SUR L'« INDÉFINIMENT» MATHÉMATIQUE

Autor(en): **Lorent, Henri**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1951-1954)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515810

SUR L'« INDÉFINIMENT » MATHÉMATIQUE

PAR

Henri LORENT (Bruxelles)

L'adverbe *indéfiniment* a cours, en mathématiques, dans diverses circonstances. Notre intention est de chercher à préciser à quels genres d'opérations il prépare une conclusion, et de juger s'il ne prête à aucun reproche. Pour atteindre ces buts, il nous sera utile de faire usage du vocabulaire de la théorie des ensembles; nous allons rappeler dans quelle mesure.

I

1. — Un ensemble de noix est distingué des autres ensembles de noix par le nombre de ses noix; tout ensemble d'êtres concrets est *fini*. En mathématiques, il y a des ensembles de nombres qui n'ont pas de fin, des ensembles qualifiés *transfinis*.

Un premier type d'ensemble transfini a pour modèle la suite des nombres entiers naturels:

$$1, 2, 3, 4, \ldots n, n + 1, \ldots \text{ etc., etc. } (1) ;$$

chacun a un suivant par l'addition d'une unité, et cela indéfiniment. Ce type d'ensemble est dit *dénombrable*; il resterait dénombrable si l'on en retranchait quelques-uns des premiers termes.

Tout autre ensemble que l'on peut faire correspondre, terme pour terme, à celui des nombres entiers est aussi dénommé dénombrable; par exemple le suivant, formé des nombres pairs

$$2, 4, 6, 8, \ldots 2n, 2(n + 1) \ldots ;$$

On voit que ce dernier a tous termes appartenant à l'ensemble des nombres entiers; il est dit pour cela *sous-ensemble* du premier; en voici d'autres:

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots\quad 3n,\ 3\,(n+1)\ \ldots$$
$$n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \ldots\ n.n,\ n\,(n+1)\ \ldots$$
$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \ldots\ n^2,\ (n+1)^2\ \ldots$$
$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ \ldots\ n^3,\ (n+1)^3\ \ldots$$

Un ensemble fini en sous-ensembles de (1) peut-il épuiser (1) ?

Celui des nombres pairs et celui des nombres impairs l'épuisent, mais pour d'autres plus restreints on ne peut l'affirmer.

Voici d'autres exemples d'ensembles dénombrables dont les termes (correspondant aux entiers à partir de 2) ne sont pas entiers:

$$1/2,\ 1/3,\ 1/4\ \ldots\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \ldots$$

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4}\ \ldots\ \sqrt{n},\ \sqrt{n+1},\ \ldots$$

le lecteur en construira aisément autant qu'il le voudra, un nombre « indéfini ».

2. — Un second type d'ensemble mathématique est la ligne droite, ensemble de ses points. Un point de la droite distinct d'un autre ne peut lui être dit suivant ou consécutif, car un segment AB de droite correspond point pour point à une demi-droite indéfinie BX.

En effet, projetons AB sur BX d'un point P tel que PA soit parallèle à BX; tout point C de AB est projeté sur BX en un point C′, y compris le point A qui est projeté à l'infini sur BX.

Si nous marquons sur BX les points dont les distances à B sont mesurées par les termes d'un des ensembles dénombrables ci-dessus, nous formerons un sous-ensemble dénombrable de l'ensemble des points de BX; ce dernier ensemble est dénommé *ensemble qui a la puissance du continu* (en abrégé: ensemble *continu*).

Voici d'autres exemples d'ensembles continus: une courbe quelconque, plane ou gauche, ensemble de ses points; un rectangle, ensemble continu des parallèles à sa hauteur menées par un point de l'ensemble continu de sa base; une pyramide triangulaire SABC, ensemble continu des triangles SAD menés par son arête S'A et les points de son autre arête BC; une sphère, ensemble continu des grands cercles menés par un de ses diamètres, etc...

Nous y reviendrons à partir de la mesure de certains d'entre eux.

* * *

3. — Revenons à l'adverbe *indéfiniment*. Comment le présente-t-on aux débutants en géométrie élémentaire, quand on l'y rencontre ?

