglich. So gilt die folgende Variante:

15. *Haben je zwei Rechtecke einer Menge parallel orientierter Rechtecke einen Punkt gemeinsam, so haben alle Rechtecke der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Dagegen gilt: Ein Eibereich, der nicht ein Parallelogramm ist, lässt sich in drei Lagen verschieben, so dass je zwei der translationsgleichen Eibereiche einen Punkt gemeinsam haben, nicht aber alle drei. Für Parallelogramme ist dies nicht möglich. Die Gültigkeit einer Aussage der Art **15** mit leichter Modifikation

ist demnach für Parallelogramme charakteristisch. Vgl. hierzu auch B. SZ.-NAGY [41].

Ein Korollar von **15** ist der Hellysche Satz für die Gerade:

- 16.** *Haben in einer Geraden je zwei Strecken einer Streckenmenge einen Punkt gemeinsam, so haben alle Strecken der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Es ist naheliegend und für viele Anwendungen nützlich, Sätze vom Hellyschen Typ auch für die Kreislinie aufzustellen; an Stelle der Eibereiche treten hier abgeschlossene Kreisbogen, die selbstverständlich alle demselben Trägerkreis angehören sollen.

- 17.** *Hat eine Menge von Kreisbogen, die alle kleiner als Halbkreise sind, die Eigenschaft, dass je drei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so haben alle Bogen der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Die Bedingung über die Grösse der Bogen kann hier nicht gemildert werden, indem die Aussage bereits für Halbkreise falsch wird. In der Tat haben von den vier Halbkreisen, die durch zwei verschiedene Paare antipodischer Punkte der Kreislinie entstehen, je drei, aber nicht alle vier einen Punkt gemeinsam. Auch kann die Anzahl drei nicht durch zwei ersetzt werden. Von den drei Drittelskreisen, die die ganze Kreislinie überdecken, haben je zwei, aber nicht alle drei einen Punkt gemeinsam. Dagegen gilt:

- 18.** *Hat eine Menge von Kreisbogen, die alle kleiner als Drittelskreise sind, die Eigenschaft, dass je zwei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so haben alle Bogen der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Lassen wir jede Voraussetzung über die Grösse der Bogen fallen, so gilt noch:

- 19.** *Hat eine Menge von Kreisbogen die Eigenschaft, dass je zwei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so gibt es ein antipodisches Punktepaar so, dass jeder Bogen der Menge wenigstens einen Punkt des Paares enthält.*

Es gibt mit andern Worten eine Durchmessergerade des Kreises, die alle Kreisbogen trifft. Sätze dieser Art wurden u.a. von C. V. ROBINSON [49] und A. HORN-F. A. VALENTINE [25] aufgestellt. Hübsche Anwendungen, wie wir solche auch weiter unten angeben werden, hat P. VINCENSINI [59] entdeckt.

- 20.** *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er im Durchschnitt von je drei Bereichen einer Eibereichsmenge enthalten ist, dann auch so, dass er im Durchschnitt aller Eibereiche der Menge liegt.*
- 21.** *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er je drei Bereiche einer Eibereichsmenge trifft, dann auch so, dass er alle Bereiche der Menge trifft.*
- 22.** *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er je drei Bereiche einer Eibereichsmenge enthält, dann auch so, dass er alle Bereiche der Menge enthält.*

Dies sind ebene Sonderfälle allgemeinerer, sich auf höhere Dimensionen beziehender Varianten des Helly'schen Satzes, die von P. VINCENSINI [58] und V. L. KLEE jr. [32] formuliert wurden. Wesentlich für die Gültigkeit dieser Aussagen ist die Bedingung, dass die Eibereiche in der Ebene nur verschoben und nicht etwa auch gedreht werden dürfen. Wird an Stelle der Translationsgruppe die Bewegungsgruppe gesetzt, so sind alle drei Aussagen falsch.

Wir belegen dies ausführlicher durch ein Beispiel zu Aussage **21**. Man betrachte die Menge der n Kreise ($n > 2$) deren Mittelpunkte durch die Polarkoordinaten $\rho = 1$ und $\varphi = 2k\pi/n$ ($k = 1, \dots, n$) gegeben sind, und deren Radius $r = \cos^2(\pi/n)$ bzw. $r = \cos^2(\pi/n) + \cos^2(\pi/2n) - 1$ ist, falls n gerade bzw. ungerade gewählt wurde. Wie man jetzt bestätigen kann, lässt sich eine Strecke (uneigentlicher Eibereich) der Länge 2 stets so legen, dass je $n - 1$ Kreisscheiben der Kreismenge, nicht aber so, dass alle n Kreisscheiben getroffen werden. Die Strecke muss hiezu jedoch passend gedreht und verschoben werden. Fig. 3 illustriert dies im Falle $n = 8$.

- 23.** *Haben je zwei Eibereiche einer Eibereichmenge einen Punkt gemeinsam, so lässt sich durch jeden Punkt der Ebene eine Gerade legen, welche alle Eibereiche der Menge trifft.*
- 24.** *Haben je zwei Eibereiche einer Eibereichmenge einen Punkt gemeinsam, so lässt sich zu jeder Geraden der Ebene eine parallele Gerade legen, welche alle Eibereiche der Menge trifft.*

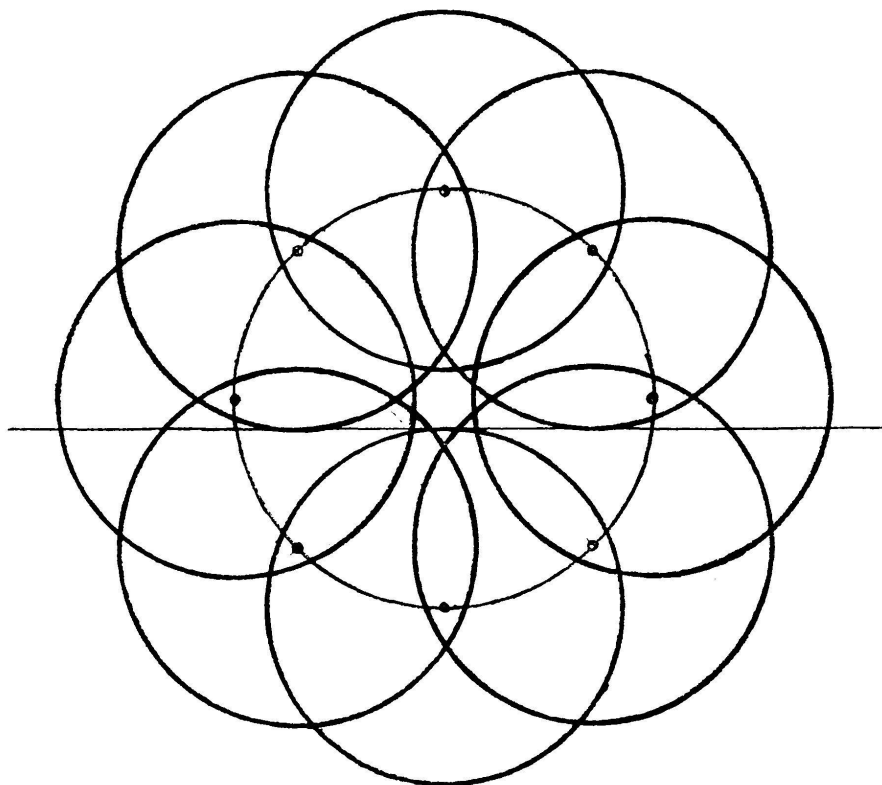


FIG. 3

Auch diese beiden Aussagen **23** und **24** sind ebene Sonderfälle allgemeinerer Sätze von A. HORN [24] und V. L. KLEE jr. [30]; sie beantworten die Frage, was sich an Stelle der Behauptung des Helly'schen Satzes noch aussagen lässt, wenn die Anzahl drei durch zwei ersetzt wird.

Man kann sich fragen, ob sich im Helly'schen Satz Punkt durch Gerade in dem Sinn ersetzen lässt, dass eine Aussage der folgenden Form richtig ist: Werden je h Bereiche einer Eibereichmenge von einer Geraden getroffen, so gibt es eine Gerade, welche alle Bereiche der Menge trifft. Existiert eine solche Helly'sche Stichzahl?

