

# DE L'ADAPTATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES A LA RÉCEPTIVITÉ MENTALE DE L'ÉLÈVE

Autor(en): **Drenckhahn, Fr.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1942-1950)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515807>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

DE L'ADAPTATION  
DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES  
A LA RÉCEPTIVITÉ MENTALE DE L'ÉLÈVE<sup>1</sup>

PAR

FR. DRENCKHAHN, Flensburg (Allemagne féd.).

---

1.

Ainsi formulé, le sujet présuppose la possibilité d'adapter les mathématiques, en tant que matière à enseigner, à la compréhension de l'élève, elle-même déterminée par son développement.

Cette possibilité n'est pas admise ou est même niée par ceux qui font une distinction nette entre calcul et arithmétique, et entre étude des surfaces ou volumes et géométrie, considérant qu'il s'agit d'une étude, d'une part non encore mathématique et, d'autre part, mathématique d'une même matière. Cette nette distinction peut être faite de deux points de vue : celui du mathématicien pour lequel les mathématiques sont une matière développée et systématisée selon des considérations strictement scientifiques et celui du psychologue qui comprend la matière enseignée comme le résultat d'une intégration et d'une transformation dans et vers les mathématiques des façons enfantines de comprendre. L'un oublie qu'il s'agit d'*enseigner* les mathématiques, l'autre qu'il s'agit d'enseigner les *mathématiques*

Une ligne moyenne est suivie par ceux qui essaient de transformer la matière de manière qu'elle devienne assimilable aux

---

<sup>1</sup> Conférence donnée en allemand au Séminaire international sur la didactique des mathématiques, réuni à Genève du 3 au 8 mars 1952. Traduction de M. Alfred MARET, Bienne (Suisse).

différents stades par lesquels passe l'élève, mais qui s'en tiennent toutefois à l'ordre canonique des notions et à la systématique. On peut constater nettement une certaine hésitation chez les partisans de cette façon de procéder quant au bien-fondé scientifique de leur conception.

L'affirmation complète de la possibilité exprimée dans le sujet exige de considérer comme activité mathématique toute activité concernant le nombre et l'espace qui tend consciemment à former des notions précises, à développer des procédés et chercher des propriétés générales et à désigner la totalité des matières en question comme mathématiques.

Ceci implique pour le mathématicien un sacrifice considérable. Il doit accepter aussi, dans le cadre de la didactique des mathématiques, des notions incomplètes, des procédés expérimentaux et inductifs et des jugements assertoriques qu'il considère en tant que mathématicien comme non mathématiques et il doit les accepter non seulement comme stades intermédiaires sur la voie de la connaissance, mais comme stades finals correspondant aux possibilités de compréhension momentanée de l'élève. La réalisation de ces idées est sans doute rendue plus difficile par la façon dont l'école primaire et l'école secondaire se répartissent le travail, mais elle devient d'autant plus nécessaire que l'école, tant primaire que secondaire, est traversée par une coupure nette dans le développement psychique de l'élève, ce qui devrait être une raison pour les maîtres de tous les degrés d'aborder ces problèmes. A mon avis, la possibilité envisagée doit être le seul point de vue du pédagogue qui enseigne pratiquement les mathématiques et du didacticien des mathématiques qui s'occupe de l'élaboration des bases matérielles de cet enseignement.

En continuant notre développement, on en arrive à la nécessité de « mathématiques » de niveaux de connaissance différents. Ce n'est que si celles-ci existent comme bases matérielles, que les conditions de réalisation de la possibilité exprimée dans le sujet sont remplies. Et tout d'abord il ne s'agit pas pour nous de la matière prête à être enseignée, mais de la caractérisation de ses différents niveaux logiques, indépendamment de l'enseignement. La position du didacticien face à la matière est comparable en

ceci à celle du psychologue face à l'enfant; il s'agit de ce qui ressort immédiatement de la nature de la chose et non de ce qui est destiné d'emblée à l'enseignement.

## 2.

L'histoire des mathématiques nous fournit *des modèles de ces « mathématiques »*. — La mathématique égyptienne qui nous a été transmise par le *papyrus Rhind* est autre que celle des *Sulvasutras*, et toutes deux ont des caractères essentiellement différents de ceux de la mathématique de Héron et d'Euclide de l'époque alexandrine et de celle du Persan ALCHWARASMI de l'époque d'épanouissement de la culture arabe. Les mathématiques du XVIII<sup>e</sup> siècle ne sont pas non plus celles qui viennent d'être citées et celles de notre époque ne sont pas celles du XVIII<sup>e</sup> siècle.

