

SUR L'EMPLOI DES MÉTHODES D'INTERPOLATION DANS LES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Autor(en): **Lévy, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1942-1950)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515794>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR L'EMPLOI DES MÉTHODES D'INTERPOLATION DANS LES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PAR

Paul LÉVY (Paris).

1. — Les analystes, jusqu'ici, ont surtout étudié les problèmes d'interpolation relatifs aux fonctions d'une variable, et ont considéré spécialement des problèmes tels que le suivant : chercher un polynôme de degré donné qui représente aussi bien que possible, soit une fonction parfaitement connue, soit un certain nombre de valeurs connues, soit exactement, soit d'une manière approchée. Parfois l'on cherche à rendre le maximum de l'erreur aussi petit que possible ; dans d'autres cas c'est l'erreur quadratique moyenne que l'on cherche à rendre minima. C'est alors le problème des moindres carrés, beaucoup plus simple que le précédent, et dont la solution s'étend aisément au cas où l'on considère, pour représenter la fonction inconnue, d'autres types de fonctions que des polynômes.

Tous ces problèmes ont donné lieu à des théories mathématiques très intéressantes, mais souvent peu utiles pour les applications, parce qu'elles reposent sur le choix arbitraire d'un type de formule le plus souvent mal adapté aux applications que l'on a en vue. L'histoire des applications des mathématiques donne de nombreux exemples de recherches orientées dans une mauvaise voie par le choix d'une mauvaise formule. Le plus célèbre est celui des efforts faits par les prédécesseurs de Kepler pour représenter les mouvements des planètes par des combinaisons de mouvements circulaires. De très nombreux exemples plus

récents nous ont persuadé qu'il est le plus souvent illusoire de chercher à représenter une fonction inconnue par une formule contenant un certain nombre de paramètres indéterminés si l'on n'a pas des raisons *a priori* de croire que le type de formule adopté est celui qui convient. Il arrive souvent qu'on ne reconnaisse pas des fonctions excessivement simples, mais d'un type différent de celui adopté. Dans d'autres cas, comme par exemple dans les questions de balistique qui introduisent des fonctions empiriquement déterminées et manifestement irréductibles aux fonctions simples qu'étudie l'analyse, on cherchera en vain une bonne représentation de la fonction connue à l'aide de fonctions antérieurement connues.

Notre conclusion est que, dans chaque cas, il faut d'abord demander à la théorie tout ce qu'elle peut donner. Si elle conduit à une formule de type bien défini, on demandera à l'expérience de déterminer les coefficients que la théorie a laissés indéterminés; en principe on appliquera la méthode des moindres carrés. Au contraire, *en cas d'échec provisoire ou définitif de la théorie, on se tournera délibérément vers l'empirisme.*

Nous entendons par là qu'il faut renoncer — sauf dans les cas exceptionnels où l'on croirait reconnaître une courbe très simple — à l'emploi d'une formule qui serait valable dans tout le domaine d'existence de la fonction étudiée. On pourra adopter des formules dont chacune aura un domaine d'application restreint; on pourra aussi renoncer à toute formule, et se souvenir que le véritable problème est le plus souvent d'obtenir une table de valeurs numériques, ou une courbe graphiquement déterminée.

2. — Naturellement le problème de la détermination d'une fonction par quelques valeurs isolées, complétées ou non par les valeurs correspondantes de la dérivée, n'est pas un problème bien posé. Il faut le préciser par un principe d'interpolation.

Au lieu du principe classique, qui était l'adoption d'un type de formule choisi *a priori*, nous proposons le principe suivant: *chercher la courbe, ou surface la plus régulière possible, qui soit compatible avec les données expérimentales.* Cette position du problème convient aussi bien au cas où les données sont exactes qu'au cas où elles sont approchées.

Il reste à définir la régularité. Il nous semble qu'on peut le plus souvent considérer que : *une fonction régulière est celle dont la dérivée seconde varie lentement*. Cette définition est la traduction en termes mathématiques d'une remarque de bon sens : on ne fera pas faire à la courbe un détour qui implique une courbure momentanément élevée, donc rapidement variable, pour la faire passer par un point qui ne serait pas déterminé avec certitude. Au contraire, si plusieurs points consécutifs conduisent à dessiner un arc de courbe le long duquel la dérivée seconde sera élevée, on ne devra pas hésiter à admettre cette conclusion si le nombre de ces points est assez grand ; la dérivée seconde reste alors élevée assez longtemps.