Die Antwort ist verneinend! Bereits L. A. SANTALÓ [50] hat bemerkt, dass zu jedem natürlichen $n > 2$ eine Menge von n

Eibereichen so konstruiert werden kann, dass je $n - 1$ Bereiche der Menge eine gemeinsame Sekante, nicht aber alle n eine solche aufweisen. Dasselbe belegt auch unser Beispiel, das wir an Aussage **21** angeschlossen haben. Sätze der erwähnten Art, lassen sich nur aufstellen, wenn über Gestalt und Lage der Eibereiche zusätzliche Voraussetzungen getroffen werden. So hat L. A. SANTALÓ [50] bewiesen, dass alle Rechtecke einer Menge parallel orientierter Rechtecke von einer Geraden getroffen

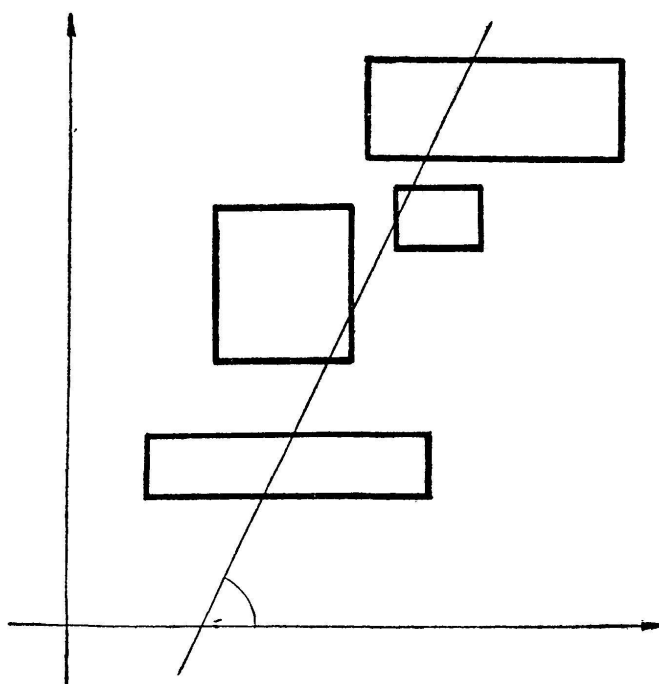


FIG. 4

werden, falls dies für je sechs Rechtecke der Menge zutrifft. Wir fügen hier die folgende Aussage an:

- 25.** *Werden je drei Rechtecke einer Menge parallel orientierter Rechtecke von einer ansteigenden Geraden getroffen, so gibt es eine ansteigende Gerade, welche alle Rechtecke der Menge trifft.*

Wir nehmen hierbei an, dass die Rechtecke parallel zu einem orthogonalen Koordinatensystem orientiert sind; eine Gerade ist ansteigend, wenn ihr Steigungsmass nichtnegativ ist. Vgl. hierzu Fig. 4.

Das oben dargelegte Beispiel (Fig. 3), das die Nichtexistenz einer Hellyschen Stichzahl h im allgemeinsten Fall beweist,

zeigt die auffallende Sachlage, dass sich die Eibereiche (Kreisscheiben) gegenseitig teilweise überdecken. Hier ist es naheliegend die Frage aufzuwerfen, ob sich eine Hellysche Stichzahl dann angeben lässt, wenn vorausgesetzt wird, dass die Eibereiche paarweise fremd sind, d.h. keine Punkte gemeinsam haben. Die Antwort auf diese auch von V. L. KLEE jr. [33] aufgeworfene Frage ist wieder verneinend.

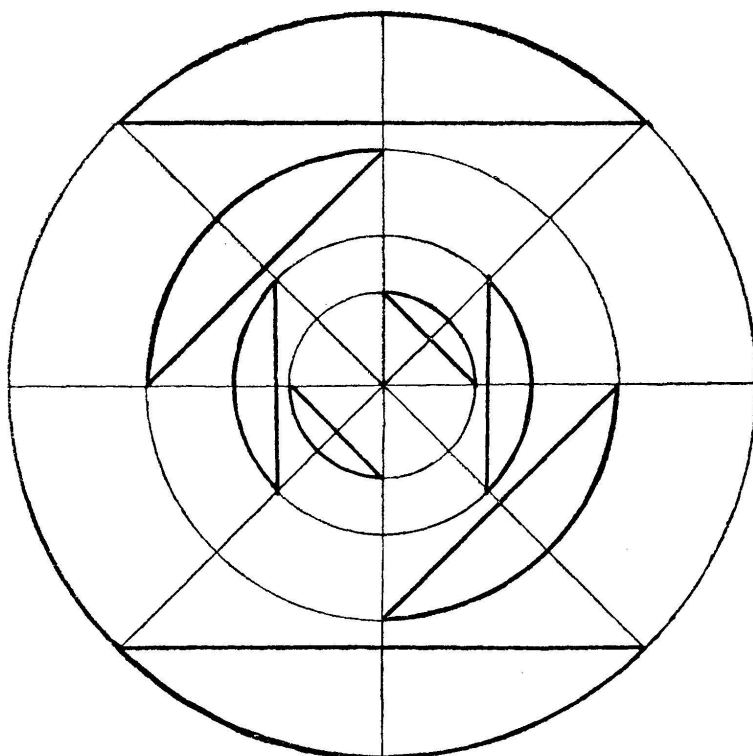


FIG. 5

Wir konstruieren ein Beispiel — eine Kreissegmentrosette — um diese Behauptung zu belegen. Es sei $n > 1$; S_i und S_i^* ($i = 1, \dots, 2n$) sollen insgesamt $4n$ Kreissegmente der $2n$ konzentrischen Kreise K_i ($i = 1, \dots, 2n$) mit Zentrum Z und den Radien R_i ($i = 1, \dots, 2n$) bezeichnen, wobei sich S_i und S_i^* bezüglich Z zentralsymmetrisch entsprechen sollen. Für die Radien sei zunächst nur $0 < R_i \leq R_{i+1}$ festgelegt. Die Segmente der Kreise K_i sollen nachfolgend durch die Polarkoordinaten der Punkte ihrer Kreisbogen charakterisiert werden:

$$S_i: \rho = R_i; (i-n+1) (\pi/2n) \leq \varphi \leq (i+n-1) (\pi/2n)$$

$$S_i^*: \rho = R_i; (i+n+1) (\pi/2n) \leq \varphi \leq (i+3n-1) (\pi/2n).$$

Auch im Hinblick auf weitere Verwendungsmöglichkeiten wollen wir einige Eigenschaften unserer Kreissegmentrosette festlegen:

- A. Die Radien R_i können so gewählt werden, dass die $4n$ Segmente paarweise fremd sind; sie müssen nur ausreichend stark anwachsen. Fig. 5 zeigt eine Rosette dieser Art für $n = 2$.
- B. Es gibt keine Gerade, welche alle $4n$ Segmente trifft. Betrachten wir zunächst eine Gerade durch Z . Wegen der $4n$ -zähligen Drehsymmetrie in der Koordinate φ genügt es anzunehmen, dass der Winkel der Geraden im Intervall $0 \leq \varphi < \pi/2n$ liegt. Die Segmente S_n und S_n^* werden von einer solchen Durchmessergeraden nicht getroffen. Eine zu ihr parallele Gerade trifft aber entweder S_n oder S_n^* nicht.
- C. Es gibt keinen Punkt, der allen $4n$ Segmenten angehört. Dies ist eine triviale Folgerung aus B.
- D. Im Falle $R_i = R$ ($i = 1, \dots, 2n$) haben je $2n - 1$ Segmentpaare ein antipodisches Punktepaar gemeinsam. Es genügt, alle Paare ausser S_n und S_n^* zu betrachten. Die beiden Punkte $\rho = R, \varphi = 0$ und $\rho = R, \varphi = \pi$ gehören ihnen an.
- E. Im Falle $R_i = R$ ($i = 1, \dots, 2n$) gibt es kein antipodisches Punktepaar, das allen Segmentpaaren angehört. Dies ist eine triviale Folgerung von B.
- F. Je $2n - 1$ Segmente werden von einer durch Z laufenden Geraden getroffen. Dies ist ein Korollar zu D; hier ist aber die Bedingung über die Gleichheit der Radien unerheblich, so dass die vorliegende Behauptung auch dann gilt, wenn die Segmente paarweise fremd sind.
- G. Im Falle $R_i = R$ ($i = 1, \dots, 2n$) gibt es zu jeder Auswahl von je $2n - 1$ Segmenten zwei Punkte so, dass jedes Segment der Auswahl wenigstens einen der beiden Punkte enthält. Dies ist ein Korollar zu D.
- H. Es gibt nicht zwei Punkte so, dass jedes der $4n$ Segmente wenigstens einen der beiden Punkte enthält. Dies ist ein Korollar zu B.