Ce sont des mathématiques différentes quant à leur extension et leur contenu, quant à leur systématique en général et leur ordonnance en particulier, quant aux notions primitives et leurs modes de démonstrations et finalement quant aux motifs qui ont conduit à ces connaissances et aux applications qui en ont été faites.

Et pourtant c'est toujours la même mathématique, si l'on songe qu'il ne s'agit en somme que des mêmes matières vues en des perspectives différentes. Toujours on a  $2 \cdot 2 = 4$ ,  $a + b = b + a$ , la somme des angles d'un triangle  $= 180^\circ$  et pour le triangle rectangle  $a^2 + b^2 = c^2$ .

C'est de cette vision et de cette conception générale des mathématiques qu'il s'agit ici. Son histoire nous ouvre un vaste domaine: du concret à l'immatériel en ce qui concerne l'objectivité des faits, de l'empirisme au logique dans les procédés de recherche de propositions, du contenu matériel jusqu'au formel en systématique, des motifs pratiques à la spéculation dans les causes profondes; et il y a dans tout ceci un fait capital: les motifs, les notions, les procédés et la systématique forment à chaque époque et dans chaque cas un tout dont les parties sont organiquement équilibrées.

Les réflexions conduisant à ces résultats n'ont rien de commun avec la loi psychogénétique; ils apparaissent forcément à celui qui cherche à comprendre dans leur sens exact les écrits mathématiques.

Le sens du développement historique des mathématiques quant à l'objectivité des faits et des modes de recherche de propositions incite à les caractériser selon ces différents niveaux de connaissance. Même en admettant des transitions, on peut distinguer trois niveaux bien déterminés:

- a) le niveau réaliste ou expérimental-inductif,
- b) le niveau intermédiaire intuitif, où le terme intuitif se rapporte aussi bien aux notions qu'aux procédés,
- c) le niveau formel ou logico-déductif.

Les domaines (et la systématique) des trois niveaux ne se recouvrent nullement. Tout ce qui est naturellement expérimental-inductif appartient au premier niveau. Ainsi, ni la division d'une fraction par une fraction, ni le théorème de la somme des angles d'un triangle n'y appartiennent. Au deuxième niveau appartient, en plus de toute la matière du premier, tout ce qui est accessible à l'intuition prise dans le sens qu'on donne communément à ce terme dans l'expression « enseignement intuitif », par exemple la règle de division d'une fraction par une autre et les nombres relatifs, mais pas l'irrationnel, le théorème de la somme des angles d'un triangle, mais pas celui de Pascal ni celui de Brianchon. Le troisième niveau enfin englobe la totalité des mathématiques.

### 3.

Le passage de considérations historiques à des considérations épistémologiques rend nécessaire une remarque préliminaire.

Dans la totalité du complexe « les mathématiques comme science de l'ordre et de l'orientation et comme fonction ordonnatrice et de direction de notre être conscient », deux groupes d'expressions jouent un rôle particulier: perception (*Anschauung*) et concept, ainsi que perception et pensée. Perception et concept désignent deux pôles de la connaissance qui ne peuvent se manifester de façon indépendante l'un de l'autre, c'est-à-dire que

toute perception contient des éléments non perceptifs, des éléments conceptuels, et de même, chaque concept contient des éléments extra-logiques, perceptifs. Perception et pensée représentent en outre des pôles de nos moyens de connaissance ou de prise de conscience qui également ne se rencontrent jamais totalement séparés l'un de l'autre. La perception du concret comme activité sensorielle a besoin de représentations la précédant au même titre que la pensée conceptuelle, comme activité du cerveau, utilise la perception précédant la pensée.

Nous passons de la perception à la pensée et de la perception au concept de façon continue par des changements d'accentuation. Dans tous les cas on ne parlera pas, selon nos vues, de concept uniquement lorsqu'une définition correcte est présentée ou lorsqu'il est précisé par des concepts plus élémentaires, mais déjà lorsque la quantité d'éléments conceptuels dans sa perception, c'est-à-dire dans ses représentations vicariantes, garantit un emploi adéquat sans tout cela. Selon nos vues, la notion de nombre est un « *ens rationis cum fundamento in re* » au développement de laquelle ont participé des éléments intuitifs sous forme de suites d'abstractions sans pour autant que ceux-ci soient entièrement suffisants à former la notion de nombre; le point final doit être posé par une participation de la pensée sous forme d'un apport génétique-opérateur.