Puisqu'on va leur faire faire des constructions géométriques (si on leur fait jouer quelque activité dans leur information scientifique), il leur faut au préalable vérifier leur planche à dessin; pour cela, on leur fera fixer une fine ficelle en un point du contour de la planche; tournant autour de ce point, la ficelle doit balayer la planche sans heurter des saillies ni enjamber des dépressions; si le même résultat est atteint aussi à partir d'un autre point du contour de la planche, celle-ci est suffisamment *plane* pour servir au dessin géométrique.

Qu'arriverait-il si la planche était plus grande, au tableau noir de la classe, par exemple ? Et si plus grande encore, tellement grande que nous ne pouvons y faire jouer notre ficelle ? Les élèves font appel à leur *imagination* et admettent que le plan peut être prolongé autant qu'on le veut et dans quelque direction que ce soit (haut, bas, gauche, droite...) sans perdre sa propriété de plan, qu'il peut être *indéfiniment* prolongé.

Parvenus là, ils acceptent le premier emploi que fait Euclide d'un synonyme [1]; sa « demande » n° 2 est: « Prolonger continuellement, selon sa direction, une droite finie. » Et nous leur ferons prolonger, au moyen de leur règle (préalablement vérifiée) un segment de droite jusqu'aux limites de leur feuille de papier de dessin.

[1] Nous citons d'après les *Eléments de Géométrie* d'EUCLIDE, traduits par F. Peyrard (Paris, an XII-1804), p. 5.

4. — Le premier usage de la droite indéfinie est fait à propos des droites parallèles. Nous lisons, en effet, chez Euclide (p. 4) et chez tous ses successeurs: « Les parallèles sont des droites qui, étant placées sur un même plan et qui étant prolongées de part et d'autre à l'infini, ne se rencontrent nulle part. »

La proposition XXVII du premier livre (p. 44) dit: « Si une droite tombant sur deux autres droites fait les angles alternes égaux entre eux, ces deux droites seront parallèles. »

D'autre part, parmi ses *notions communes* ou *axiomes*, il a placé, sous le n° 11 (p. 6) l'axiome suivant: « Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, les deux droites prolongées à l'infini se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. » (Il s'agit évidemment de la somme de ces angles intérieurs.) Ayant démontré que deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles, il résulte de cet axiome 11 que *par un point extérieur on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée*, ce qui est l'énoncé actuel du *postulatum d'Euclide.*

Demandons à un dessinateur de vérifier ce postulat. Il songera à tracer deux perpendiculaires à une même droite XY; son équerre à angle droit A posée sur XY par le côté AB, il tracera le segment de droite le long de l'autre côté AC; même opération en un autre point de OX; non satisfait de ces deux « parallèles », il tracera les segments le long de l'hypoténuse dans deux positions de l'équerre. Il aura l'impression visuelle que les deux couples de segments ainsi tracés sont deux couples de segments parallèles.

Cependant, ceux d'un couple ne se rencontreraient-ils pas quelque part, hors du dessin limité où ils passent? Et si l'équerre de notre dessinateur présente une petite erreur dans l'angle utilisé (1/100 de minute, par exemple), *quid* ? L'œil du dessinateur pourrait être satisfait; le travailleur qui construirait un objet d'après le plan du dessinateur en produirait un qui, s'il présentait une erreur, en produirait une pratiquement négligeable.

Pour l'un et l'autre de ces hommes, tout se passerait comme si, d'un point de XY, toutes les droites intérieures à un angle α

pouvaient rencontrer la perpendiculaire à XY élevée en un point A.

Le dessinateur peut, sans inconvénient pratique, se comporter comme si est vrai le postulat suivant remplaçant celui d'Euclide: « *En un point* A *de* XY *il existe un angle* α *(angle de parallélisme) tel que l'ensemble, de la puissance du continu, des droites issues de* A *dans l'angle* α, *rencontrent à l'infini la perpendiculaire à* XY. »

C'est le postulat de LOBATCHEWSKY [1], un des auteurs d'une géométrie non euclidienne.

5. — Un autre problème fondamental de la géométrie est le suivant: abaisser d'un point P la perpendiculaire sur la droite XY. Comment le dessinateur le résout-il ?

De P comme centre, il décrit une circonférence coupant XY en deux points A et B; de A et B comme centres, il en décrit deux autres se coupant en Q; PQ est la perpendiculaire cherchée. Reste-t-elle unique si loin que P soit de XY ?

