II

Pour justifier l'étude des classes caractéristiques, il serait important de démontrer qu'elles ne sont pas triviales. On doit à M. Wu Wen-Tsun plusieurs exemples où des classes caractéristiques ne s'annulent pas [22]. D'autre part, on a des théorèmes sur la trivialité de certaines classes caractéristiques. En particulier, d'après MM. Seifert, Whitney et Thom, la classe $\overline{W}^N$ est toujours nulle [16], [18], [21]. De plus, si M est orientable, la classe $\overline{W}^N$, qui peut être définie avec les coefficients entiers, est nulle. Cela signifie géométriquement qu'il est possible de définir sur une variété orientable un champ continu de vecteurs normaux non nuls.

II

5. — J'ai beaucoup insisté sur les propriétés topologiques de l'application tangentielle. Il y a des questions plus géométriques qui seraient aussi intéressantes. L'une des plus naturelles est la condition sur l'application $T : M \longrightarrow G(n, N)$ pour qu'elle soit une application tangentielle.

On peut donner immédiatement une condition nécessaire. Soit en effet b un vecteur unitaire fixe. Le produit scalaire $f(x) = bx$, $x \in M$, définit une fonction continue sur M. M étant compacte, cette fonction possède un maximum et un minimum, où on a $bdx = 0$. Cela veut dire que les éléments $T(x)$ correspondants sont situés dans l'hyperplan passant par O et perpendiculaire à b. Par conséquent, pour chaque b il y a au moins deux points de M dont les images par T sont dans l'hyperplan perpendiculaire à b. Pour $n = 1$ cette condition est suffisante pour que l'application T soit l'application tangentielle d'une courbe close. J'ignore si ce résultat s'étend pour n quelconque.

Néanmoins on déduit de cette condition des conséquences intéressantes. Pour simplifier supposons que M soit orientée, de sorte que l'application à considérer soit $\tilde{T} : M \longrightarrow \tilde{G}(n, N)$. Évaluons le volume de l'ensemble des points de l'hypersphère de rayon unité de E^{n+N}, chaque point étant compté un nombre de fois égal au nombre des $\tilde{T}(x)$ contenu dans son hyperplan perpendiculaire. Par la méthode de la géométrie intégrale ce volume peut être exprimé par une formule du type de Crofton. Avec les notations du paragraphe 4, on pose

$$K^*(x) = \frac{c_n}{2\, c_{n+N-1}} \int |\, G(x\,,\, \nu)\,|\, d\sigma_{N-1} \geqq 0\,, \tag{30}$$

où la fonction sous l'intégrale est la valeur absolue de $G(x, \nu)$. Alors on trouve que le volume considéré est égal à

$$\frac{2\, c_{n+N-1}}{c_n} \int_M K^*(x)\, dV\,.$$

Parce que chaque hyperplan contient au moins deux $\tilde{T}(x)$, $x \in M$, ce volume est $\geqq 2\, c_{n+N-1}$, et on a l'inégalité

$$\int_M K^*(x)\, dV \geqq c_n\,, \tag{31}$$

où l'on fait la convention que $c_1 = 2$. Pour une courbe fermée dans l'espace euclidien ordinaire l'intégrale du premier membre de (31) est égale à l'intégrale de la valeur absolue de la courbure de M, divisée par π, et la formule (31) se réduit au théorème bien connu de M. FENCHEL. Il est clair que l'invariant $K^*(x)$ dépend de la position de M dans E^{n+N}, et on a $K^*(x) \geqq K(x)$, pour tout $x \in M$.

Dans le cas d'une courbe de l'espace ordinaire ces considérations conduisent au théorème intéressant de MM. FARY et MILNOR [9], [12]. Ce théorème se rapporte à une courbe satisfaisant à l'inégalité

$$\int_M K^*(x)\, dV < 2\, c_n\,. \tag{32}$$

Sous l'hypothèse (32) on voit qu'il y a un vecteur unitaire b de sorte que la fonction $f(x) = bx$, $x \varepsilon M$, n'a qu'un maximum et un minimum. On voit facilement qu'alors la courbe M est isotope à un cercle et n'est pas un nœud.