Grâce à sa genèse, la notion de nombre permet en tout temps des objectivations, mais finalement il n'a plus besoin de ces dernières pour se justifier. La même chose est valable pour les concepts géométriques.

Perception et pensée n'apparaissent pas ici isolément l'une à côté de l'autre comme activités sensorielles qui suivraient des impulsions périphériques, d'une part, et comme activités du cerveau provoquées centralement et dont on ne sait pas quand elles entrent en réaction mutuelle, mais comme des activités de notre conscience dans laquelle d'emblée elles ont d'étroites relations. Il y a lieu de supposer un centre particulier dirigeant l'activité cognitive qui coordonne perception et pensée et qui leur soit antérieur. En lui, on pourra aussi se représenter réunies les deux possibilités de manière qu'il en résulte une façon moyenne de concevoir les choses qui ne puisse être désignée ni

par perception ni par pensée. Nous avons choisi pour elle le terme « intuition ». Nous décrivons sa façon d'agir en disant qu'elle se rapproche aussi bien de la perception dans ce qu'elle a d'immédiat et d'original sans en avoir ses défauts — car elle ne vise pas le phénomène isolé, mais le concept — que de la pensée dans sa rigoureuse nécessité, sans toutefois avoir besoin d'analyser complètement le fait ni d'élaborer une suite de conclusions. Le terme « niveau intuitif » est ainsi suffisamment expliqué.

Je serai bref dans la caractérisation des trois niveaux et je renvoie, pour des détails, à d'autres publications antérieures et actuelles plus explicites.

*Le premier niveau.* — La notion de nombre du premier niveau peut être caractérisée en citant John-Stewart MILL: « Chaque nombre 1, 2, 3, etc. désigne un phénomène physique. » « 10 doit signifier 10 corps ou 10 sons ou 10 battements de cœur. »

La notion de nombre est dominée par l'idée de dénombrement: Les nombres sont des quantités, au contraire des nombres du calcul définis par des opérations arithmétiques (nombres algorithmiques), tels les nombres négatifs.

Le procédé expérimental-inductif est approprié à cette conception réaliste des nombres. John-St. MILL remarque à ce sujet: « Les vérités de cette science reposent entièrement sur la preuve sensible; elles sont démontrées par le fait que nos yeux ou nos doigts apprennent qu'un certain nombre d'objets, par exemple 10 balles, reste le même quels que soient les différents nombres obtenus en séparant de façon quelconque et en réunissant ensuite à nouveau ces objets. » De la même manière, on établit encore par exemple la commutativité de l'addition  $a + b = b + a$ .

La notion réaliste du nombre et sa déduction expérimentale-inductive se conditionnent mutuellement très étroitement. Le résultat en est une notion du nombre tout à fait particulière. La notion obtenue concrètement est appliquée finalement en dehors de ce domaine à des nombres plus grands — conséquence de la méthode inductive — et auxquels il manque toute base concrète.

Les fractions appartiennent à ce niveau pour autant qu'elles soient accessibles à cette façon de les concevoir. C'est le cas pour l'addition et la soustraction, la multiplication et la division par un nombre entier, mais pas plus loin. Au-delà, c'est le caractère de nombre opératoire qui prend le dessus.

En ce qui concerne leur déduction, les propositions de ce niveau ne sont jamais concluantes, tout au plus ont-elles un caractère d'assertion.

La géométrie s'adapte facilement au cadre esquissé pour l'arithmétique.

Elle est réaliste: ses notions sont tributaires du domaine manuel-perceptif: un triangle en bois ou en carton, ou un triangle dessiné n'a pas seulement une fonction de remplacement, mais il *est* un triangle, le triangle de ce niveau. Les notions sont aussi étroites: Le quadrilatère est un carré ou un rectangle, mais pas le quadrilatère général.

Son procédé est expérimental-inductif; il est déterminé par la construction et la mesure. Comme géométrie de la congruence, elle enregistre des procédés de construction et de calcul qui découlent des propriétés manifestes des objets géométriques. La façon de dessiner un rectangle suit les représentations obtenues en pliant un rectangle dans une feuille de papier: Le dessin se fait dans la succession exacte des actions du pliage. La formule pour le calcul de la longueur de la circonférence est obtenue en prenant la moyenne de nombreuses mesures, sans que soit reconnue la nécessité de la constance du rapport de la longueur de la circonférence à son diamètre.

La systématique suit les caractères extérieurs de la forme géométrique.

Pour terminer, nous ferons remarquer qu'aussi bien en arithmétique qu'en géométrie de ce niveau, on obtient des relations fonctionnelles simples de façon toute naturelle.

