

# VI. — La seconde solution eulérienne.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

et sous cette forme il est aisé de reconnaître qu'il s'agit d'une hypocycloïde à trois rebroussements<sup>1</sup>; Euler en donne la figure exacte et en trouve l'équation cartésienne sous la forme suivante :

$$p^4 + 2 p^2 q^2 + q^4 + 30 cpq^2 - 18 cp^3 - 9 c^2 q^2 + 108 c^2 p^2 - 216 c^3 p = 0 ;$$

il peut alors conclure qu'il s'agit d'une courbe algébrique du 4<sup>me</sup> ordre. Ce qui précède nous autorise à conclure que *dans le cas considéré la courbe catoptrique est l'anticaustique d'une hypocycloïde à trois rebroussements*. On voit en même temps que, tandis qu'on croyait que cette courbe s'était présentée pour la première fois à Steiner vers le moitié du XIX<sup>e</sup> siècle comme enveloppe de droites de Simson d'un triangle quelconque<sup>2</sup>, son origine remonte à un siècle auparavant et est liée au nom d'un autre célèbre mathématicien suisse.

III. Euler s'est occupé d'un troisième cas dans sa lettre du 7 août 1745 (vol. cit., p. 327); c'est celui qui correspond à l'hypothèse  $uv = c^2$  avec  $c = a$ ; il dit que la courbe à laquelle on arrive est du 12<sup>me</sup> degré, qu'elle a la représentation paramétrique suivante

$$x = \frac{3a^3 - a^2v - 3au^2 - u^3}{u^2}, \quad y = \frac{a^3 - a^2u - 3au^2 - u^3}{u^3} \sqrt{a^2 - u^2},$$

et qu'en conséquence il est facile de la dessiner.

## VI. — LA SECONDE SOLUTION EULÉRIENNE.

9. — Quoique le grand géomètre pût se considérer comme satisfait pour avoir atteint le but proposé, sa correspondance scientifique prouve qu'il ne cessa de s'occuper de la courbe catoptrique et, utilisant l'extraordinaire faculté qu'il avait d'imaginer des procédés originaux, il arriva à une seconde solution tout à fait nouvelle qu'il communiqua à Goldbach le 25 janvier 1746 (vol. cit., p. 359) et dont nous allons donner un résumé. Elle est une application de la solution de cet autre problème:

<sup>1</sup> Voyez par exemple G. LORIA, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven*, II. Aufl. (Leipzig, 1910), t. I, p. 162; édit. italienne t. I (Milan, 1930), p. 192.

<sup>2</sup> J. STEINER, *Ueber eine besondere Curve dritter Classe (und vierter Ordnung)* (J. de Crelle, t. LIII, 1856).

En supposant la figure rapportée à un axe passant par le point lumineux C (fig. 3), déterminer la courbe EMB en supposant connue la relation  $f(r, \varphi) = 0$  qui a lieu entre le segment  $CR = r$  déterminé sur l'axe par le rayon réfléchi et l'angle  $\varphi$  qu'il forme avec le même axe.

L'artifice employé par Euler se base sur la considération du point U (voyez n° 4) où le rayon réfléchi relatif au point M de la

