VIII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1942-1950)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

points d'attache différents au contour (une surface conique réalisant cette condition pour un seul de ses points, le sommet). Reproduite par l'imagination, en faisant abstraction de l'épaisseur du fil et en imaginant la surface prolongée indéfiniment tout en conservant la même propriété, cette expérience a pour conclusion le concept de *plan indéfini.*

Si l'on remarque que, sur la Terre approximativement sphérique, ce travail d'imagination ne peut être effectivement réalisé, on est à l'une des sources possibles de la relativité einsteinienne.

Nous pourrions redire de toute autre ligne ou surface géométrique quelque chose d'analogue, si la nature offrait à notre observation beaucoup d'occasions de faire pareil travail. En fait, la géométrie construit ses surfaces à partir de lignes et ses lignes à partir de points. Le point étant, selon Euclide, ce qui n'a aucune partie, la géométrie est fondée sur ce paradoxe: construire toute étendue à partir de ce qui n'a pas d'étendue On s'étonne que les sceptiques n'aient pas autrement exploité ce paradoxe !

VIII

Ce n'est pas à un sceptique qu'est dû un autre paradoxe, celui du philosophe anglais Bertrand Russell: « En mathématiques, on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce qu'on dit est vrai. »

C'est l'algèbre que vise ce paradoxe, et c'est à travers l'algèbre appliquée à la géométrie qu'il atteint cette dernière.

On ne sait de *quoi* l'on parle en mathématiques, si *quoi* désigne un objet sensible. Une fois mis en équation le problème dont l'énoncé nomme de pareils objets, l'algébriste ne manie plus que des symboles substitués aux objets; il ne reviendra à ces derniers que pour interpréter en physique, en chimie, en finances, en statistique... le résultat de ses combinaisons de symboles. Et le paradoxe de Russell disparaît alors, parce que les symboles algébriques ont été dotés de propriétés appartenant au moins approximativement à des réalités: celles d'égalité et celles d'addition.

Mais l'égalité et l'addition algébriques sont conçues comme rigoureuses: deux symboles égaux sont substituables l'un à l'autre sans aucune altération dans la relation symbolique où ils figurent. Dans la réalité physique, il n'y a pas d'objets rigoureusement égaux: dans la construction de précision, la tolérance au centième de millimètre implique une inégalité mathématique en même temps qu'une équivalence pratique incontestée; pour qui les compte un à un, il n'y a pas de grains de café égaux, mais qu'importe à leur total ?

L'addition de deux symboles algébriques est la conservation absolue des parties dans le tout. Mais on ne réunira pas dans un même sac le café contenu dans deux plus petits sans que quelque poussière ou quelque grain égaré manque au contenu du grand sac, somme de ceux des plus petits.

Ces écarts entre les réalités et leurs symboles sont inexistants pour l'algébriste; de quelque réalité physique qu'il semble s'occuper, il ne changera rien à ses combinaisons de symboles; au physicien de trier celles qui conviennent à la réalité sous-entendue. L'algèbre pure n'a pas besoin de savoir à quelles réalités on l'appliquera, de savoir de *quoi* elle parle.

Ce qu'elle dit est-il *vrai* ou non ? Il est vrai d'une vérité logique si le calculateur a observé strictement les règles du jeu; et cela peut-être parce que la logique a eu pour premier modèle la géométrie. Mais lorsqu'on cherche par l'algèbre la solution d'un problème physique portant sur des réalités, l'appréciation de vérité est moins simple, moins absolue.

Observons l'ingénieur qui élabore le projet d'un pont. Il introduit dans ses calculs les dimensions du pont (en nombres qui diffèrent de quelques millimètres avec les dimensions réelles), la masse et la vitesse des charges qui se déplaceront sur le pont, les efforts du vent auxquels le pont devra résister, etc... Il combine ces éléments au moyen de formules de résistance des matériaux, formules que l'algébriste a obtenues à partir d'hypothèses sur les actions moléculaires — non sensibles — engendrées par les déformations des pièces du pont; le résultat est exprimé à peu près comme ceci: « pour que le pont en service résiste dans les conditions les plus dures, il faut donner aux pièces telles dimensions et les asssembler de telles manières ». Que vaut

pareille conclusion, pareille prédiction, fondée sur le maniement de symboles dont les substituts physiques n'ont pas été retenus dans l'élaboration du projet ? Il s'y attache une large part de confiance, parce que de multiples ponts ayant un passé semblable ont tenu en service; nous savons d'ailleurs que les dimensions des pièces du pont ne seront qu'*à quelques millimètres près* celles que le calcul a indiquées; l'ingénieur les a d'ailleurs multipliées par un coefficient de sécurité peut-être important.