Naturellement, le principe que nous venons d'énoncer peut comporter de nombreuses variantes. Si les points connus sont rapprochés, la régularisation par l'intermédiaire d'une dérivée est d'autant plus satisfaisante que cette dérivée est d'ordre plus élevé ; mais si l'on ne dispose que de points espacés les uns des autres, l'emploi des dérivées d'ordres élevés est illusoire. Il nous semble en principe suffisant d'introduire les dérivées secondes ; dans certains cas les dérivées premières suffiront, ou même on se contentera d'une régularisation directe.

3. — *Fonctions d'une variable*. — Etudions d'abord le cas d'une fonction d'une variable $y = f(x)$, exactement connue pour des valeurs de x en progression arithmétique [$x_n = x_0 + nh$; $y_n = f(x_n)$]; il pourra arriver que les valeurs de $y'_n = f'(x_n)$ soient connues aussi. Nous distinguerons trois cas suivant les valeurs de h .

Premier cas. C'est le cas où h est assez petit pour que les points connus dessinent bien la courbe, dont on pourra constater la régularité, et l'on se contentera d'une interpolation linéaire pour chacun des intervalles séparés par ces points.

Il est d'ailleurs facile de se rendre compte de l'erreur commise. Si les y'_n sont connus directement, on prendra $\frac{y'_{n+1} - y'_n}{h}$ comme valeur approchée de la dérivée seconde dans l'intervalle (x_n, x_{n+1}) ; si au contraire y'_n n'est pas connu, on opérera

d'une manière analogue en prenant $\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$ comme valeur approchée de y'_n , et on en déduira la dérivée seconde comme dans le premier cas. Dans les deux cas, la valeur à peu près constante m de y'' étant connue, le maximum de l'erreur est $\frac{mh^2}{8}$.

Second cas. C'est celui où l'approximation donnée par l'interpolation linéaire ne suffit pas, mais où y'' varie assez peu, dans chaque intervalle partiel, pour qu'on puisse remplacer la courbe par une autre qui comporte une dérivée seconde constante ou lentement variable. Dans ce cas, nous indiquerons successivement trois méthodes.

1° Les valeurs de la dérivée aux points x_n étant connues directement ou déterminées comme dans le premier cas, la première méthode, proposée par M. Montel, consiste à prendre pour la courbe $y = f(x)$, dans l'intervalle (x_n, x_{n+1}) l'arc de la parabole d'axe oblique déterminée par les deux points d'abscisses x_n et x_{n+1} et les deux tangentes en ces points: la tangente à cet arc parallèle à sa corde se détermine immédiatement, puisque son point de contact est le milieu de la médiane du triangle déterminé par les deux points et les deux tangentes connues; on a ainsi rapidement un tracé graphique précis. Il importe peu que l'axe de cette parabole soit oblique; y'' variant peu, et ayant la valeur moyenne voulue, l'approximation est satisfaisante.

2° La seconde méthode consiste à faire passer la courbe par le centre de gravité G_n des quatre points suivants: points donnés A_n et A_{n+1} d'abscisses x_n et x_{n+1} et points T'_n et T'_{n+1} de même abscisse $\frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ situés sur les tangentes à la courbe en A_n et A_{n+1} ; deux des trois manières de grouper ces points deux à deux donnent des constructions graphiques très simples. Le point ainsi obtenu est situé sur la parabole cubique passant par A_n et A_{n+1} et y ayant les tangentes connues; il est exact dans l'hypothèse d'une variation linéaire de y'' ; l'approximation ainsi obtenue peut être assez grande. N'ayant à interpoler ensuite que

dans des intervalles deux fois plus petits, pour chacun desquels on connaît deux points extrêmes et une des tangentes, on pourra dans chacun d'eux supposer y'' constant, ce qui donne une construction très simple des points d'abscisses $x_n + \frac{h}{4}$ et $x_{n+1} - \frac{h}{4}$.