Mit den Eigenschaften A, B, und F ergibt sich nun in der Tat die Verneinung der oben erörterten Frage. Die gleiche Rosette ermöglicht es weiter, auch die Nichtexistenz weiterer Sätze vom Hellyschen Typ, welche gelegentlich erwogen worden sind, nachzuweisen.

So teilte im Anschluss an eine Arbeit von L. A. SANTALÓ [51], Th. MOTZKIN ein Gegenbeispiel zu folgendem Satz mit: Haben

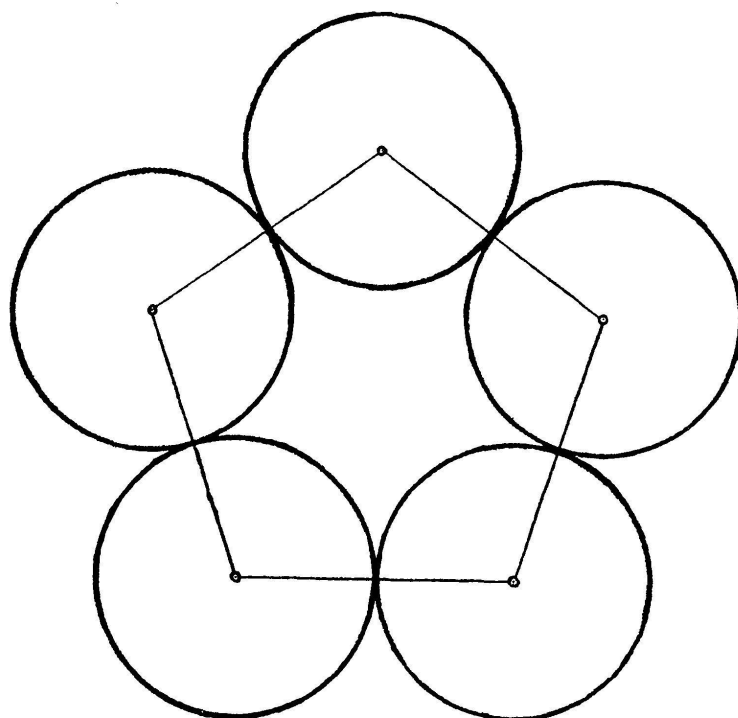


FIG. 6

je h Eibereichpaare einer Menge von Eibereichpaaren einen Punkt gemeinsam, so haben alle Eibereichpaare der Menge einen Punkt gemeinsam. Auch unsere Kreissegmentrosette widerlegt dies; im Falle gleicher Radien zeigen dies nämlich die Eigenschaften D und E.

V. L. KLEE jr. [31] hat einmal die Frage aufgeworfen, ob es eine Hellysche Stichzahl h so gibt, dass der folgende Satz richtig ist: Gibt es zu je h Eibereichen einer Eibereichmenge zwei Punkte so, dass jeder Bereich der Auswahl wenigstens einen der Punkte enthält, so trifft dasselbe für alle Bereiche der Menge zu. — Wieder existiert kein derartiger Satz; unsere Rosette beweist auch das, und zwar sind es im Falle gleicher Radien die Eigenschaften G und H, die den Nachweis liefern.

Nicht entschieden ist die Frage, ob es im Falle von Mengen paarweise fremder und kongruenter (oder translationsgleicher) Eibereiche eine Hellysche Stichzahl h so gibt, dass alle Eibereiche von einer Geraden getroffen werden, falls dies für je h Eibereiche zutrifft. Es ist naheliegend, die Frage zunächst für Mengen paarweise fremder kongruenter Kreise zu untersuchen. Obwohl die Existenz einer solchen Zahl h hier recht plausibel gemacht werden kann, konnte keine Abklärung der Frage erzielt

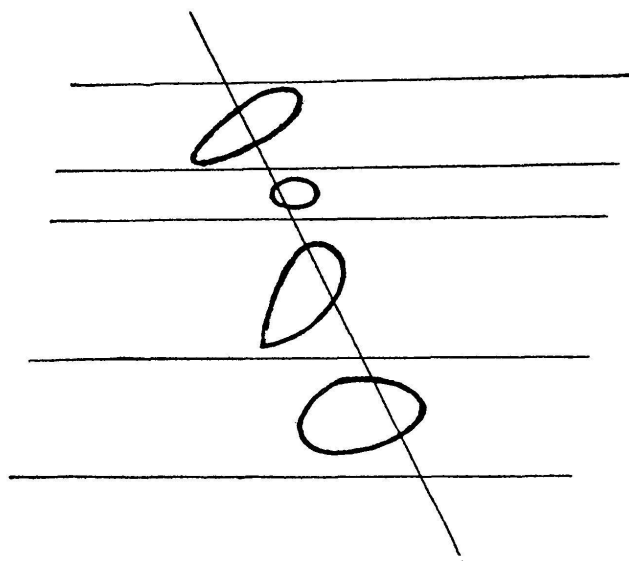


FIG. 7

werden. Jedenfalls müsste $h \geq 5$ sein, wie die einfache in Fig. 6 dargestellte Menge von fünf regelmässig angeordneten Kreisen zeigt.

Dagegen gilt folgende Aussage über ähnliche, gleichliegende Eibereiche:

- 26.** *Werden je vier Bereiche einer Menge homothetischer Eibereiche von einer Geraden getroffen, so gibt es vier (paarweise parallele bzw. orthogonale) Geraden derart, dass jeder Eibereich der Menge von mindestens einer der Geraden getroffen wird.*

Die vorliegende Gruppe der Aussagen vom Hellyschen Typ wollen wir noch mit einer von P. VINCENSINI [59] entdeckten Variante abschliessen. Ein System von Eibereichen wollen wir *total separierbar* nennen, wenn es eine Richtung so gibt, dass jede Gerade dieser Richtung höchstens einen Eibereich des

Systems trifft. Es lässt sich dann in der Ebene ein System von paarweise fremden Parallelstreifen bilden, so dass jeder Streifen genau einen Eibereich des Systems enthält. Vgl. hierzu Fig. 7. Es gilt:

- 27.** *Werden je drei Eibereiche eines total separierbaren Eibereichsystems von einer geeigneten Geraden getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Bereiche des Systems trifft.*

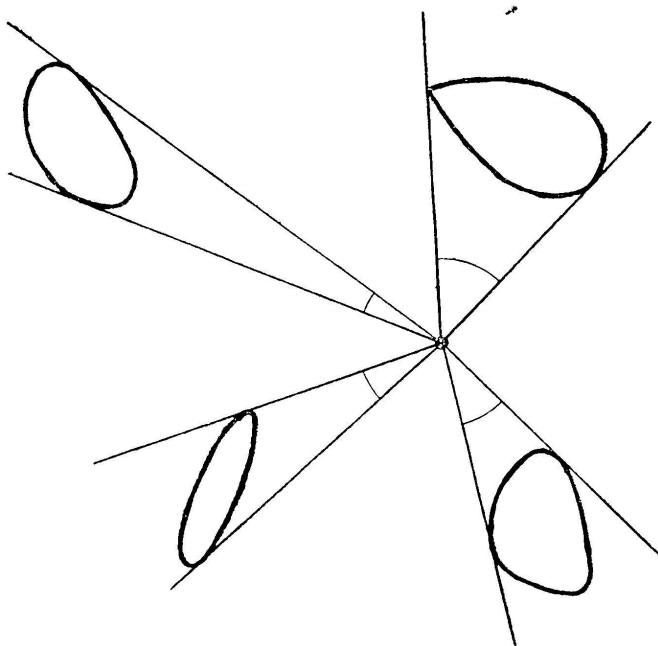


FIG. 8

Die von P. VINCENSINI angegebene Stichzahl war $h = 4$. Anschliessend hat V. L. KLEE jr. [34] bemerkt, dass sich der Satz verschärfen lässt, indem man die Stichzahl auf $h = 3$ reduzieren kann.

Ein Korollar zu **27** ist der Satz von L. A. SANTALÓ [50] (vgl. auch H. RADEMACHER-I. J. SCHOENBERG [44]), wonach alle Strecken einer Menge paralleler Strecken eine gemeinsame Transversale aufweisen, falls dies bereits für je drei Strecken der Menge zutrifft.