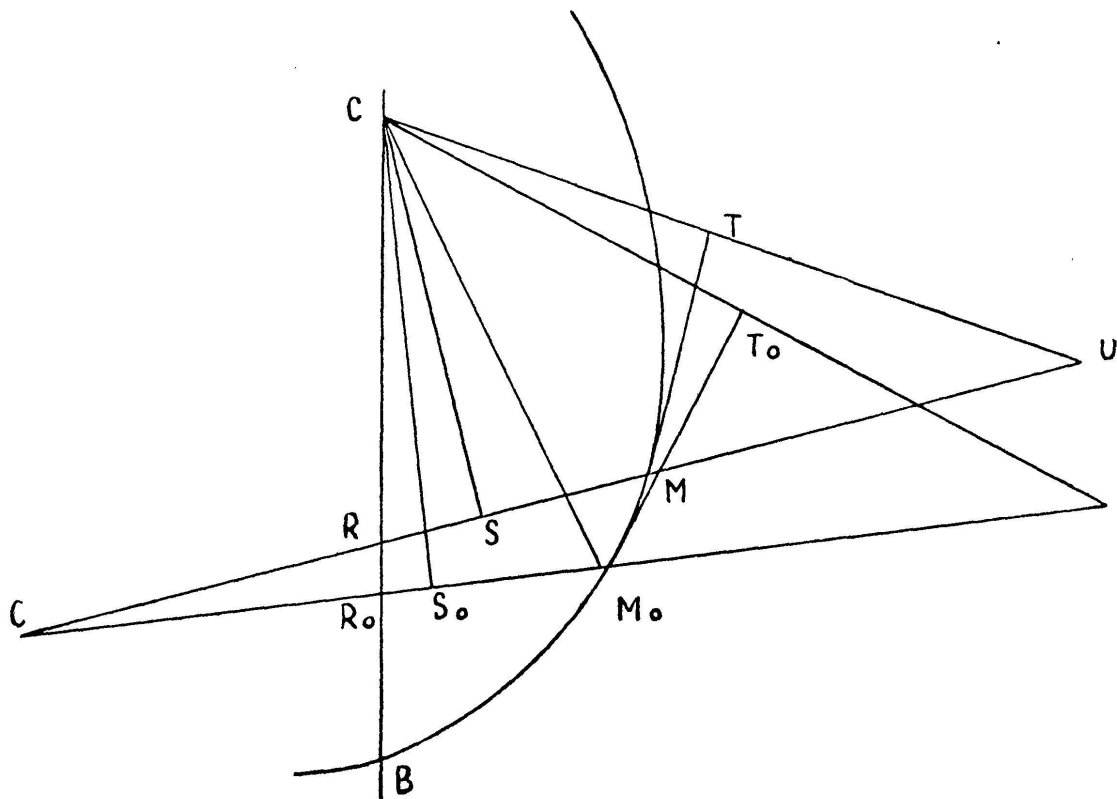


Fig. 3.

courbe coupe la parallèle menée par le point C à la normale au point M. En appelant  $\frac{s}{c}$  et  $\frac{u}{c}$  le sinus et le cosinus de l'angle  $\varphi$ , il considère encore le rayon réfléchi  $M_0R_0$  consécutif à  $MR$ , et leur intersection, qui est le point O de la caustique. Il tire la droite  $CS$  perpendiculaire au rayon  $MR$  et il appelle  $t$  le segment  $US$ ; par de très ingénieuses considérations infinitésimales, il arrive à la relation  $dt = -\frac{r \cdot du}{c}$ , qu'il intègre en posant

$$t = a - \int \frac{r \cdot du}{c} ,$$

où l'intégrale a un sens car, d'après l'hypothèse,  $r$  et  $u$  sont liés entre eux par la relation donnée  $f(r, \varphi) = 0$ . Si  $US = t$  et si on ajoute le segment  $RS = \frac{ru}{c}$ , on conclut

$$RU = a + \frac{ru}{c} - \int \frac{r \cdot du}{c},$$

c'est-à-dire

$$RU = a + \int \frac{u \cdot dr}{c}. \tag{12}$$

Or si on prend arbitrairement le point R sur l'axe, on connaîtra la valeur de  $r$  et par conséquent on aura l'angle  $\varphi$  et on pourra mener la droite RU et déterminer sur elle le point U. On tire alors la droite CU, on la coupe en deux parties égales au point T et on trace par ce point la perpendiculaire à la droite CU: ce sera la tangente à la courbe cherchée au point M où elle coupe la droite RU; cela prouve que, en déplaçant le point R sur l'axe choisi, *cette courbe sera construite par ses points et ses tangentes.*