3° La troisième méthode est une variante de la seconde, préférable aux deux précédentes si les y'_n ne sont pas connus. On utilisera alors quatre points consécutifs A_{n-1} , A_n , A_{n+1} et A_{n+2} ; M_n désignant le milieu de $A_n A_{n+1}$ et M'_n celui de $A_{n-1} A_{n+2}$, on fera passer la courbe par le point $A_{n+\frac{1}{2}}$ défini par

$$M_n A_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} M'_n M_n$$

qui est situé sur la parabole cubique déterminée par les quatre points A_{n-1} , A_n , A_{n+1} , A_{n+2} . On déterminera de la même manière $A_{n-\frac{1}{2}}$; on admettra que la tangente en A_n est parallèle à $A_{n-\frac{1}{2}}$ et $A_{n+\frac{1}{2}}$, et on terminera comme dans la méthode précédente.

Cette méthode peut être appliquée pour des valeurs de h deux fois plus grandes que celle de M. Montel, et en ne donnant pas une erreur plus grande.

Troisième cas. C'est celui où h est trop grand pour l'application des méthodes appliquées dans les cas précédents. Il faut alors étudier effectivement les variations de y' ou y'' ; mais bien entendu cela même n'est possible que si h n'est pas exagérément grand; il faut assez de points connus pour pouvoir dessiner la courbe.

Commençons par le cas où l'on se contente d'une régularisation par l'intermédiaire de y' .

1° Si l'on connaît les valeurs des y'_n , on construira en partant de ces valeurs la courbe donnant y' en fonction de x ; suivant la précision dont on aura besoin, on la tracera à vue, ou l'on emploiera l'un ou l'autre des procédés que nous venons de décrire pour la courbe donnant y . On pourrait songer à utiliser aussi les différences $y_{n+1} - y_n$; mais elles ne donnent qu'une valeur approchée de $hy' \left(n + \frac{1}{2}\right)$, et si l'on connaît les valeurs

exactes de y'_n , il semble préférable de ne pas utiliser les différences. Une fois y' obtenu, on déterminera quelques points intermédiaires entre A_n et A_{n+1} ; on peut par exemple déterminer $y\left(n + \frac{1}{4}\right)$, $y\left(n + \frac{1}{2}\right)$ et $y\left(n + \frac{3}{4}\right)$, en utilisant successivement les valeurs de $y'\left(n + \frac{1}{8}\right)$, $y'\left(n + \frac{3}{8}\right)$, $y'\left(n + \frac{5}{8}\right)$. On devra vérifier que $y_{n+1} - y\left(n + \frac{3}{4}\right)$ est à peu près égal à $hy'\left(n + \frac{7}{8}\right)$, et, s'il n'en est pas ainsi, on admettra que l'erreur se répartit également entre les quatre intervalles partiels considérés. On corrigera ainsi l'erreur que l'on aura commise en confondant, pour chaque intervalle partiel, la valeur moyenne de y' et sa valeur au milieu de l'intervalle. On aura ainsi des valeurs de y assez nombreuses pour pouvoir interpoler graphiquement à vue, ou appliquer une des méthodes indiquées plus haut.

Si l'on ne connaît pas les y'_n , on utilisera pour déterminer y' la suite des valeurs de $y_{n+1} - y_n$, qui sont des valeurs approchées de $hy'\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Il y aura ainsi une erreur systématique, un peu plus forte que celle commise dans le cas précédent, mais que l'on corrigera de la même manière au moment de la détermination de $y\left(n + \frac{1}{4}\right)$, $y\left(n + \frac{1}{2}\right)$ et $y\left(n + \frac{3}{4}\right)$, de sorte que le résultat peut être presque aussi précis.

2° Si l'on veut mettre en évidence les variations de y'' , les principes sont absolument analogues. Ou bien on partira de $y'_{n+1} - y'_n$, valeur approchée de $hy''\left(n + \frac{1}{2}\right)$; ou bien de $y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n$, valeur approchée de $h^2 y''_n$. Dans ce second cas, on pourra augmenter la précision en remarquant que l'erreur $y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n - h^2 y''_n$ est sensiblement $\frac{h^4}{12} y^{(4)}_n$, donc sensiblement

$$\frac{1}{12}(\delta_{n+1} + \delta_{n-1} - 2\delta_n) \quad (\delta_n = y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n),$$

ce qui donne un moyen très simple de la corriger. Il n'y aura plus ensuite de difficulté à remonter de y'' à y' , puis à y ; si aucune valeur exacte de y' n'est connue, on pourra avoir fait sur y une erreur linéaire, facile à corriger après intégration.