Im Hinblick auf Aussage **27** interessiert die Frage, welche weiteren Eigenschaften eines Eibereichsystems es erlauben, auf seine totale Separierbarkeit zu schliessen. In diesem Zusammenhang erwähnen wir, dass dies zum Beispiel dann möglich ist, wenn die Eibereiche in der Ebene hinreichend dünn verstreut

sind; dies lässt sich durch die Grösse der Gesichtswinkel beschreiben. Vgl. hierzu Fig. 8. Es gilt:

28. Sind die Eibereiche eines Systems so dünn verstreut, dass von keinem Blickpunkt der Ebene aus mehr als ein Bereich des Systems unter einem Gesichtswinkel von $\pi/3$ oder grösser erscheint, so ist das System total separierbar.

* * *

Es folgt nun zum Schluss eine kleine Gruppe von Aussagen, die lose mit dem bekannten Satz von H. W. E. JUNG [26] über die Grösse des Hüllkreises einer Punktmenge von gegebenem Durchmesser zusammenhängen. Zunächst sollen einige Erklärungen vorausgeschickt werden.

Eine Punktmenge nennt man bekanntlich *beschränkt*, wenn sie durch einen Kreisbereich überdeckt werden kann. Im Zusammenhang mit den unten folgenden Feststellungen wollen wir eine Geradenmenge *beschränkt* nennen, wenn sie keine parallele Geraden enthält und wenn die Menge der Schnittpunkte, die durch ihre Geraden erzeugt werden, beschränkt ist.

Der *Deckradius* einer beschränkten Punktmenge ist der Radius des kleinsten (abgeschlossenen) Kreisbereichs, der alle Punkte der Menge enthält. Entsprechend definieren wir: Der *Treffradius* einer beschränkten Geradenmenge ist der Radius eines kleinsten (abgeschlossenen) Kreisbereichs, der alle Geraden der Menge trifft.

Der *Durchmesser* einer beschränkten Punktmenge ist die obere Grenze der Menge der Distanzen, die durch Punktepaare der Menge gebildet werden. Entsprechend definieren wir: Der *Durchmesser* einer beschränkten Geradenmenge ist der Durchmesser der Schnittpunktmenge.

29. Lassen sich je drei Punkte einer beschränkten Punktmenge durch einen Kreisbereich vom Radius R überdecken, so lässt sich die ganze Menge durch einen solchen Kreisbereich überdecken.
30. Lassen sich je drei Geraden einer beschränkten Geradenmenge durch einen Kreisbereich vom Radius r treffen, so gibt es

einen solchen Kreisbereich, der alle Geraden der Menge trifft.

Es handelt sich hier um Spezialfälle von Aussage **21**.

31. Für den Deckradius einer Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ gilt $R \leq 1/\sqrt{3}$.

Dies ist der ebene Spezialfall des Jungschen Satzes. Vgl. dazu die ausführliche Darstellung bei H. RADEMACHER-O. TOEPLITZ [45].

32. Für den Treffradius r einer Geradenmenge vom Durchmesser $D = 1$ gilt $r \leq 1/2\sqrt{3}$.

Diese Aussage bildet ein duales Gegenstück zum Jungschen Satz.

33. Eine Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ lässt sich durch einen regulären Dreiecksbereich der Seitenlänge $s = \sqrt{3}$ überdecken.

34. Eine Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ lässt sich durch einen regulären Sechseckbereich der Seitenlänge $s = 1/\sqrt{3}$ überdecken.

Einen universellen Bereich, der die Eigenschaft aufweist, dass jede Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ damit zugedeckt werden kann, nennt man einen (normierten) *Deckel*. In diesem Sinn ist der Kreisbereich vom Radius $R = 1/\sqrt{3}$ ein Deckel (Jungscher Deckel). Nach den Aussagen **33** und **34** ist der dem Kreis mit Durchmesser $D = 1$ umschriebene reguläre n -Eckbereich ein Deckel, falls $n = 3$ oder $n = 6$ ist. Aussage **33** ist der ebene Sonderfall eines von D. GALE [15] für beliebige Dimensionen aufgestellten Gegenstücks zum Jungschen Satz. Aussage **34** stammt von J. PÁL [42].

35. Jede Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ lässt sich durch drei Punktmenge überdecken, deren Durchmesser nicht grösser als $\sqrt{3}/2$ ausfallen.

Dies ist eine von D. GALE [15] angegebene Verschärfung des von K. BORSUK [5] stammenden Satzes, wonach eine ebene

Punktmenge stets in drei Teile von kleinerem Durchmesser zerlegt werden kann. Eine von K. BORSUK aufgestellte Vermutung bezieht sich auf Punktfolgen des k -dimensionalen Raumes und sieht eine Zerlegung in $k + 1$ Teilmengen mit kleineren Durchmessern vor; sie ist zur Zeit noch unbewiesen für $k > 3$; für $k = 3$ gab neuerdings H. G. EGGLESTON [10] einen Beweis.

Der oben erwähnte Satz von K. BORSUK (ohne die Verschärfung von D. GALE) ist — wenigstens für endliche Punktfolgen — auch eine Folgerung einer Aussage über die Anzahl der Punktepaare, welche den Durchmesser realisieren. Es gilt:

- 36.** *In einer endlichen Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ gibt es höchstens n verschiedene Punktepaare der Distanz 1, wenn n die Anzahl der Punkte der Menge bezeichnet.*

Ein kurzer Beweis findet sich bei P. ERDÖS [13], ferner vgl. man eine Aufgabe von H. HOPF-E. PANNWITZ [23].

Die engen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Satzgruppen soll schliesslich das folgende Korollar zu **34**, als Aussage vom Helly'schen Typ formuliert, vor Augen führen:

- 37.** *Haben je zwei Kreisscheiben einer Menge kongruenter Kreise vom Radius $R = 1$ einen Punkt gemeinsam, so gibt es drei Punkte vom gegenseitigen Abstand $d = 1$ derart, dass jede Kreisscheibe der Menge mindestens einen von ihnen enthält.*

Ähnliche, teils noch unbewiesene Aussagen finden sich bei L. FEJES TÓTH [14], S. 97.

II. TEIL

Die vorstehend formulierten Aussagen sollen hier unter Benutzung der oben zitierten Quellen durch kurze Beweise belegt werden. Dabei erzwingen Raumgründe, dass oft nur der Gedankengang knapp angedeutet werden kann. Die Argumentation stützt sich vorwiegend auf elementare Sachverhalte, hie und da ergänzt durch einfache punktmengengeometrische Überlegungen.

1. Lügen die Punkte P_1, \dots, P_n nicht auf einer Geraden und gilt für sie doch die Voraussetzung des Satzes, so ergibt sich ein Widerspruch wie folgt: Durch eine projektive Abbildung werde genau einer der Punkte, etwa P_1 , in einen Fernpunkt transformiert. Das System der Punkte und ihrer Verbindungsgeraden geht dabei über in eine Schar von Parallelen (durch P_1), von denen jede im Endlichen zwei der Punkte enthält, und in eine endliche Mengen von Transversalen, von denen jede mindestens drei der Punkte enthält. G sei die Transversale, die mit den Parallelen den kleinsten Winkel einschliesst und P_i, P_j, P_k in dieser Anordnung die drei auf G liegenden Mengenpunkte. Die zur Parallelschar gehörige Verbindungsgerade von P_1 und P_j enthält noch einen Punkt P_m der Menge. Nun bildet aber entweder die Verbindungsgerade durch P_i und P_m oder jene durch P_k und P_m mit den Parallelen einen kleinern Winkel als G , im Widerspruch zur Konstruktion.

2 ist zu **1** dual.

3 erscheint als Korollar zu **1**, wenn man durch Inversion an einem Kreis mit einem Mengenpunkt als Zentrum alle Kreise durch diesen Punkt in Geraden übergehen lässt, die die Voraussetzungen von **1** erfüllen.

4. Der kleinste Deckkreis (d.h. der kleinste abgeschlossene Kreisbereich, der alle Punkte der Menge bedeckt) enthält auf seiner Peripherie Mengenpunkte, die keinen Halbkreisbogen frei lassen, u.a. einen Punkt P . Weitere Mengenpunkte, z.B. ein Punkt Q , können nicht im Innern liegen, da Spiegelung an der Symmetrieachse von P und Q zeigt, dass dann auch ausserhalb des Deckkreises Mengenpunkte wären. — Ist die Zahl der Mengenpunkte endlich und > 2 , so sei φ der kleinste Winkel zwischen je zwei verschiedenen Symmetrieachsen der Menge. Spiegelung an diesen beiden Achsen kommt einer Drehung um 2φ gleich, also ist die Menge drehsymmetrisch bezüglich des Winkels 2φ . Die n -Ecke mit dem Zentriwinkel $\varphi = 2\pi/n$ erweisen sich jetzt als die einzigen Mengen mit diesen Dreh- und Spiegelsymmetrieeigenschaften, so dass jede endliche Menge mit den

in 4 genannten Eigenschaften die Eckpunktmenge eines regulären Vielecks ist.