Le dessinateur a piqué en P, en A, en B la pointe sèche de son compas; mais le point, selon Euclide, est sans étendue [2], d'où une triple cause d'approximation. Si P est très loin, un petit arc de circonférence marqué par le crayon ne se distingue pas d'un petit segment du dessin, d'une largeur sensible, de la droite XY; de P très éloigné, le dessin se présente tel que le dessinateur peut choisir parmi un ensemble continu de droites issues de P, cet ensemble contenu d'ailleurs dans un angle très petit.

Si nous considérons une sphère et nous proposons de mener d'un pôle P un arc de grand cercle perpendiculaire à l'équateur, tout arc de grand cercle ayant pour diamètre celui qui part de P répond à la question.

Pour le dessinateur, les choses se présentent comme s'il était possible, *d'un point extérieur à une droite, d'abaisser sur celle-ci un ensemble de perpendiculaires ayant la puissance du continu.*

---

[1] Nic. Lobatchewsky, géomètre russe (1793-1856).

[2] Il y a près de deux siècles, des traducteurs d'Euclide observèrent déjà que le dessin d'un point a une étendue, qu'une ligne dessinée n'est pas une longueur sans largeur. Voir KOENIG et A. KUYPERS, *Eléments de Géométrie contenant les six premiers livres d'Euclide*, p. 1 (La Haye, 1758).

Ceci est le postulat de Riemann [1], remplaçant celui d'Euclide dans une géométrie non euclidienne appelée « riemannienne ».

6. — Les géométries non euclidiennes ne répondent-elles à aucune réalité dans l'espace euclidien ?

Rappelons que l'on nomme *géodésiques* d'une surface des lignes tracées sur cette surface et telles que tout segment en soit la plus courte distance sur la surface.

Les géodésiques du plan sont les droites; le plan a une courbure nulle. Celles de la sphère sont les grands cercles, la sphère a une courbure positive constante (le plan tangent en un de ses points ne coupant pas sa surface).

Beltrami [2] a signalé l'existence d'une surface à courbure négative, qu'il a nommée *pseudosphère*; c'est une surface en forme de selle de cheval prolongée en tous sens. Si, en l'un de ses points situés sur l'épine dorsale du cheval, on la coupe par un plan vertical contenant l'épine dorsale et par un autre perpendiculaire au premier, ces deux sections sont des courbes hyperboliques (à asymptotes) qui ont en ce point des rayons de courbure de sens contraires (le premier au-dessus de la selle, le second au-dessous).

La pseudosphère est dite de courbure négative.

La géométrie euclidienne est donc celle de figures dont les lignes sont des géodésiques du plan, d'où son nom *géométrie plane.*

La géométrie lobatchewskienne est celle de figures dont les lignes sont des géodésiques d'une pseudosphère, ces géodésiques étant des courbes hyperboliques; d'où son nom *géométrie hyperbolique.*

La géométrie riemannienne est celle de figures dont les lignes sont des géodésiques d'une sphère ou d'un ellipsoïde de révolution; c'est pourquoi on la nomme *géométrie elliptique.*

Si notre dessinateur travaille sur une planche rigoureusement plane, il est euclidien. Si sa planche est légèrement sphérique, il est riemannien. Si sa planche est légèrement pseudosphérique,

---

[1] B. Riemann, géomètre allemand (1826-1866). Voir, d'un de nos compatriotes: A. Macleod, *Introduction à la géométrie non-euclidienne* (Paris, Hermann, 1922).

[2] E. Beltrami, géomètre italien (1835-1900).

il est lobatchevskien. Mais dans les deux derniers cas, il ne le restera que dans la mesure où sa règle — dont l'arête est une géodésique du plan — lui permet de tracer celles de la sphère ou de la pseudosphère avec une approximation tolérable. Il ne s'en accommodera d'ailleurs que si ses dessins, ses « plans » cotés permettent au travailleur qui les exécute un résultat suffisant; dans la mécanique de précision, par exemple, une tolérance de 1/100 millimètre constitue une erreur mathématique avec un résultat satisfaisant pour le praticien.