*Le deuxième niveau.* — Il est plus difficile de caractériser l'ensemble notionnel du deuxième niveau que celui du premier. Les nombres de ce niveau sont les nombres rationnels. Aux nombres entiers pris comme nombres quantitatifs viennent s'ajouter les nombres négatifs et les fractions comme nombres

algorithmiques. A ceux-ci manque en grande partie une base concrète. Ils ne sont donc plus accessibles à un procédé expérimental-inductif. On ne peut pas obtenir  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$  ou  $(-2)(-2) = +4$  par une action.

Ce fait exige une nouvelle définition du nombre à partir de l'opération. Il exige aussi un nouveau procédé. La notion de nombre dans sa nouvelle signification doit englober l'ancienne et doit, de par sa nature, être basée sur une règle de construction.

Dans l'addition et la soustraction des fractions, la notion de nombre a, en partie, perdu sa signification première, mais a gardé son sens opératoire. Il en va autrement dans la multiplication de deux fractions. Si le problème  $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$  doit garder un sens se rapportant à celui de la multiplication de deux nombres entiers, il se présente le principe de la permanence des opérations formelles de HANKEL qui, appliqué à notre problème, conduit par exemple à la suite

$$6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5}, \quad 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15},$$

où le dernier produit est obtenu par prolongement fonctionnel au delà de la définition primitive de la multiplication. La définition de la multiplication de deux fractions a en outre pour résultat une plus grande précision et un approfondissement de la notion de fraction.

Le procédé de ce niveau dépasse le procédé inductif précédent qui se rapportait toujours en fin de compte à des objets concrets, alors qu'il s'agit maintenant de données formelles. La part de la réflexion dans ce procédé cognitif formel-inductif est donc beaucoup plus grande que dans le cas concret-inductif — et avant tout: il va très profondément et est essentiel, comme le montre le développement de l'arithmétique scientifique du XIX<sup>e</sup> siècle.

Non seulement les nouveaux nombres demandent à être soumis à une nouvelle perspective, mais aussi les nombres naturels. Ainsi, par exemple, la justification expérimentale-inductive de la commutativité de l'addition et de la multiplication ne correspond plus à ce niveau de la connaissance.

Ainsi, on peut faire au sujet de la commutativité de la multiplication les réflexions suivantes :

Si l'on ordonne sur une feuille de papier 3 lignes superposées de 4 points chacune, alors 3.4 points est leur nombre total. Si l'on tourne la feuille dans son plan de  $90^\circ$ , on aura 4 lignes de 3 points, leur nombre total étant de 4.3 points. Aucun point n'étant venu s'ajouter ni aucun n'ayant été perdu pendant la rotation, on aura  $3.4 = 4.3$ . Contrairement au procédé expérimental-inductif, la relation  $3.4 = 4.3$  est obtenue directement sans avoir calculé les deux produits.

La répétition de ce procédé, en posant un nombre quelconque de points par ligne — que nous désignons par  $b$  pour pouvoir en parler — et un nombre quelconque de lignes que nous désignons par  $a$ , donnera  $a.b = b.a$ . Les lettres  $a$  et  $b$  représentent tous les nombres 1, 2, 3, ... La commutativité a donc une portée générale non seulement de fait, mais nécessairement.

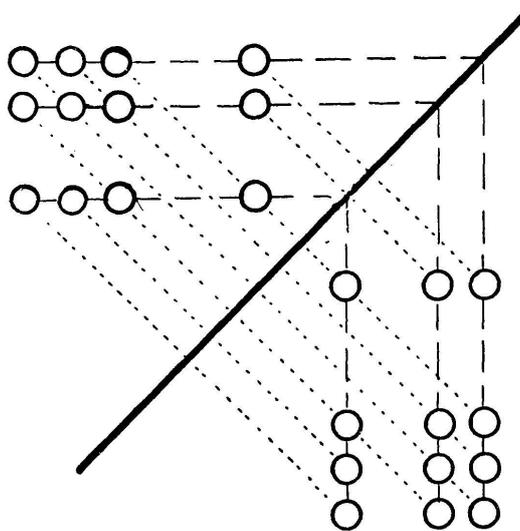


Fig. 1.

$$a . b = b . a$$

Le procédé peut encore être affiné et devenir une véritable démonstration par correspondance biunivoque des points des deux ensembles (voir fig. 1).