5. Gibt es dem Gitter eingelagerte reguläre n -Ecke (n fest), dann auch solche mit kleinster Seitenlänge, weil hierfür nur die Werte $\sqrt{p^2+q^2}$ (p, q ganz) in Frage kommen. Diese Existenz vorausgesetzt, seien P_1, P_2, \dots, P_n die Ecken eines kleinsten regulären Gitter- n -ecks in ihrer natürlichen Reihenfolge. Trägt man von diesen Gitterpunkten aus bzgl. die Gittervektoren $\overrightarrow{P_2 P_3}, \overrightarrow{P_3 P_4}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_2}$ ab, so führen ihre Endpunkte wieder auf Gitterpunkte. Für $n = 5$ und $n > 7$ bilden diese ein kleineres reguläres Gitter- n -eck, im Widerspruch zur Minimalbedingung. — Für $n = 3$ sieht man die Unmöglichkeit eines dem Gitter eingelagerten regulären n -Ecks wie folgt ein: Die Fläche $s^2 \sqrt{3}/4$ wäre wegen der Ganzzahligkeit von s^2 eine irrationale Zahl, andererseits ergibt sich, etwa nach Determinantenformeln berechnet, ein rationaler Wert. Gleiches gilt von regulären Sechsecken mit der Fläche $3s^2 \sqrt{3}/2$.

6. Die Fläche $s^2 \sin \alpha$ eines Gitterrhombus ist, nach Determinantenformeln berechnet, ganzzahlig. Nach **8** ist daher $\alpha = \pi/6$ oder $\alpha = \pi/2$. Die erste Möglichkeit entfällt, da bei einer Drehung um $\pi/2$ um eine Ecke der Rhombus wieder in einen Gitterrhombus überginge (jeder Gitterpunkt geht dabei in einen Gitterpunkt über!); dabei wäre ein reguläres Gitterdreieck zu erkennen, im Widerspruch zu **5**.

7. Einfache Folgerung von **8**.

8. Man beachte, dass die Argumentation des Beweises von **5** für $n = 5$ und $n \geq 7$ auch in jedem Rechteckgitter möglich ist. Aus dieser schärfern Aussage, dass sich in einem Rechteckgitter von den regulären Vielecken nur Dreiecke, Vierecke und Sechsecke einlagern lassen, ergibt sich **8**. In der Tat: Sei $\alpha = (m/n)2\pi$ und der Bruch m/n nicht kürzbar. Ist $\cos \alpha$ rational, dann ist nach goniometrischen Formeln $\cos v\alpha = a_v, \sin v\alpha = b_v \sin \alpha$ mit rationalen a_v, b_v ($v = 1, 2, \dots, n$). N sei der gemeinsame Nenner der $2n$ Werte a_v, b_v . Erzeugt ein Rechteck der Länge $1/N$ und der Breite $(\sin \alpha)/N$ ein Rechteckgitter, so

fallen daher von der Einheitskreislinie um einen Gitterpunkt alle Punkte mit den Phasen $\nu\alpha$ ($\nu = 1, \dots, n$) auf Gitterpunkte. Andererseits bilden diese Punkte wegen $\alpha = (m/n)2\pi$ ein reguläres n -Eck. Wie eingangs erwähnt, folgt daraus, dass n einen der Werte 1, 2, 3, 4, 6 besitzt. Zusammen mit der Nebenbedingung $0 < \alpha < \pi/2$ ergibt sich $\alpha = \pi/3$.

9. Ist eine Punktmenge mit lauter ganzzahligen Punktdistanzen gegeben, in der es drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C gibt, und bezeichnet k die grössere der Distanzen $d(AB)$, $d(BC)$, so gibt es höchstens $4(k+1)^2$, also endlich viele Punkte P so, dass $d(PA) - d(PB)$ und $d(PB) - d(PC)$ ganzzahlig ausfallen. Es ist nämlich $|d(PA) - d(PB)| < d(AB)$ und kann somit nur einen der Werte 0, 1, ..., k annehmen, so dass P auf einer von $k+1$ Hyperbeln liegt. Ebenso liegt P auf einer von $k+1$ Hyperbeln, die durch B und C bestimmt werden. All diese (verschiedenen) Hyperbeln schneiden sich in höchstens $4(k+1)^2$ Punkten.

10. Die Aussage „dann“ ist trivial. Die Aussage „nur dann“ ist klar für endliche Punktfolgen, da deren konvexe Hülle ein konvexes Polygon ist, dessen Ecken zur Menge gehören; wird dieses von einer Ecke aus trianguliert, so liegt jeder Punkt in einem der Teildreiecke, also in der konvexen Hülle von drei Punkten der Menge. Es bleibt für unendliche Punktfolgen M zu zeigen, dass die Menge N aller Punkte, die schon in der konvexen Hülle endlich vieler Punkte aus M enthalten sind, mindestens so umfassend ist wie die konvexe Hülle \overline{M} von M. In der Tat: N enthält, wie man sich sofort zurechtlegt, mit zwei Punkten auch jeden Punkt der Verbindungsstrecke, ferner enthält N jeden Punkt von M. Da \overline{M} als kleinste Menge mit diesen Eigenschaften definiert wurde, ist der Beweis abgeschlossen.

11. Nicht trivial ist einzig die Aussage „nur dann“. Ein innerer Punkt P der konvexen Hülle \overline{M} von M ist auch innerer Punkt eines Dreiecks mit Ecken in \overline{M} . Da jede dieser Ecken nach **10** in der konvexen Hülle von drei Punkten aus M liegt,

ist das ganze Dreieck in der konvexen Hülle von endlich vielen Punkten aus M enthalten. Wird dieses konvexe Vieleck mit Ecken aus M von einer Ecke aus trianguliert, so ist P in der Vereinigung zweier aneinandergrenzender Dreiecke als innerer Punkt enthalten, also in der konvexen Hülle von vier Punkten aus M .

12. Die Aussage „nur dann“ ist trivial. Es bleibt zu zeigen, dass zu zwei nicht separierbaren Mengen M und N zwei ebensolche Teilmengen M' und N' mit gesamthaft höchstens vier Punkten angegeben werden können. Nun sind M und N genau dann nicht separierbar, wenn ihre konvexen Hüllen \overline{M} und \overline{N} Punkte gemeinsam haben. Zu einem solchen gemeinsamen Punkt gibt es nach **10** zwei je dreipunktige Mengen M'' und N'' , deren konvexe Hüllen $\overline{M''}$ und $\overline{N''}$ diesen Punkt gemeinsam haben. Nun ist entweder eine dieser konvexen Hüllen in der andern enthalten, etwa $\overline{M''}$ in $\overline{N''}$, oder die Dreiecke $\overline{M''}$ und $\overline{N''}$ besitzen sich schneidende Randstrecken. Im ersten Falle bestehe M' aus einem der Punkte von M'' , $N' = N''$; im zweiten Falle bestehe M' und N' je aus den beiden Endpunkten des sich schneidenden Streckenpaares. In beiden Fällen sind M' und N' nicht separierbar, weil $\overline{M'}$ und $\overline{N'}$ Punkte gemeinsam haben.

13. Man wähle vier Punkte der gegebenen Menge M . Bildet ihre konvexe Hülle nicht ein (nichtentartetes) Viereck, so ist ein Punkt N in der konvexen Hülle der übrigen drei Punkte, umso mehr in der konvexen Hülle von $M - N$ enthalten, und die beiden fremden Mengen N und $M - N$ sind nicht separierbar. Bildet hingegen die konvexe Hülle ein Viereck, so bestehe N aus den Endpunkten einer Diagonale. N und $M - N$ bilden wieder fremde, nichtseparierbare Teilmengen von M .

14. Für endlich viele Eibereiche folgt der Hellysche Satz durch vollständige Induktion aus folgendem Hilfssatz: *Es sei $k \geq 4$. Haben je $k - 1$ von k Eibereichen Punkte gemeinsam, so haben alle k Eibereiche Punkte gemeinsam.* Beweis: C_1, \dots, C_k seien die k Eibereiche und P_i bezeichne einen Punkt, der in allen ausser eventuell in C_i enthalten ist. Nach **13** lassen sich die Punkte P_i

($i = 1, \dots, k$) in zwei fremde Gruppen $M' = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_m}\}$ und $M'' = \{P_{j_1}, \dots, P_{j_n}\}$ aufteilen, so dass deren konvexe Hüllen M' und M'' einen Punkt P gemeinsam haben. Nun gehört aber jeder Punkt von M' und damit wegen der Konvexität der C_i auch $\overline{M'}$ zu allen Eibereichen ausser eventuell C_{i_1}, \dots, C_{i_m} , ebenso $\overline{M''}$ zu allen ausser eventuell C_{j_1}, \dots, C_{j_n} . Der Punkt P gehört zu $\overline{M'}$ und $\overline{M''}$, somit zu allen Eibereichen ohne Ausnahme.