REMARQUE. — Afin de se rendre compte de la valeur et de l'originalité de la voie suivie par Euler pour arriver aux courbes cherchées, il est bon d'avoir sous les yeux le procédé qu'on devrait suivre si on voulait résoudre le problème par les procédés modernes. En employant les coordonnées orthogonales, observons à cet effet que le rayon lumineux CM et la normale au point M ( $x, y$ ) ont comme équations respectives

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}, \quad \frac{Y - y}{X - x} = -\frac{1}{y'}$$

et qu'elles forment entre elles l'angle  $\alpha$  déterminé par la formule

$$\text{tg } \alpha = \frac{x + yy'}{y - xy'}$$

Le rayon réfléchi aura lui aussi une équation de la forme

$$Y - y = \lambda(X - x),$$

et le coefficient  $\lambda$  devra être déterminé par la condition que l'angle que le rayon réfléchi forme avec la normale est égal à  $-\alpha$ ; on a donc

$$\frac{1 + \lambda y'}{\lambda - y'} = -\frac{x + yy'}{y - xy'}$$

d'où l'équation suivante du rayon réfléchi :

$$\frac{Y - y}{X - x} + \frac{y(1 - y'^2) - 2xy'}{x(1 - y'^2) + 2yy'} = 0 .$$

Cela prouve qu'on a :

$$r = \frac{2y'(x^2 + y^2)}{2xy' - y(1 - y'^2)} , \quad \varphi = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y(1 - y'^2) - 2xy'}{x(1 - y'^2) + 2yy'} . \quad (13)$$

Substituant ces valeurs dans l'équation donnée  $f(r, \varphi) = 0$ , on aura l'équation différentielle du problème. Il s'en suit que, par la formule (12), Euler a réduit le problème aux quadratures, quelle que soit la fonction  $f(r, \varphi) = 0$ . Ajoutons que même la simple vérification de la formule (12) au moyen des relations (13) exige des calculs longs et assez compliqués.

10. — Pour appliquer le résultat obtenu à la recherche de la courbe catoptrique, Euler suppose que le rayon réfléchi passe par le point appartenant comme M à cette courbe; il remarque alors que si, au lieu de l'angle CRM, on considère connu l'angle CRO, on doit parvenir à la même valeur de  $r$ . Or, comme  $\widehat{\text{CRO}} = 180^\circ - \widehat{\text{CRM}}$ , son sinus et son cosinus sont égaux et de signes contraires à ceux de l'angle CRM; cela prouve que  $r$  doit être une fonction paire de  $\frac{u}{c}$  et  $\frac{s}{c}$ . Ayant choisi  $r$  de cette manière, la courbe catoptrique s'engendre de la manière suivante :

Posons  $\text{MR} = z$  et considérons le triangle CMR; nous en tirons :

$$\text{CM} = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \frac{u}{c}} = \text{RU} - z = a + \int \frac{u \cdot dz}{c} - z ,$$

d'où

$$z = \frac{\left( a + \int \frac{u \cdot dz}{c} \right)^2 - r^2}{2 \left( a + \int \frac{u \cdot dr}{c} - \frac{ur}{c} \right)} .$$

$z$  étant connue, on aura

$$\text{PM} = y = \frac{sr}{c} , \quad \text{PR} = \frac{uz}{c} , \quad \text{CP} = x = r - \frac{uz}{c}$$

$$\text{CM} = \text{UM} = \text{RU} - z = a + \int \frac{u \cdot dr}{c} - z ;$$

de cette manière le problème est résolu en général. Si l'on veut arriver à des courbes algébriques, on posera avec Euler

$$\int \frac{r \cdot du}{c} = \varphi \quad \text{ou bien} \quad \int \frac{u \cdot dr}{c} = \frac{ur}{c} - \varphi ;$$

$\varphi$  sera une fonction impaire, qu'on peut choisir arbitrairement. Comme  $r = c \frac{d\varphi}{du}$ , on aura

$$\int \frac{u \cdot dr}{c} = u \frac{d\varphi}{du} - \varphi$$

et par suite (voyez plus haut)

$$\text{RM} = \frac{\left(a - \varphi + u \frac{d\varphi}{du}\right)^2 - c^2 \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2}{2(a - \varphi)} = \frac{a - \varphi}{2} + u \frac{d\varphi}{du} - \frac{s^2}{2(a - \varphi)} \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 .$$