Concluons cette première partie de notre note par quelques lignes de Riemann: [1]

« ... On peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. Le plus important, pour notre but actuel, est celui qu'Euclide a pris pour base. Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses. On peut donc étudier leur probabilité, qui est certainement très considérable dans les limites de l'observation, et juger d'après cela du degré de l'extension de ces faits en dehors de ces mêmes limites, tant dans le sens des immensurablement grands que dans celui des immensurablement petits. » [2]

*
* *

II

7. — Passons à un autre ordre d'idées; nous retrouvons *indéfiniment* en calcul intégral, en mesurant les lignes et les surfaces courbes [3].

---

[1] B. Riemann, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, mémoire publié par Dedekind dans le tome XIII des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Goettingen* (1867), traduit par J. Houël, p. 2 du tiré-à-part; ou *Œuvres mathématiques* trad. Laugier, p. 281 (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

[2] On lira avec intérêt la brochure de M. P. Barbarin: *Pour le centenaire de la Géométrie non euclidienne* (Buenos-Aires, Editions Coni, 1931). On y trouvera les portraits des géomètres (dont deux Belges: J. de Tilly et P. Mansion) qui ont marqué dans l'étude de cette géométrie; du même auteur: *La Géométrie non euclidienne*, 3e édit. (Edit. Scientia, Paris, Gauthier-Villars, 1928).

[3] Une première rédaction de ce § II a paru dans le *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège* (numéro de mars 1950) sous le titre: « Un postulat implicite de la théorie des ensembles ».

Prenons pour exemple l'aire plane OABC, de mesure S, dans le plan d'axes rectangulaires; aire ayant sa base $OA = a$ sur OX, limitée aux ordonnées $OC = l_1$ et $AB = l_2$ et à l'arc CB d'une courbe uniformément continue. Cette aire est l'ensemble, de la puissance du continu, des ordonnées des points de son arc.

La solution classique du problème est la suivante: partageons la base OA en un certain nombre de segments Δx; sur les ordonnées initiale et finale de chaque Δx, construisons un rectangle ayant pour hauteur la plus petite ordonnée y_1 de ce Δx, et un autre dont la hauteur est l'ordonnée la plus grande y_2 du même intervalle. La somme S_1 des premiers de ces rectangles est une partie de l'aire S, la somme S_2 des seconds déborde l'aire S; donc:

$$S_1 < S < S_2, \quad \text{avec} \quad | S_2 - S_1 | = | l_2 - l_1 | \Delta x .$$

Puis répétons ces constructions en augmentant le nombre des intervalles Δx, et ce *indéfiniment*; les sommes S_1 augmentent, les sommes S_2 diminuent, leur différence ayant une limite nulle lorsque Δx décroît indéfiniment; on en conclut que:

$$S = \lim \overset{a}{\underset{0}{S}} y_1 \Delta x = \lim \overset{a}{\underset{0}{S}} y_2 \Delta x ,$$

ce que l'on écrit $S = \int_0^a y dx$.

On a donc conclu, de la connaissance d'ensembles dénombrables d'ordonnées, à un ensemble d'ordonnées ayant la puissance du continu; à chaque état de S_1 et de S_2, on a pris en considération deux ordonnées fixes l_1 et l_2 et un nombre fini d'ordonnées variables égal à celui des intervalles Δx diminué d'une unité.

Déjà, avant la théorie des ensembles, des esprits rigoureux s'étaient demandé: la conclusion quant à S ne dépend-elle pas du mode de multiplication du nombre des intervalles x ? [1]

Un premier mode est tel qu'à chaque multiplication les ordonnées en cause à la précédente soient conservées; par

---

[1] Voir par exemple E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, 3e édit., t. I, p. 172; ou S. CARRUS, *Cours de calcul différentiel et intégral*, livre I, p. 270.

exemple ces nombres sont 2, 4, 8, 16, ... 2^n, ... etc. Notre maître P. Mansion, dans son cours oral, dénommait ce mode *concordant avec soi-même.*

Un second mode de multiplication ne conserve aucune des ordonnées en cause à chaque étape; ces nombres seraient, par exemple, les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ... formant un ensemble dénombrable, comme on le sait depuis Euclide.

Enfin, un troisième mode de multiplication conserverait une partie seulement des ordonnées de chaque étape.

On peut concevoir des multiplications successives en nombre aussi grand qu'on le veut, *indéfiniment*, toutes mettant en cause un ensemble fini d'ordonnées de l'aire S.