Wäre in einem unendlichen Eibereichsystem kein Punkt allen Bereichen gemeinsam, so könnte man zu jedem Punkt des Bereichs C_1 des Systems einen weiteren Bereich C_i des Systems angeben, der diesen Punkt und damit auch eine ganze Kreisumgebung nicht trifft; C_i und diese Umgebung seien einander zugeordnet. Nach dem Theorem von Heine-Borel genügen endlich viele dieser Kreisumgebungen, um C_1 zu überdecken. Die ihnen zugeordneten endlich vielen Eibereiche C_i und C_1 haben nach Konstruktion keinen Punkt gemeinsam, im Widerspruch zum obigen Ergebnis, dass endlich viele Eibereiche des Systems einen Punkt gemeinsam haben, sobald die Voraussetzungen von **14** erfüllt sind.

15 ergibt sich aus **14**, wenn man einsieht, dass drei Rechtecke R_1, R_2, R_3 immer dann Punkte gemeinsam haben, wenn dies schon für je zwei zutrifft. In der Tat: Bezeichnet $P_i(x_i, y_i)$ in einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den Rechtecken liegen, einen Punkt, der in allen drei Rechtecken ausser eventuell in R_i ($i = 1, 2, 3$) enthalten ist, also in R_j und R_k , so bemerkt man, dass mit P_i und P_j nicht nur die ganze Verbindungsstrecke in R_k enthalten ist, sondern das ganze achsenparallele Rechteck über ihr, also alle $P(x, y)$, für die x im Intervall (x_i, x_j) und y in (y_i, y_j) liegt. Wählt man die Numerierung so, dass $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ und $y_1 \leq y_2 \leq y_3$ gilt, so erfüllt $P(x_2, y_2)$ diese Bedingungen für jedes der drei Rechtecke, so dass er allen angehört.

16 ist Korollar zu **15**, weil Rechtecke zu Strecken entarten können.

17 kann auf **14** zurückgeführt werden. Eine Menge von Kreisbögen, jeder kleiner als ein Halbkreis, hat nämlich dann und nur dann einen Punkt gemeinsam, wenn dasselbe von den zugehörigen Kreissegmenten gilt, und dafür genügt nach **14**, dass je drei einen Punkt gemeinsam haben.

18 folgt aus **16**. In der Tat lassen Bogen, jeder kleiner als ein Drittelskreis und paarweise nicht punktfremd, einen Peripheriepunkt unbedeckt, z.B. den zu einer Bogenmitte antipodischen. Der Kreis kann somit hier aufgeschnitten und auf eine Gerade abgewickelt werden, so dass jeder Bogen in eine Strecke übergeht.

19. Es sei $G(\alpha)$ die gerichtete Gerade durch das Kreiszentrum, die mit einer festen Richtung den Winkel α einschliesst. Werden die gegebenen Bogen, die paarweise Punkte gemeinsam haben, auf $G(\alpha)$ orthogonal projiziert, so haben die Bildstrecken dieselbe Eigenschaft. Somit ist der Durchschnitt all dieser Strecken ein Punkt oder eine Strecke, jedenfalls aber nicht leer (**16**). Für mindestens einen Winkel α_0 enthält $D(\alpha)$ das Kreiszentrum. In der Tat: $D(\alpha)$ und $D(\alpha + \pi)$ liegen in ihren gerichteten Geraden spiegelsymmetrisch bezüglich Z ; da nun jede Orthogonalprojektion eines Bogens und also auch $D(\alpha)$ stetig mit α ändert, muss $D(\alpha)$ bei einer Drehung der Geraden um π für eine Lage α_0 das Zentrum bedecken. $G(\alpha_0 + \pi/2)$, die projizierende Gerade durch Z , ist dann eine Durchmessergerade, die alle Bogen trifft.

Die Varianten **20-28** ergeben sich aus den grundlegenden Aussagen **14**, **16**, **17**, **19** durch mannigfache Abbildungsmethoden.

20-22. Die Lage eines gegebenen Eibereiches A lässt sich bei Verschiebungen durch die Lage eines starr mit ihm verbundenen Punktes P charakterisieren. Ohne Mühe bestätigt man, dass P einen Eibereich B^* durchläuft, wenn der bewegliche Eibereich A alle Lagen einnimmt, bei denen er in einem Eibereich B enthalten ist. Gleiches gilt von allen Lagen, bei denen A einen Eibereich B trifft, bzw. umschliesst. Jeder Eibereich bildet sich auf diese Weise in einen Eibereich B^* ab, und bei diesen Abbildungen gehen die Aussagen **20-22** in **14** über.

23. Werden Eibereiche mit paarweise gemeinsamen Punkten durch Zentralprojektion auf eine Kreislinie abgebildet, so gehen sie in Bogen über, die **19** erfüllen. Die projizierende Gerade durch die in allen Bildbogen enthaltenen antipodischen Punkte trifft alle Eibereiche des Systems.

24. Orthogonalprojektion der Eibereiche erzeugt auf einer Geraden eine Streckenmenge, die **16** erfüllt. Die projizierende Gerade durch den in allen Strecken der Menge enthaltenen Punkt trifft alle Eibereiche der Menge.

25. Gibt es unter den parallelen Rechtecken der Menge zwei, die nur eine einzige positiv orientierte Treffgerade gemeinsam haben, so ist die Aussage evident, da diese Gerade jedes weitere Rechteck der Menge treffen muss. Andernfalls dürfen wir voraussetzen, dass je drei Rechtecke der Menge eine positiv orientierte Treffgerade besitzen, die zu keiner Rechteckseite parallel ist. Dasselbe gilt dann von je endlich vielen Rechtecken der Menge. In der Tat: Man lege parallel zu den Rechtecken orientiert zwei Parallelen und charakterisiere ihre Punkte durch eine Längenkoordinate in ihnen. Jede Transversale lässt sich dann in einen Punkt einer Hilfsebene abbilden, indem man die linearen Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Parallelen als kartesische Koordinaten der Hilfsebene deutet. Die Menge aller ansteigenden Geraden, welche ein Rechteck der Menge treffen, geht dabei in eine konvexe, abgeschlossene, aber nicht beschränkte Punktmenge über. Je drei dieser Mengen haben nach unsern Voraussetzungen im Endlichen Punkte gemeinsam. Greift man endlich viele dieser konvexen Mengen heraus, so sind ihre Durchschnitte mit einem ausreichend grossen Kreis Eibereiche, die nach **14** einen Punkt gemeinsam haben. Die diesem Punkt entsprechende Gerade trifft die herausgegriffenen endlich vielen Rechtecke. — Um den Beweis auch für unendliche Rechteckmengen zu führen (ohne eine stärkere Variante von **14** zu benutzen) brauchen wir vom bisher Bewiesenen nur, dass je vier Rechtecke der Menge eine gemeinsame Treffgerade aufweisen. Lässt man nun jeder Geraden, die mit den gelegten zwei Parallelen den Winkel φ einschliesst, auf einer Kreisperipherie den Punkt mit Phase φ entsprechen, so bildet sich die Menge aller ansteigenden Geraden,

welche zwei herausgegriffene Rechtecke der Menge treffen, in einen Bogen kleiner als ein Drittelskreis ab. Diese Abbildung, für alle Rechteckpaare der Menge ausgeführt, liefert eine Bogenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkten, weil je vier Rechtecke eine gemeinsame Treffgerade aufweisen. Der allen Bogen gemeinsame Punkt (18) entspricht einer Geraden, zu der je zwei Rechtecke der Menge eine parallele Treffgerade gemeinsam haben; mit andern Worten: durch Projektionsstrahlen parallel zu dieser Geraden bildet sich die Rechteckmenge auf einer Transversalen als Streckenmenge ab, die nach 16 einen Punkt gemeinsam hat. Der Projektionsstrahl durch ihn trifft alle Rechtecke der Menge.