En se rapportant aux points visibles, ce procédé intuitif est proche du procédé expérimental qui actionne des objets concrets et par la correspondance des points de  $a.b$  et de ceux de  $b.a$  du procédé inductif. Il y a la différence essentielle que la démonstration intuitive ne se contente pas de montrer par quelques exemples la justesse de  $a.b = b.a$ , mais permet, par une construction réfléchie, de saisir ce fait dans sa généralité et de passer ainsi du problématique à l'apodictique.

Par opposition à la démonstration logico-discursive de cette proposition, la démonstration par correspondance exige que le tout soit pris en considération dès le début jusqu'à la fin et elle

conduit ainsi au résultat par une vision simultanée des différents éléments (Wesensschau) de sorte qu'on est enclin à parler d'un procédé global pour marquer ce qui le différencie du procédé discursif qui s'attache aux éléments vus isolément. Nous avons déjà signalé que la démonstration intuitive utilise la réflexion, mais dans la démonstration logique celle-ci est plus dépendante du système scientifique.

En géométrie tout se passe de façon analogue.

Dans ses concepts prédomine le moment géométrique-constructif qui se forme à la suite de représentations idéalisées de mouvements (par exemple retournement, rotation, translation) et de certaines formes fondamentales (par exemple point, segment, partie de plan). Les concepts atteignent un degré suffisant de généralité qui est obtenu par étapes: après, et à la suite de triangles particuliers, se développe la notion de « triangle » qui s'applique à tout triangle.

A cette formation des concepts par étapes correspond un échelonnement de propositions et de connaissances. Un théorème trouvé tout d'abord pour un cas spécial est progressivement étendu à des cas plus généraux et devient finalement tout à fait

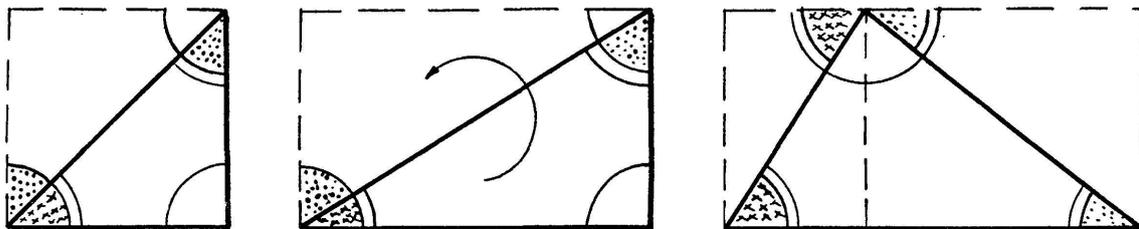


Fig. 2.

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = 45^\circ, \quad \gamma = 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ [= \gamma] \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

général. Recherche et démonstration d'une propriété marchent ensemble et se pénètrent mutuellement; chaque étape prépare la suivante (voir fig. 2).

La part principale dans la recherche de nouvelles relations revient — à côté de l'imagination et du pouvoir combinatoire — à la pensée fonctionnelle, alors que la perception spatiale — et non la pensée formelle — assure la valeur de vérité des trou-

vailles. En un mot : le procédé est global dans le sens donné à ce terme pour l'arithmétique et authentiquement intuitif par la liaison intime de concept et fonction. Ceci est encore accentué par le fait que lors de la formation d'un concept certaines représentations, comme par exemple celle d'un mouvement déterminé, jouent un rôle décisif dans la découverte d'une propriété. Le caractère apodictique des connaissances ne peut pas être nié.

Au centre des préoccupations se trouvent les propriétés de forme des figures parmi lesquelles les surfaces rectangulaires et les corps polyédriques occupent une place en vue (voir fig. 3).

La systématique suit le principe de la forme.

*Le troisième niveau.* — Celui-ci a été caractérisé comme formel par rapport aux concepts et comme logique par rapport aux procédés. Ceux-ci sont « élémentaires ». Il est superflu d'entrer ici dans des détails.

La subdivision des mathématiques en trois niveaux suivant leur logique objective manifeste un pouvoir de modulation des matières qui nous permet de choisir ce qui est le mieux adapté aux exigences de l'enseignement.

La mathématique du premier niveau a été développée par la pratique de façon à peu près satisfaisante. Des divergences règnent encore au sujet de sa limite supérieure. Le troisième niveau a été élaboré par la science. Le niveau moyen n'est pas encore bien développé et je vois dans ce fait l'une des causes primordiales de l'enseignement actuel peu satisfaisant des écoles primaires supérieures et des classes correspondantes de l'école secondaire.