Ce résultat peut être étendu au cas général, de la manière suivante[1]: Supposons que la condition (32) soit satisfaite. Alors la variété M a ses nombres de Betti modulo 2 nuls pour les dimen-

---

[1] Pour les détails analytiques voir l'*appendice* à la fin de cet article.

sions 1, 2, ..., $n - 1$. Cela tient au fait que la fonction $f(x) = bx$, $x \varepsilon M$, pour un certain b, n'a qu'un maximum et un minimum et ne se réduit pas à une constante. Alors ses nombres de type k, $1 \leqq k \leqq n - 1$, au sens de M. MORSE sont tous nuls. L'énoncé est ainsi une conséquence immédiate des inégalités de M. MORSE, qui affirment que le nombre de type k d'une fonction continue sur M est au moins égal au nombre de Betti modulo deux pour la dimension k. Cette généralisation est aussi connue à M. MILNOR.

Il est peut-être justifié d'appeler courbure totale l'intégrale du premier membre de (31), contrairement à l'usage qui remonte à GAUSS. Les résultats ci-dessus montrent que c'est une notion féconde de laquelle on peut faire des applications simples.

7. — La question des implications globales de la métrique riemannienne d'une surface dans l'espace ordinaire a été beaucoup étudiée; deux des problèmes les plus importants sont ceux de réalisation et de rigidité. Quand $n \geqq 3$, la métrique riemannienne a des conséquences très fortes, même localement. Si M est de plus compacte, elle contient un point x_0 à une distance maximum d'un point fixe O de E^{n+N}. L'étude de la géométrie locale en ce point conduit aux résultats dont je vais parler [6].

Appelons d'abord une direction tangentielle direction asymptotique si elle annule toutes les formes Ψ_s:

$$\Psi_s = \sum_{i,j} A_{sij}\, \omega_i\, \omega_j = 0 . \tag{33}$$

Il est facile de voir qu'au point x_0 il n'y a pas de directions asymptotiques réelles. M. T. OTSUKI a démontré le lemme suivant[1]: Si le second membre de (17) est $\leqq 0$ pour tous les éléments plans déterminés par ξ, η, le système d'équations (33) a des solutions réelles non-triviales ω_i, si $N \leqq n - 1$. Ce lemme a été conjecturé par M. KUIPER et moi et démontré dans des cas simples. Il a comme conséquence le théorème géométrique suivant: Si l'espace tangent à chaque point de M contient un espace linéaire à q dimensions tel que la courbure riemannienne soit $\leqq 0$ pour tous ses éléments plans, alors $N \geqq q$. Il est clair que ce théorème n'est pas vrai localement.

---

[1] [13]. Une autre démonstration a été donnée par M. T. SPRINGER à Leiden, Hollande.

Une autre question de ce genre concerne l'entier $\mu(x)$ tel que $n - \mu(x)$ soit le nombre minimum de formes de Pfaff linéairement indépendantes au moyen desquelles les formes Ω_{ij} dans (14) peuvent être exprimées. Soit $n - \nu(x)$ le nombre minimum de formes de Pfaff linéairement indépendantes au moyen desquelles les formes différentielles ordinaires Ψ_s peuvent être exprimées. M. Kuiper et moi avons démontré les inégalités

$$\nu(x) \leqq \mu(x) \leqq N + \nu(x) \ . \tag{34}$$

On en déduit la conséquence géométrique suivante: Si $\mu_0 = \inf_{x \varepsilon M} \mu(x)$, alors $N \geqq \mu_0$. En particulier, si la métrique riemannienne induite de M est euclidienne, on a $\mu_0 = n$ et, par suite, $N \geqq n$. Ce résultat est dû à M. Tompkins; il généralise le fait bien connu qu'une surface développable dans l'espace ordinaire n'est pas close.