26. P sei ein Peripheriepunkt eines Kreises. Zu jeder Geraden G der Ebene lege man eine Parallele durch P ; ihr zweiter Durchstosspunkt mit dem Kreis sei das Bild der Geraden G . Bei dieser Abbildung geht die Menge der Geraden, welche zwei feste Eibereiche treffen, in einen Bogen über. Führt man dies für alle Bereichpaare einer Menge von Eibereichen, die zu je vier eine Treffgerade gemeinsam haben, durch, so erhält man eine Bogenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkte. Dem antipodischen Punktepaar, das alle Bogen trifft (19), entsprechen zwei orthogonale Richtungen, so dass man findet: *Haben je vier Eibereiche einer Eibereichmenge eine gemeinsame Treffgerade, so gibt es zwei orthogonale Richtungen derart, dass je zwei Eibereiche der Menge eine gemeinsame Treffgerade mit einer dieser Richtungen aufweisen.* — Sind nun die Eibereiche dieser Menge zueinander homothetisch, so treffen die vier Geraden der erwähnten Richtungen, die ein einem Bereich der Menge umbeschriebenes Rechteck bilden, alle nichtkleinern Bereiche der Menge. Gibt es also in der Menge einen kleinsten Eibereich, so treffen die ihm derart umbeschriebenen Geraden alle Bereiche der Menge. Gibt es in der Menge keinen kleinsten Eibereich, so führen einige zusätzliche Überlegungen über das Konvergenzverhalten nach Grösse und Lage der Bereiche zum gewünschten Resultat. Sind die Eibereiche nicht nur homothetisch, sondern zudem kongruent, so lässt sich weiter einsehen, dass stets schon drei von diesen vier Treffgeraden alle Bereiche treffen.

27. Eine Gerade in der Separationsrichtung werde als x -Achse ausgezeichnet. Jede andere Gerade der Ebene bildet mit der x -Achse einen Winkel $0 \leq \varphi < \pi$ gemessen im positiven Drehsinn. Der Menge aller Geraden, welche zwei Eibereiche des Systems, etwa A und B treffen, entspricht auf einer φ -Achse ein Winkelintervall zwischen 0 und π , das wir mit (AB) bzw. analog bezeichnen. Wir behaupten, dass je zwei dieser Winkelintervalle Punkte gemeinsam haben. Dies vorausgesetzt, schliesst man mit **16**, dass ein Winkel φ_0 existiert, so dass je zwei Eibereiche des Systems durch eine Gerade der Richtung φ_0 getroffen werden können. Mit andern Worten: die Parallelprojektionen der Eibereiche in dieser Richtung auf die x -Achse bilden eine Streckenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkten. Die projizierende Gerade durch den allen Strecken gemeinsamen Punkt (**16**) trifft dann alle Eibereiche des Systems. — Es bleibt nachzutragen, dass je zwei Winkelintervalle Punkte gemeinsam haben. Für die Intervalle (AB), (BC) (bzw. analog) wird dies durch die Voraussetzung gemeinsamer Treffgeraden zu A, B, C gesichert. Hätten aber zwei Intervalle, etwa (AB), (CD) keinen Punkt gemeinsam, so zeigt sich ein Widerspruch wie folgt: Jedes der Intervalle (AC), (AD), (BC), (BD) hat sowohl mit (AB) wie mit (CD) Punkte gemeinsam, so dass für einen Winkel φ' „zwischen“ (AB) und (CD) folgende Sachlage eintritt: Durch Geraden der Richtung φ' sind die Eibereiche A und B, ebenfalls C und D separierbar (daraus folgt die Separierbarkeit eines weitem Paares durch jede dieser beiden Separationsgeraden!), nicht aber A und C, A und D, B und C, B und D. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

28. Durch die beim Beweis **26** benutzte Abbildung wird **28** auf die beim Beweis **18** erwähnte Sachlage zurückgeführt, dass Kreisbogen mit paarweise gemeinsamen Punkten, jeder kleiner als ein Drittelskreis, einen Peripheriepunkt unbedeckt lassen.

29. Spezialfall von **21**.

30. Die Geraden können durch ausreichend lange Strecken ersetzt werden, wodurch ein Spezialfall von **21** entsteht.

31. Bei Berücksichtigung von **29** genügt es, die Aussage für eine dreipunktige Menge vom Durchmesser 1 zu beweisen. Bildet diese ein stumpfwinkliges Dreieck, so ist dessen längste Seite Deckkreisdurchmesser, so dass hier sogar $R \leq \frac{1}{2}$ zutrifft. Bestimmt die dreipunktige Menge ein spitzwinkliges Dreieck, so wird der Deckkreis vom Umkreis gebildet, dessen Durchmesser bekanntlich durch $2R = a/\sin \alpha$ bestimmt ist; a ist irgend eine Dreiecksseite, α der gegenüberliegende Winkel. In jedem Dreieck gibt es einen Winkel $\alpha \geq \pi/3$, so dass zugleich $\sin \alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $a \leq 1$ gilt. Also ist $2R = a/\sin \alpha \leq 2/\sqrt{3}$.

32 braucht ebenfalls nur noch für drei Geraden mit Durchmesser 1 bewiesen zu werden. Diese bilden ein Dreieck mit Umfang $U \leq 3$, das dem kleinsten Treffkreis umschrieben ist. Da das reguläre Dreieck mit Umfang $6r\sqrt{3}$ das umfangkleinste Dreieck ist, das sich einem Kreis mit Radius r umschreiben lässt, gilt $6r\sqrt{3} \leq U \leq 3$, also $r \leq 1/2\sqrt{3}$.

33. Die Punktmenge darf als abgeschlossen vorausgesetzt werden. Ist S ein reguläres Umdreieck (so dass jede Seite einen Mengenpunkt enthält) und S^* ein solches in gespiegelter Lage, so ist entweder S oder S^* ein reguläres Dreieck der Seitenlänge $s \leq \sqrt{3}$. Fällt man nämlich von irgend einem Punkt, der in S und S^* enthalten ist, die Lote auf die Seiten von S bzw. S^* , so ist deren Summe nach einem planimetrischen Satz gleich der Höhe von S bzw. S^* . Die Summe je eines Lotes auf S und des entsprechenden auf S^* ist wegen der Durchmesserbedingung ≤ 1 , so dass eines der Dreiecke eine Höhe $\leq 3/2$ aufweist. Seine Seiten betragen höchstens $\sqrt{3}$.

34. Anschliessend an den Beweis **33** stellen wir fest, dass die Seitenlänge des regulären Umdreiecks S eine stetige Funktion der Basisrichtung ist und bei Drehung um π in die von S^* übergeht. Daher sind S und S^* für eine spezielle Richtung gleich gross; ihr Durchschnitt, in dem die Menge mit $D = 1$ enthalten ist, bildet dann ein (eventuell entartetes) zentralsymmetrisches Sechseck, bei dem parallele Seiten einen Abstand ≤ 1 haben. Es ist ganz im regulären Sechseck mit demselben Symmetriezentrum und denselben Seitenrichtungen enthalten, dessen

parallele Seiten den Abstand 1 aufweisen. Dieses reguläre Sechseck besitzt die Seitenlänge $1/\sqrt{3}$ und enthält die gegebene Menge.

35 ergibt sich ausgehend von **34**, wenn in dem der Menge vom Durchmesser 1 umbeschriebenen regulären Sechseck der Seitenlänge $1/\sqrt{3}$ vom Zentrum aus drei Lote mit Zwischenwinkeln $2\pi/3$ auf drei Seiten gefällt werden. Dadurch zerfällt das Sechseck in drei kongruente Fünfecke vom Durchmesser $\sqrt{3}/2$, die die gegebene Menge überdecken.

36. Es sei $n \geq 4$ und die Menge P_1, \dots, P_n habe den Durchmesser $D = 1$. Zu zwei Punkten P_i, P_k mit Abstand 1 zeichne man stets die Verbindungsstrecke $P_i P_k$. Gehen dann von jedem P_i höchstens zwei Strecken aus, so ist die Streckenzahl $\leq n$, wie behauptet. Existiert aber ein Punkt, etwa P_1 , von dem mindestens 3 Strecken, etwa zu P_i, P_j, P_k , auslaufen, so sei P_j im spitzen Winkelraum $P_i P_1 P_k$ enthalten. Ist nun $d(P_j, P_m) = 1$, so muss $P_j P_m$ sowohl $P_1 P_i$ wie auch $P_1 P_k$ treffen, da andernfalls $D > 1$ wäre. Daraus folgt $P_m = P_1$, d.h. P_j kann nur von P_1 den Abstand 1 haben. Lässt man P_j weg, so fällt eine einzige Verbindungsstrecke dahin. Durch vollständige Induktion folgt daraus **36**. — Da also unter n Punkten mit $D = 1$ stets einer von höchstens zwei andern den Abstand 1 hat, so folgt durch Induktion auch der Borsuksche Satz. Denn jener Punkt lässt sich derjenigen der drei Teilmengen der restlichen $n - 1$ Punkte zugesellen, die die beiden weitferntesten Punkte nicht enthält; dadurch bleiben alle Durchmesser < 1 .