Il est évident que chacun des trois niveaux peut encore être subdivisé quant à la « rigueur » de ses conceptions. En principe, la mathématique est à même, grâce à sa capacité de modulation, de satisfaire les vœux de la pédagogie. Il appartient essentiellement à la didactique des mathématiques de développer dans le

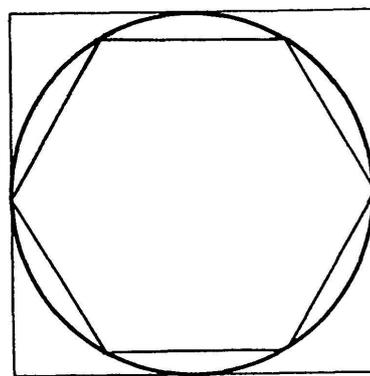


Fig. 3.

$$3d < \text{circ.} < 4d$$

$$\text{circ.} = 3, \dots d$$

détail le premier et le deuxième niveaux sans, tout d'abord, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer ailleurs, prendre égard à la possibilité d'utilisation dans l'enseignement.

## 4.

Quant à savoir lequel des trois niveaux des mathématiques sera mis à la base de l'enseignement, cela dépendra de *considérations d'ordre psychologique*. Il y va du développement intellectuel de l'élève qui, dans ses états momentanés, est la résultante de facteurs intérieurs et extérieurs. Les deux composantes agissent étroitement l'une sur l'autre: les impulsions intérieures vont à la rencontre des excitations et impressions extérieures et celles-ci à leur tour appellent peut-être de nouvelles forces.

Ce qui nous intéresse, ce sont les changements intervenant au cours du développement, aussi bien ceux qui concernent l'attitude générale réceptive et assimilatrice de l'enfant face à des faits nouveaux, par exemple ses motifs et ses formes de travail, que ceux qui se rapportent plus particulièrement aux mathématiques. Cependant, nous nous limitons aux derniers, et encore pour autant qu'il s'agisse du temps de l'école obligatoire, c'est-à-dire de la 6<sup>e</sup> à la 15<sup>e</sup> année.

D'après mes expériences, le développement psychique de l'individu présente dans cette période deux coupures importantes, à savoir vers la 7<sup>e</sup> et la 12<sup>e</sup> (jusqu'à la 13<sup>e</sup>) année. Je vois encore une autre coupure dans la 15<sup>e</sup> année, qui se manifeste donc comme telle pendant l'enseignement secondaire. Le comportement général dans l'élaboration des connaissances mathématiques pendant la 6<sup>e</sup> année étant sensiblement le même que pour la période de la 7<sup>e</sup> à la 12<sup>e</sup> année, malgré certaines particularités, nous en arrivons, ici aussi, à considérer trois étapes: de la 6<sup>e</sup> à la 12<sup>e</sup> année, de la 12<sup>e</sup> à la 15<sup>e</sup> année et la période au-dessus de la 15<sup>e</sup> année. On ne peut passer sous silence que ces indications approximatives contiennent une large part de généralisation. Mais elles permettent d'établir de nombreuses relations avec nos développements mathématiques précédents.

Car, du point de vue de la conception mathématique, la période allant de la 6<sup>e</sup> à la 12<sup>e</sup> année correspond essentiellement

au premier niveau: elle est — *cum grano salis* — réaliste et expérimentale-inductive; la période de la 12<sup>e</sup> à la 15<sup>e</sup> année correspond au deuxième niveau: elle est — tout autant — intuitive, et, à partir de la 15<sup>e</sup> année, s'établit la correspondance avec le troisième niveau: cette période peut être conceptuellement formelle et logico-déductive, pour autant que les causes qui produisent ce stade se présentent. Sans cette influence, l'élève reste encore, après la 15<sup>e</sup> année, attaché au deuxième niveau: il pensera en percevant, agira pratiquement et portera des jugements sur des faits. On peut dire, non sans raison, que le comportement général du premier niveau vise l'habitude et l'expérimentation; celui du deuxième niveau, la compréhension et l'intelligence et le troisième niveau, finalement, la pénétration réfléchie et la connaissance.

D'une façon générale, on peut dire des deux premiers niveaux qui nous concernent ici qu'ils demandent toujours un certain temps de rodage jusqu'à ce que les formes de travail et de connaissance deviennent conscientes. Ce n'est, dans ces deux périodes, que sur la base de nombreuses expériences que l'on verra clairement quels sont les jugements qui ont un sens et par quels moyens ils sont obtenus.