Naturellement ces méthodes sont susceptibles de nombreuses variantes; le choix de la meilleure méthode dépendra de la valeur de h , de la précision désirée, et de l'aspect de la courbe.

4. — Supposons maintenant que les valeurs connues y_n ne soient que des valeurs approchées de $f(x)$, pour les valeurs x_n de x , les x_n restant en progression arithmétique; nous supposons que les $f'(x_n)$ ne soient pas connus [dans le cas contraire, on étudierait d'abord $f'(x)$, et l'on n'aurait ensuite qu'une constante d'intégration à déterminer].

Des problèmes bien différents se posent suivant l'ordre de grandeur de h , celui auquel on peut s'attendre pour les erreurs $y_n - f(x_n)$, et l'idée que l'on a *a priori* des oscillations de la courbe. Si nous portons notre attention sur l'arc de courbe compris entre deux points d'inflexion consécutifs, il est clair qu'il ne peut être dessiné, même assez grossièrement, que par trois ou quatre points exacts ou par un plus grand nombre de points approchés; si l'on n'a pas un nombre suffisant de points pour chaque arc convexe, on ne peut pas tracer la courbe, et l'on pourra se demander si une oscillation apparente est réelle ou provient des erreurs d'observation; c'est une question que les mathématiques ne permettent pas de résoudre avec certitude.

Si au contraire h est petit, mais les erreurs grandes, on aura un nuage de points dans lequel on tracera un chemin moyen. Si l'on veut plus de précision que n'en donne un tracé à vue, on pourra par exemple remplacer chaque valeur y_n par la moyenne de plusieurs nombres consécutifs, par exemple par

$$\eta_n = \frac{1}{5}(y_{n-2} + y_{n-1} + y_n + y_{n+1} + y_{n+2})$$

ou par une moyenne pondérée telle que

$$\eta'_n = \frac{1}{16}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + 6y_n + 4y_{n+1} + y_{n+2}) .$$

On pourra d'ailleurs ne conserver qu'une partie des points ainsi marqués, par exemple associer à chacune des abscisses x_{3p} la valeur

$$\frac{1}{5}(y_{3p-2} + y_{3p-1} + \dots + y_{3p+2}) .$$

Après cette opération préliminaire, on se trouvera ramené au cas normal où les points connus sont moins nombreux et les erreurs moins grandes. Observons seulement que cette réduction comporte une erreur systématique qu'il est facile de corriger après coup; ainsi η'_n a chance de donner une bonne valeur, non pour $f(x_n)$, mais pour $f(x_n) + \frac{h^2}{2} f''(x_n)$.

Il nous reste donc à traiter le cas où l'on connaît, pour chaque arc convexe de la courbe à tracer, au moins 5 ou 6 points qui, malgré quelques erreurs, en indiquent la forme générale. S'il n'y en a pas plus, on ne pourra guère faire qu'un tracé à vue; s'il y en a 10 ou 15, on pourra utiliser les différences premières; s'il y en a 20 ou plus, on pourra utiliser les différences secondes.

Dans les deux cas on remarque que, sauf pour les valeurs extrêmes de n , une erreur sur $f(x_n)$ entraîne des erreurs sur deux ou trois différences consécutives, mais que leur moyenne est nulle. On représentera alors par un graphique les valeurs de ces différences, on les reliera par des segments rectilignes, et on régularisera à vue la courbe obtenue, en s'efforçant d'établir une bonne compensation; les aires situées entre la courbe et la ligne brisée devront se répartir à peu près également des deux côtés de la courbe.

On reviendra ensuite des différences aux valeurs de la primitive, et l'on aura ainsi des nombres $g(x_n)$ donnant une nouvelle approximation des $f(x_n)$. On représentera par un nouveau graphique les différences $y_n - g(x_n)$, à une échelle qui pourra être assez grande, pour les ordonnées, puisqu'on aura écarté les variations provenant de la fonction $f(x)$; il ne restera que les erreurs. Si l'on a, pour fixer les idées, utilisé les différences secondes, et que dans la régularisation de la courbe de ces différences la compensation des erreurs des deux signes ait été parfaite, on n'aura commis en remontant des différences secondes à $g(x_n)$ qu'une erreur linéaire, et il restera à prendre pour $f(x) - g(x)$ la droite représentant le mieux la suite des valeurs $y_n - g(x_n)$. Si la compensation n'a pas été parfaite, cela se traduira par le fait que ces points malgré quelques irrégularités, dessineront encore une courbe; on la tracera d'abord à vue, mais,

comme il importe de ne pas perdre le bénéfice de la régularisation par les différences secondes, il sera bon de ne pas prendre une échelle des ordonnées trop grande, afin que la pente reste faible, et on pourra vérifier avec un compas que la courbe tracée est assez peu différente d'une succession d'arcs de cercle de rayons lentement variables pour qu'on puisse la considérer comme régulière.