En se rappelant que  $s^2 + u^2 = c^2$ , on arrive à la solution suivante du problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{(a - \varphi)s}{2c} + \frac{su}{c} \frac{d\varphi}{du} - \frac{s^3}{2c(a - \varphi)} \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 , \\ x = \frac{s^2}{c} \frac{d\varphi}{du} - \frac{u(a - \varphi)}{2c} + \frac{us^2}{2(a - \varphi)} \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 ; \end{array} \right. \quad (14)$$

on peut ajouter qu'on a

$$\text{CM} = \frac{a - \varphi}{2} + \frac{s^2}{2(a - \varphi)} \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 .$$

On tire de ces formules qui représentent la courbe cherchée,

$$\text{CM} + \text{MR} = a - \varphi + u \frac{d\varphi}{du} ;$$

d'où, en changeant les signes de  $u, \varphi$ ,

$$\text{CM}^* + \text{M}^*\text{R} = a + \varphi - u \frac{d\varphi}{du} ;$$

en conséquence

$$\text{CM} + \text{MR} + \text{CM}^* + \text{M}^*\text{R} = 2a ;$$

donc le chemin parcouru par un point lumineux, partant de la source C et y revenant après une double réflexion, est cons-

tant. Euler ajoute qu'on peut tirer de cette remarque qu'on a encore

$$CM + MO = CM^* + M^*O,$$

propriété que Goldbach a remarquée le premier.

## VII. — LA TROISIÈME SOLUTION DU PROBLÈME.

11. — Nous avons déjà dit qu'Euler a été amené à s'occuper de nouveau du problème catoptrique par la solution qu'en donna Oechliz, géomètre qui avait été appelé, en 1748, de Leipzig, comme professeur à Saint-Pétersbourg. La lettre qu'il écrivit à Goldbach sur ce sujet (vol. cit., p. 463) le 25 juin de cet an ne nous apprend pas ce qu'il tira du travail de son collègue et ce qu'il y ajouta; cela résulte de ce que nous allons rapporter de son importante communication.

Soit (fig. 4) MN une courbe telle que, après une double réflexion, elle reconduit un point lumineux à la source C d'où il est

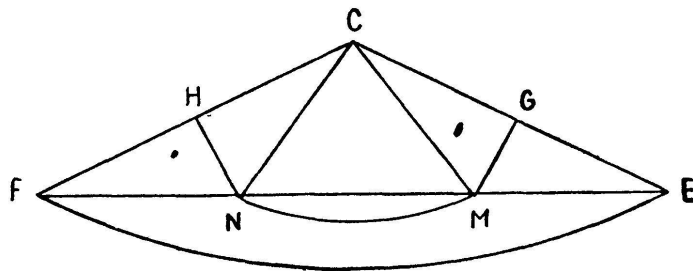


Fig. 4.

parti. Prolongeons la droite MN en E, F de manière qu'on ait  $ME = MC$ ,  $NF = NC$ ; la droite EF sera d'une longueur constante (voyez plus haut) et elle sera normale dans ses extrémités à la

courbe lieu des points M, N (voyez plus bas). Cela prouve que la question proposée est ramenée à la recherche d'une courbe pourvue de  $\infty^1$  cordes binormales de la même longueur: la possibilité de telles lignes est prouvée par l'exemple du cercle; on verra qu'il y en a un nombre infini. Lorsqu'on en a trouvée une, la courbe catoptrique s'ensuit, après avoir choisi *ad libitum* le point lumineux C<sup>1</sup> à l'aide de la construction suivante: Si EF est une des cordes dont on a parlé, on tire les droites CE, CF

<sup>1</sup> Remarquons qu'auparavant on n'avait rien dit relativement à la position du foyer lumineux (cf. note, V) par rapport à la courbe cherchée.