Si l'on opérait de même sur l'ensemble continu des segments d'une droite OX, en en retranchant des segments successifs jusqu'à un point P, il subsisterait une demi-droite PX, c'est-à-dire que la puissance du résidu serait celle de la demi-droite OX tout entière. Généralisant ce fait, la théorie des ensembles démontre que *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable*, et que d'*un ensemble ayant la puissance du continu, on peut enlever un ensemble dénombrable d'éléments sans qu'il cesse d'avoir la puissance du continu* [1].

La théorie classique de l'intégrale S fait mieux; d'un ensemble ayant la puissance du continu elle enlève un ensemble dénombrable d'ensembles *finis* d'ordonnées, négligeant un résidu qui conserve la puissance du continu.

Pareil saut n'est assuré de réussir que parce qu'un jugement *intuitif*, fondé sur la vue d'une figure, est admis comme vrai — tel que fut le postulatum d'Euclide. La formule pourrait en être un postulat à introduire dans la théorie des ensembles, postulat formulé comme suit: *soit un ensemble dénombrable d'ensembles finis dénombrables* (E_1) *extraits d'un ensemble* (E) *qui a la puissance du continu; si tous les ensembles* (E_1) *ont une propriété commune, cette propriété appartient aussi à l'ensemble* (E).

Dans notre exemple de l'aire S, la propriété commune est celle qui permet le passage à la limite.

---

[1] Voir E. BOREL, *Eléments de la théorie des ensembles*, pp. 15 et 38 (Paris, Editions Albin Michel, 1949) et la note à la fin du texte.

Le postulat impliquerait que, dans le cas de l'aire S et les cas analogues, tout élément de l'ensemble continu (E) peut être atteint par des sous-ensembles (E_1), quel que soit le mode de prélèvement de ces sous-ensembles.

Dans son livre cité (p. 232-235), E. Borel témoigne d'une certaine inquiétude quant à la validité des raisonnements par lesquels on cherche à mesurer un ensemble qui a la puissance du continu. Le postulat ci-dessus est-il de nature à formuler cette inquiétude, et, peut-être à exprimer un caractère hypothétique ou empirique (aurait peut-être dit Riemann) de l'état actuel de la théorie des ensembles ?

NOTE AU N° 7

Peut-on épuiser l'ensemble dénombrable des nombres entiers en en détachant des sous-ensembles dénombrables ? Son dédoublement en termes pairs et termes impairs, en termes multiples de n et termes non multiples de n semble justifier une réponse affirmative; mais le second sous-ensemble est défini par un caractère négatif. Procédons par un mode positif de formation des sous-ensembles dénombrables.

Formons les sous-ensembles de multiples des nombres premiers (ceux-ci termes d'un ensemble transfini). Nous aurons successivement le sous-ensemble des nombres pairs: 2, 4, 6, 8, ...; celui des multiples de 3 non multiples de 2: 3, 9, 15, 21, ...; celui des multiples de 5 non multiples ni de 2, ni de 3: 25, 35, 55, 65, ...; et ainsi de suite.

Le sous-ensemble des multiples de n premier non multiples des nombres premiers moindres que n commence par n^2; on voit que, quel que soit le nombre premier auquel on est arrivé, le sous-ensemble correspondant reste dénombrable. Pour ce mode de formation des sous-ensembles, la réponse à notre question est donc négative.

Mais cette réponse est positive pour un autre mode de formation de ces sous-ensembles: car l'ensemble des nombres entiers dont l'expression chiffrée est terminée par 1 est transfini dénombrable; de même celui des nombres terminés par 2, 3, ..., 9, 0, et ces dix sous-ensembles épuisent l'ensemble des nombres entiers. Ils seraient douze si l'on écrivait les entiers dans la numération à base 12.

Les considérations précédentes donneraient-elles à un jeune lecteur une première idée de la richesse de la notion d'ensemble transfini dénombrable ? Nous l'espérons. Exprimons les faits exemplaires que nous venons de constater: *un ensemble dénombrable peut n'être pas épuisé par l'extraction d'un ensemble dénombrable de ses sous-ensembles dénombrables*, tandis qu'*il peut l'être par un nombre fini de pareils sous-ensembles.* Enoncé à rapprocher de celui du n° 7 emprunté à E. Borel.