Un *à peu près* apparaît aussi dans la solution mathématique de matières inaccessibles à nos mains. Un problème fondamental de l'astronomie, par exemple, est la détermination *exacte* des positions des astres aux instants d'un avenir plus ou moins étendu. L'histoire de l'astronomie nous apprend que l'idéal d'exactitude a été si peu atteint qu'il est à peine énonçable. Les astronomes ont dû se contenter de positions approximatives qu'ils ont su telles parce qu'il existait un écart appréciable entre les positions prévues pour le calcul pour un instant donné — à venir pour le calculateur — et les positions constatées à l'approximation près des instruments — positions présentes ou passées pour les successeurs du calculateur. Les efforts se sont portés vers une meilleure approximation dans deux domaines distincts: dans le domaine physique, par la construction d'instruments plus puissants; dans le domaine mathématique, par la construction de méthodes capables de conduire à des écarts plus étroitement limités entre les résultats du calcul et ceux des observations.

Dans le champ des applications astronomiques, comme dans d'autres champs de la pratique, les mathématiques et la technique des instruments de précision peuvent s'appeler des sciences de l'*à peu près*, sans aucune intention péjorative, en ce sens qu'un de leurs buts constants est l'épuisement graduel de l'à peu près, l'obtention d'approximations de plus en plus étroites — sans d'ailleurs qu'on puisse espérer jamais la réduction de l'à peu près à zéro.

C'est là, je crois, le sens de la seconde partie du paradoxe de Russell; la vérité *physique* des résultats ne coïncide jamais avec la vérité *logique* des calculs qui ont conduit à les prévoir. Dans le champ des applications, le rôle des mathématiques est celui d'un instrument de prévision de l'avenir d'un objet céleste

ou terrestre; elles sont un outillage de prophète, mais d'un prophète qui ne prétend pas à une coïncidence absolue entre ses prophéties et ses réalisations.

IX

Le paradoxe de Russell n'a pas arrêté les hommes de science dont le travail a pour but l'application des mathématiques pures à l'étude de phénomènes du monde physique ou des sociétés humaines.

Pour rendre les mathématiques plus maniables dans pareille étude, qui reprend quelque élément du concret, ils ont conçu et mis en œuvre d'autres symboles, dont nous signalerons un seul ici. Le lecteur a conservé souvenir des notions de mécanique qui ont formé le premier chapitre de son premier cours de physique. Il y a appris à manier le *vecteur*: segment de droite orientée dans un plan, à partir du point représentant le point d'application d'une force, suivant la droite que la force ferait parcourir à ce point si elle agissait seule et dans le sens où elle entraînerait ce point; la longueur donnée au vecteur étant proportionnelle à l'intensité de la force à symboliser.

On voit apparaître ici la condensation en un symbole unique d'éléments géométriques et d'éléments mécaniques mis simultanément en cause dans l'étude des mouvements. La notion *vecteur* est donc plus concrète ou moins abstraite que chacune des notions *droite* et *mouvement* réunies dans sa définition.

La science moderne de l'électricité a recours à d'autres concepts, unissant des concepts géométriques avec d'autres, tirés de l'analyse des phénomènes électriques. C'est à l'invention et à l'usage de pareils concepts composés, à l'enrichissement du symbolisme physico-mathématique que sont dus les progrès étonnants des conceptions modernes de la mécanique et de la physique.

Ainsi, entre les réalités et les êtres mathématiques abstraits s'est opéré, par l'intermédiaire d'un système de symboles, un échange de services en deux sens: la réalité physique manipulée est à l'origine de tous les développements des mathématiques pures: comptage et mesurage sont les deux mamelles de celles-ci,