8. — A côté des invariants arithmétiques introduits ci-dessus, on en a d'autres qui jouent un rôle important dans la géométrie de M dans E^{n+N}. Nous avons vu, dans la formule (13), qu'il y a une forme différentielle quadratique ordinaire (la seconde forme fondamentale) associée à chaque vecteur unitaire normal. Les vecteurs normaux, dont la seconde forme fondamentale est nulle, appartiennent à un sous-espace linéaire de l'espace normal. Son espace perpendiculaire dans l'espace normal de M est appelé le premier espace normal. Sa dimension $p(x)$ est égale au nombre des formes linéairement indépendantes parmi les Ψ_s, d'où $p(x) \leqq n(n+1)/2$.

Un autre invariant arithmétique de M peut être introduit comme il suit. Choisissons les vecteurs e_s dans l'espace normal tels que $e_{n+1}, \dots, e_{n+p}$ soient dans le premier espace normal. Alors $\Psi_{n+1}, \dots, \Psi_{n+p}$ sont linéairement indépendantes et $\Psi_{n+p+1}, \dots, \Psi_{n+N}$ en sont des combinaisons linéaires. On considère les lignes de formes de Pfaff:

$$\omega_{i,n+1}, \dots, \omega_{i,n+p}, \ 1 \leqq i \leqq n \ . \tag{35}$$

Le plus grand entier $\tau(x)$, tel qu'il existe $\tau(x)$ lignes dont les $p\tau(x)$ formes sont linéairement indépendantes s'appelle le type de M au point x. On a évidemment $\tau(x) \leqq [n/p(x)]$, le dernier nombre étant le plus grand entier $\leqq n/p(x)$.

Cela étant, on a le théorème local suivant, qui est dû à M. ALLENDOERFER [1], [4]: Deux variétés isométriques, dont les premiers espaces normaux sont de même dimension, ne diffèrent que par un mouvement (propre ou impropre), si l'une d'entre elles est de type $\geqq 3$.

Ce théorème peut être considéré comme un théorème de rigidité locale. Bien entendu, la condition sur le type est très forte.

III

9. — Pour mieux comprendre la géométrie des sous-variétés, il serait utile d'étudier avec plus de détails le cas d'une surface dans $E^4 (n = N = 2)$. Nous faisons une autre hypothèse simplificatrice en supposant que M est orientée. Alors l'application tangentielle est $\tilde{T}: M \longrightarrow \tilde{G}(2, 2)$. Dans ce cas on peut donner de cette dernière variété une description simple. En effet, soient $p_{\alpha\beta}$, $1 \leqq \alpha, \beta \leqq 4$, les coordonnées plückeriennes dans $G(2, 2)$. Ce sont les coordonnées homogènes assujetties aux conditions

$$p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha} = 0 , \quad p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0 . \tag{36}$$

Nous les normalisons par la condition

$$\sum_{\alpha, \beta} p^2_{\alpha\beta} = 2 . \tag{37}$$

Alors les coordonnées $p_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux conditions (36), (37) peuvent être considérées des coordonnées dans $\tilde{G}(2, 2)$, de sorte que les deux plans orientés qui donnent le même plan non orienté aient des coordonnées différant par le signe. Introduisons des coordonnées nouvelles dans $\tilde{G}(2, 2)$ en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{12} + p_{34} , & x_2 &= p_{23} + p_{14} , & x_3 &= p_{31} + p_{24} , \\ y_1 &= p_{12} - p_{34} , & y_2 &= p_{23} - p_{14} , & y_3 &= p_{31} - p_{24} . \end{aligned} \tag{38}$$

Avec ces coordonnées x_λ, y_λ, $1 \leqq \lambda \leqq 3$, les conditions (36) et (37) sont équivalentes aux conditions

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 . \tag{39}$$