37. Die Mittelpunkte der Kreise vom Radius $R = 1$ mit paarweise gemeinsamen Punkten bilden eine Punktmenge vom Durchmesser $D \leq 2$. Diese kann nach **34** durch ein reguläres Sechseck der Seitenlänge $2/\sqrt{3}$ überdeckt werden. In diesem Sechseck lassen sich drei Punkte vom gegenseitigen Abstand 1, nämlich drei Diagonalenmittelpunkte, angeben, so dass jeder Sechseckpunkt, speziell jedes der Kreiszentren, von einem dieser drei Punkte einen Abstand ≤ 1 aufweist. Demnach ist stets mindestens einer dieser Punkte in jedem der gegebenen Kreise enthalten.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALTWEGG, M. Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, 7, 56-58, 1952.
- [2] ANNING, N. H. and P. ERDÖS. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51, 598-600, 1945.
- [3] BALASUBRAMANIAN, N. A theorem on sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 19, 839, 1953.
- [4] BERNHEIM, B. and Th. MOTZKIN. A criterium for divisibility of n -gons into k -gons. *Comment. Math. Helvetici*, 22, 93-102, 1949.
- [5] BORSUK, K. Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, 20, 177-190, 1933.
- [6] DE BRUIJN, N. G. and P. ERDÖS. On a combinatorial problem. *Indagationes Math.*, 10, 421-423, 1948.
- [7] COXETER, H. S. M. A problem of collinear points. *Amer. Math. Monthly*, 55, 26-28, 1948.
- [8] DELACHET, A. *La géométrie contemporaine*. Paris 1950, 128 S.
- [9] DIRAC, G. A. Collinearity properties of sets of points. *Quart. J. Math. Oxford*, Ser. (2), 2, 221-227, 1951.
- [10] EGGLESTON, H. G. Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. *J. London Math. Soc.*, 30, 11-24, 1955.
- [11] ERDÖS, P. Problem No. 4065. *Amer. Math. Monthly*, 51, 169-171 1944.
- [12] ——— Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51, 996, 1945.
- [13] ——— On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly*, 53, 248-250, 1946.
- [14] FEJES TÓTH, L. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953, 198 S.
- [15] GALE, D. On inscribing n -dimensional sets in a regular n -simplex. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, 222-225, 1953.
- [16] GUPTA, H. Non-concyclic sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 19, 315-316, 1953.
- [17] GUSTIN, W. On the interior of the convex hull of an euclidean set. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53, 299-301, 1947.
- [18] HADWIGER, H. Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie. *Elemente der Math.*, 1, 98-100, 1946.
- [19] ——— Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *J. reine angew. Math.* 194, 101-110, 1955.
- [20] HANNER, O. and H. RADSTRÖM. A generalization of a theorem of Fenchel. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2, 589-593, 1951.
- [21] HELLY, E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 32, 175-176, 1923.
- [22] HOPF, H. Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie. *Math. Phys. Semesterber.*, 3, 16-29, 1953.
- [23] ——— und E. PANNWITZ. Aufgabe Nr. 167. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, 43, 114 kursiv, 1934; 45, 33 kursiv, 1936.
- [24] HORN, A. Some generalizations of Helly's theorem on convex sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 923-929, 1949.
- [25] HORN, A. and F. A. VALENTINE. Some properties of L-sets in the plane. *Duke Math. J.*, 16, 131-140, 1949.

- [26] JUNG, H. W. E. Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. *J. reine angew. Math.*, 123, 241-257, 1901.
- [27] KARLIN, S. and L. S. SHAPLEY. Some applications of a theorem on convex functions. *Ann. Math. Princeton*, Ser. (2), 52, 148-153, 1950.
- [28] KELLY, L. M. Covering problems. *Nat. Math. Mag.*, 19, 123-130, 1944.
- [29] KIRCHBERGER, P. Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden. *Math. Ann.*, 57, 509-540, 1903.
- [30] KLEE, V. L., jr. On certain intersection properties of convex sets. *Canadian J. Math.*, 3, 272-275, 1951.
- [31] ——— Brief an H. Hadwiger vom 20. Februar 1953.
- [32] ——— The critical set of a convex body. *Amer. J. of Math.*, 75, 178-188, 1953.
- [33] ——— Brief an P. Vincensini vom 27. September 1954.
- [34] ——— Common secants for plane convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5, 639-641, 1954.
- [35] KÖNIG, D. Über konvexe Körper. *Math. Z.*, 14, 208-210, 1922.
- [36] LEVI, F. W. On Helly's theorem and the axioms of convexity. *J. Indian. Math. Soc.*, 15, 65-76, 1951.
- [37] ——— Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze. *Archiv der Math.*, 4, 222-224, 1953.
- [38] MOSER, L. On the different distances determined by n points. *Amer. Math. Monthly*, 59, 85-91, 1952.
- [39] MOTZKIN, Th. The lines and planes connecting the points of a finite set. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70, 451-464, 1951.
- [40] MÜLLER, A. Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen. *Elemente der Math.*, 8, 37-38, 1953.
- [41] NAGY, B. Sz.-. Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper. *Acta Scient. Math.*, 15, 169-177, 1954.
- [42] PÁL, J. Über ein elementares Variationsproblem. *Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk.*, 3, 1920, 35 S.
- [43] PÓLYA, G. und G. SZEGÖ. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Berlin 1925, Bd. 1, 338 S.; Bd. 2, 408 S.
- [44] RADEMACHER, H. and I. J. SCHOENBERG. Helly's theorems on convex domains and Tchebycheff's approximation problem. *Canadian J. Math.*, 2, 245-256, 1950.
- [45] ——— und O. TOEPLITZ. *Von Zahlen und Figuren*. Berlin 1930, 164 S.
- [46] RADO, R. Theorems on the intersection of convex sets of points. *J. London Math. Soc.*, 27, 320-328, 1952.
- [47] ——— A theorem on sequences of convex sets. *Quart. J. Oxford*, Ser. (2), 3, 183-186, 1952.
- [48] RADON, J. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. *Math. Ann.*, 83, 113-115, 1921.
- [49] ROBINSON, C. V. Spherical theorems of Helly's type and congruence indices of spherical caps. *Amer. J. of Math.*, 64, 260-272, 1942.
- [50] SANTALÓ, L. A. Un teorema sobre conjuntos de paralelepipedos de aristas paralelas. *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, 2, 49-60, 1940; 3, 202-210, 1942.
- [51] ——— Sobre pares de figuras convexas. *Gaz. Mat. Lisboa*, 12, 7-10, 1951; 14, 6, 1953.
- [52] SCHERRER, W. Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter. *Elemente der Math.*, 1, 97-98, 1946.

- [53] STEIGER, F. Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, 8, 66-67, 1953.
- [54] STEINITZ, E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. reine angew. Math.*, 143, 128-175, 1913; 144, 1-40, 1914; 146, 1-52, 1916.
- [55] SYLVESTER, J. J. Question No. 11851. *Educational Times*, 59, 98, 1893.
- [56] TREVISAN, G. Una condizione di allineamento per gli insiemi infiniti di punti del piano euclideo. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 18, 258-261, 1949.
- [57] TROST, E. Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahligen Entfernungen. *Elemente der Math.*, 6, 59-60, 1951.
- [58] VINCENSINI, P. Sur une extension d'un théorème de M. J. Radon sur les ensembles de corps convexes. *Bull. Soc. Math. France*, 67, 115-119, 1939.
- [59] ——— Les ensembles d'arcs d'un même cercle dans leurs relations avec les ensembles de corps connexes du plan euclidien. *Atti IV. Congr. Un. Mat. Ital.*, 2, 456-464, 1953.
- [60] ——— Sur certains ensembles d'arcs de cercle ou de calottes sphériques. *Bull. Sci. Math.*, (2), 77, 120-128, 1953.

PROBLÈMES CHOISIS
DE GÉOMÉTRIE COMBINATOIRE DANS LE PLAN

H. HADWIGER et H. DEBRUNNER, Berne

La traduction en français paraîtra dans un des prochains fascicules.