Bien entendu, si l'on n'a en vue qu'une régularisation sans interpolation, on n'a pas à se préoccuper du fait que les différences secondes ne représentent pas $h^2 f''(x)$, mais plutôt $h^2 f''(x) + \frac{h^4}{12} f^{(4)}(x)$. Mais si l'on veut à la fois régulariser et interpoler, et si h n'est pas assez petit pour qu'on puisse négliger le second terme de cette expression, il faudra effectuer la correction indiquée à la fin du n° 3 à propos de l'interpolation.

5. — Au sujet de la théorie des fonctions d'une variable, il reste à considérer le cas où les x_n ne varient pas en progression arithmétique.

Si les y_n sont connus d'une manière exacte, il n'y aura aucune difficulté à utiliser les rapports différentiels; en posant $x_n = \xi_n - l_n$, $x_{n+1} = \xi_n + l_n$, le rapport $\frac{y_{n+1} - y_n}{2l_n}$ pourra être considéré, en première approximation, comme une valeur approchée de $f'(\xi_n)$, et en deuxième approximation comme une valeur approchée de $f'(\xi_n) + \frac{1}{6} l_n^2 f'''(\xi_n)$. Après avoir déduit de la première approximation une valeur approchée de la dérivée troisième, on obtiendra en deuxième approximation des valeurs assez exactes des $f'(\xi_n)$ pour qu'on puisse interpoler par l'un des procédés déjà indiqués.

Si les y_n ne sont connus que d'une manière approchée et si les l_n sont d'ordres de grandeur très différents, il est difficile de leur faire jouer à tous le même rôle. Si, pour une valeur de n , $x_{n+1} - x_n$ est très petit, on devra considérer que y_n et y_{n+1} constituent en quelque sorte deux mesures différentes d'une même valeur de $f(x)$; si de plus les points voisins donnent d'une manière générale

la pente m_n de la courbe dans l'intervalle considéré, on remplacera y_n et y_{n+1} par deux nombres η_n et η_{n+1} définis par

$$\eta_n + \eta_{n+1} = y_n + y_{n+1}, \quad \eta_{n+1} - \eta_n = m_n(x_{n+1} - x_n),$$

qui correspondent à des points que le graphique donnera immédiatement.

Cette première correction écartera les coefficients angulaires qui risqueraient d'être trop erronés. On calculera ensuite les valeurs approchées μ_n des $f'(\xi_n)$ comme dans le cas où les y_n sont exactement connus, et on régularisera la courbe obtenue en joignant ces points, mais en prenant garde que le poids de chaque nombre μ_n est proportionnel à l_n ; la meilleure détermination de $f'(x)$ sera donc la fonction régulière rendant minima la somme

$$\sum l_n [f'(\xi_n) - \mu_n]^2.$$

Après l'avoir déterminé plus ou moins exactement, on remontera à $f(x)$. Si la condition

$$\sum f'(\xi_n) = \sum \mu_n$$

n'a pas été bien réalisée, on s'en apercevra, après être remonté à $f(x)$, à une variation systématique des différences $y_n - f(x_n)$, s'ajoutant à l'erreur accidentelle, et qu'il sera facile de corriger.

On peut naturellement s'inspirer de remarques analogues pour une régularisation par les différences secondes; mais ce serait plus compliqué.