A la fin de chaque période, les méthodes qui leur correspondent sont maniées avec quelque assurance, mais seulement dans les domaines rendus familiers par l'expérience et pour des relations connues. Même des adultes craignent d'employer la notion de pour-cent lorsque le taux prend une valeur qui sort du cadre habituel ou doit être appliqué à des matières qu'ils ne connaissent pas complètement. L'application des procédés du niveau suivant provoque généralement des échecs. Ceci vaut, par exemple, pour le cas où, au deuxième niveau, on demande tout à coup une déduction dans un domaine auquel on n'est pas habitué, voire la faculté de concevoir une suite de déductions. Ce n'est pas sans raison qu'on répétera alors parfois l'adage bien connu: « Ne réfléchis pas, ce sera faux de toute façon. » Il est très instructif de constater que de tels manquements se trouvent dans l'histoire des mathématiques.

De toute la richesse des problèmes significatifs d'ordre simultanément psychologique et mathématique, nous n'en

traiterons brièvement que deux : la représentation fonctionnelle et la pensée logico-formelle.

La représentation fonctionnelle apparaît déjà au premier niveau, la pensée logico-formelle n'est pas encore générale au deuxième niveau.

La représentation fonctionnelle se rattache à la relation « si... alors » qui s'introduit au premier niveau avant la relation de causalité. Contrairement à cette dernière, elle est réciproque. Elle demande premièrement la prise en considération de deux grandeurs, dans le concret, par exemple, une quantité et le prix total correspondant et deuxièmement leur mise en relation. Mais il ne suffit pas de considérer cette mise en relation comme un fait isolé, il est nécessaire de la voir comme la correspondance de deux séries de valeurs. L'activité intellectuelle qui se manifeste dans cette sorte de jugement et de raisonnement se situe dans le plan expérimental-inductif.

Souvent on parle d'une pensée logique de l'élève dans l'abstrait pour les degrés supérieurs de l'école primaire ou les classes correspondantes. Cette façon de s'exprimer est fautive et induit en erreur.

L'analyse du comportement des élèves dans l'appréciation de relations abstraites montre que, dans les déductions soi-disant formelles, l'élève a généralement recours à des expériences personnelles correspondant à la situation du problème ou à des analogies pour autant qu'il y ait déduction. Il s'agit donc, en somme, non pas d'une pensée logico-formelle, mais logico-concrète. C'est encore dans une autre direction que les raisonnements de l'élève ne portent pas le caractère logico-formel — du moins, pas au début, et pas d'une façon générale — car il formule souvent ses déductions comme jugement global de la situation, pour autant même qu'il n'applique pas simplement un schème appris, en ne distinguant pas exactement les prémisses de la conclusion. Les prémisses générales  $a = b$  et  $b = c$ , par exemple, conduisent l'élève tout au plus à  $a = b = c$  et non pas, comme le veut la logique pure, à  $a = c$ .

Le comportement des élèves entre la 12<sup>e</sup> et la 15<sup>e</sup> année dans l'enseignement mathématique nous présente ce niveau comme une période de grande variabilité. Ce fait, ainsi que son caractère

intermédiaire, rend difficile une brève étude de ce niveau. Elle est même impossible actuellement, car les questions d'ordre psychologique qu'il soulève n'ont été que peu traitées, contrairement à celles du premier niveau, pour lequel nous disposons des larges recherches de J. PIAGET et son école (B. INHELDER).

Les considérations faites ci-dessus peuvent être récapitulées de la manière suivante: Il apparaît possible de faire concorder à tout échelon les matières mathématiques enseignées et les conceptions des élèves particulières à leur âge. Une collaboration étroite entre didactique des mathématiques et psychologie génétique peut réaliser pratiquement cette concordance. La didactique fixe les bases matérielles et la psychologie les principes du choix.

## 5.

Au delà d'une *adaptation de la matière* dans sa totalité, il est possible et nécessaire de l'adapter *en détail* aux possibilités conceptuelles de l'élève. Elle se manifestera dans la façon méthodique de préparer la matière à enseigner eu égard aux possibilités cognitives et de travail de l'élève.

Il s'agit ici, tout d'abord, de la création mathématique comme telle, sans conclusion aucune quant à la façon d'enseigner. H. FEHR a fait rapport dans *L'Enseignement mathématique* (10, 1908) sur les résultats d'une enquête portant sur les méthodes de travail des mathématiciens. ARCHIMÈDE, F. KLEIN et H. POINCARÉ et d'autres nous ont également donné à ce sujet des éclaircissements très utiles.

ARCHIMÈDE: « ... Car bien des choses qui me devinrent claires par la mécanique, furent par la suite démontrées en géométrie... car il est plus facile, lorsqu'on s'est fait par cette méthode une idée des questions, de faire la démonstration que de la trouver sans une idée provisoire. » (J. L. HEIBERG et H. G. ZEUTHEN, Eine neue Schrift des Archimedes. *Bibliotheca Mathematica*, 3<sup>e</sup> suite, vol. VII, 1907, p. 323 et suiv.)

KLEIN: « Le savant lui-même ne travaille pas du tout en mathématiques, comme d'ailleurs dans chaque science, selon cette méthode strictement déductive, mais il utilise essentielle-

ment son imagination et avance inductivement, se basant sur des moyens heuristiques.» (KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, 1<sup>er</sup> vol., Leipzig, 1933, p. 224.)

Sans égard pour nos propres conceptions de la fonction cybernétique de l'intuition, de son rôle dans la compréhension des problèmes et de sa part dans une perspective visant l'essentiel, nous pouvons interpréter les déclarations d'Archimède et de Klein de façon que pour le mathématicien actif il est pour le moins utile de traverser, dans chaque problème particulier, toute la gamme allant du concret et de l'expérimental-inductif au conceptuel et logique. Le sens de ce procédé est clair d'après ce qui précède: Dans toute pensée logico-déductive se trouvent des éléments concrets et expérimentaux que, même rudimentaires, le mathématicien actif doit se procurer pour pousser ses pointes dans l'inconnu.

Appliqué à notre problème de méthode d'enseignement, ceci signifie que l'élève qui est au deuxième niveau doit saisir l'occasion de se procurer d'abord de tels éléments avant d'appliquer la forme de connaissance adéquate à son niveau aux nouvelles matières. Cette conclusion concorde avec l'antériorité de l'œuvre et de l'action devant le concept et l'écriture dans l'acquisition de connaissances.

Les caractères essentiels du travail du mathématicien sont l'activité et la responsabilité: activité allant d'un problème posé soi-même à une solution élégante, et responsabilité en renonçant à d'éventuels « témoins de cour ».

Ils devraient aussi appartenir à la conception que l'élève se fait de son travail et, d'après les résultats de la psychologie, il peut en être ainsi. Sans doute ne faut-il pas avoir trop de confiance quant à la possibilité de l'élève de se poser lui-même des problèmes ou d'en entrevoir à partir d'une certaine situation: Ce rôle est tenu généralement par le maître qui posera, en toute connaissance de cause, le problème devant motiver psychologiquement l'activité de l'élève et l'inciter à pousser de façon indépendante jusqu'au cœur même du problème mathématique. Généralement le saut du non-savoir au savoir et du non-pouvoir au pouvoir sera trop grand pour que l'élève puisse le franchir d'un seul coup. Alors il sera nécessaire de subdiviser la matière

en problèmes structurés de façon qu'ils assurent la connaissance devant être acquise.

Finalement: le mathématicien acquiert le sentiment de sécurité, s'il vérifie ses résultats, s'il les classe et les applique. Ceci est aussi valable pour l'élève. Et la conception de travail du mathématicien a subi une transformation: elle n'est plus « attaquante », mais « posée ». Parallèlement, on n'exige plus de l'élève des résultats dus à l'indépendance, mais dus à l'intelligence et la compréhension, ce qui se manifestera sans équivoque dans les problèmes qui seront donnés.

---

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

### A propos de mon récent article sur le tétraèdre <sup>1</sup>.

La proposition du paragraphe 5 (p. 55) doit être remplacée par la suivante.

**THÉORÈME IV.** — *Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre isocèle ABCD aux centres  $A_1, B_1, C_1, D_1$  des cercles circonscrits aux faces opposées sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde. Elles sont concourantes si le tétraèdre est régulier et réciproquement.*

M. G. GLAESER vient, en effet, de démontrer, à propos d'une question que nous avons posée dans *L'Intermédiaire des Recherches Mathématiques*, que les SEULS tétraèdres non dégénérés tels que les droites  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  joignant les sommets aux centres des cercles circonscrits aux faces opposées soient hyperboloïdiques sont le tétraèdre *orthocentrique* et le tétraèdre *isocèle*. (*Revue de Mathématiques spéciales*, 1952 — 269). Si les droites  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  concourent, ces deux tétraèdres sont réguliers et réciproquement.

Août 1952.

V. THÉBAULT.

---

<sup>1</sup> Sur le tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux égales. (*L'Ens. mathém.*, vol. 39, fasc. 1-2-3, p. 50-60.)