Indiquons enfin une méthode qui présente l'avantage de ne reposer que sur des principes très simples et de ne pas nécessiter notamment l'utilisation de la formule de Taylor. Elle consiste à commencer par un tracé graphique à vue; ensuite, en marquant sur la courbe obtenue des points dont les abscisses varient en progression arithmétique, on procédera à une régularisation par l'intermédiaire des différences secondes (sans utiliser les dérivées). Enfin en examinant les différences entre les y_n et les valeurs ainsi obtenues pour les $f(x_n)$, on cherchera à se rendre compte s'il y a des erreurs non accidentelles; s'il y a une erreur systématique, elle ne peut être que faible et régulièrement variable; on cher-

chera à la corriger par le procédé déjà indiqué au n° 4, de manière à ne pas perdre le bénéfice de la régularisation effectuée. *Peut-être est-ce sur cette dernière méthode qu'il convient d'attirer surtout l'attention. Toutefois il nous a paru utile de donner au lecteur un élément de comparaison, en lui montrant d'abord comment se présentent les méthodes basées sur la formule de Taylor.*

6. — *Fonctions de deux variables.* — Considérons tout de suite le problème le plus général dans lequel on connaît des valeurs approchées z_n de $f(x, y)$ pour des points x_n, y_n répartis d'une manière quelconque.

La seule des méthodes indiquées ci-dessus qui s'adapte à ce problème sans complication excessive est celle par laquelle nous venons de terminer: un tracé approché, à vue; une régularisation utilisant des points disposés suivant un quadrillage rectangulaire; enfin la correction des erreurs systématiques, une erreur étant considérée comme systématique si, dans une région d'une certaine étendue, les valeurs des erreurs $z_n - f(x_n, y_n)$ ne sont pas en moyenne très voisines de zéro; la correction ne devra introduire qu'une fonction à dérivée seconde faible, ou lentement variable, afin de ne pas perdre le bénéfice de la régularisation.

Nous sommes donc conduits à étudier la régularisation et aussi l'interpolation dans le cas où les points connus sont disposés en plan suivant les sommets d'un quadrillage. La méthode est alors évidente: on appliquera deux fois de suite la méthode indiquée à propos des fonctions d'une variable, de manière à déterminer d'abord $f(nh, y)$, puis $f(x, y)$ (nous désignons par $x_n = nh$ les abscisses des points connus). Un procédé analogue peut être appliqué toutes les fois que les points connus se répartissent sur des courbes régulières. Dans le cas d'un quadrillage, on peut naturellement aussi déterminer d'abord $f(x, nk)$, puis $f(x, y)$, et, si l'on n'obtient pas exactement le même résultat que par la première méthode, prendre la moyenne des deux résultats.

On peut varier ces procédés à l'infini, par exemple vérifier la régularité sur les diagonales $x + y = p$ et $x - y = q$; la vérifier par la forme des courbes de niveau, ou même utiliser ces courbes pour la détermination directe de $f(x, y)$ en partant de $f(nh, y)$.

Mentionnons enfin un procédé dans lequel on fait jouer à x et y des rôles tout à fait symétriques. Supposant que les points connus soient les points à coordonnées entières, on formera le tableau des différences secondes

$$R_{p,q} = z_{p-1,q} + z_{p+1,q} - 2z_{p,q} ,$$

$$S_{p+\frac{1}{2},q+\frac{1}{2}} = z_{p+1,q+1} + z_{p,q} - z_{p+1,q} - z_{p,q+1} ,$$

$$T_{p,q} = z_{p,q-1} + z_{p,q+1} - 2z_{p,q} ,$$

où $z_{p,q}$ désigne la valeur exacte ou approchée connue pour $f(p, q)$. On régularisera ce tableau des différences; comme une régularisation grossière des différences donne une bonne régularité pour les primitives, ce sera une opération facile. On remontera ensuite à $f(x, y)$ qui, théoriquement, sera ainsi déterminé à une fonction linéaire près. Mais les corrections faites sur les dérivées peuvent avoir entraîné une erreur systématique; la correction de cette erreur et la détermination du terme linéaire s'effectueront à la fois par la comparaison des résultats expérimentaux; on aura soin de ne pas perdre, en faisant cette correction, le bénéfice de la régularité. Il sera facile, à ce moment, de tenir compte de tous les éléments d'appréciation: confiance plus ou moins grande dans les différents résultats expérimentaux; éventuellement renseignements concernant les dérivées. Si toutes les données ne sont pas compatibles, on aura à se demander si l'on préfère renoncer aux données les moins sûres, ou renoncer en partie à l'hypothèse de régularité: question de bon sens, et non de mathématiques; sans doute pourrait-on lui donner une forme mathématique, mais en introduisant des éléments si arbitraires que la solution obtenue n'aurait pas grande valeur pratique.

Octobre 1911.