V. — Quelques conséquences des formules trouvées. Exemples.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

mules (7) deviendront algébriques en u, v; entre elles et l'équation $f(u, v) = 0$ on pourra éliminer ces quantités et on arrivera à une équation également algébrique en x, y: *cela prouve l'existence d'un nombre indéfini de courbes catoptriques, toutes algébriques.*

V. — Quelques conséquences des formules trouvées. Exemples.

7. — Les formules (7) mènent à toutes les propriétés de la courbe catoptrique; bornons-nous à citer celles dont parle Euler. La courbe catoptrique coupe orthogonalement l'axe en deux points dont la distance est $2a$. L'ordonnée EC du point C est fournie en posant $x = 0$ dans la première des formules (7); sa valeur est donc

$$\frac{-2c(a-v)\left(\sqrt{c^2-u^2} \pm c\right)}{u^2};$$

tandis que les points d'ordonnées *maxima* sont donnés par les formules

$$x = c\frac{dv}{du}, \qquad y = \frac{c\sqrt{c^2-u^2}}{u}\frac{dv}{du},$$

etc.[1]

Euler remarque encore que des formules exposées on peut tirer aisément la représentation analytique de la caustique de la

---

[1] Les mêmes formules permettraient l'étude des relations géométriques ayant lieu entre la courbe catoptrique et le point lumineux C. Par exemple, elles portent à la conclusion que *ce point n'appartient jamais à cette courbe.* En effet, des équations

$$-\frac{u(a-v)}{c} + 2\frac{c^2-u^2}{c}\frac{dv}{du} + \frac{u(c^2-u^2)}{c(a-v)}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

$$a - v + 2u\frac{dv}{du} - \frac{c^2-u^2}{a-x}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0,$$

on tire, en ajoutant à la première la seconde multipliée par $\frac{u}{c}$,

$$2c\frac{dv}{du} = 0;$$

comme $c \neq o$, on a $\frac{dv}{du}$ nul et les équations précédentes donnent $a - v = 0$; en conséquence les (7) deviennent en général $x = 0$, $y = 0$ et la courbe catoptrique se réduirait au point lumineux.

courbe considérée; en effet, si on mène OQ perpendiculaire à l'axe et qu'on appelle p, q les coordonnées CQ et OQ du point O, on trouve

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{2(c^2 - u^2)\,dv - 2u\,.\,ds\,.\,\sqrt{c^2 - u^2}}{e\,.\,du} \\ q &= \frac{2(c^2 - u^2)\,ds + 2u\sqrt{c^2 - u^2}\,dv}{c\,.\,du}\;. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

8. — Euler applique ses formules à trois exemples déterminés chacun par une relation entre u et v; le choix est fait de manière à obtenir des courbes algébriques; nous allons les exposer.

I. Soit $v = u$; on en tire CR $= 2c$, par conséquent le point R est fixe; tous les rayons de première réflexion passent par le même point; on est porté alors à supposer que la courbe catoptrique soit une section conique centrale. Pour le prouver il suffit de remarquer que, dans notre cas, les formules (7) deviennent

$$x = \frac{2ac^2 - (a^2 + c^2)u}{c(c - u)}\,, \qquad y = \frac{(a^2 - c^2)\sqrt{c^2 - u^2}}{c(a - u)} \tag{9}$$

en éliminant u on trouve comme résultat

$$a^2(x^2 + y^2) = (a^2 - c^2 - cx)\;,$$

équation donnée sans démonstration par Euler dans sa lettre à Goldbach du 7 août 1745 (vol. cit. p. 327): on peut remarquer que cette équation équivaut à l'équation polaire

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a(a - c\cos\omega)}\;,$$

d'où il s'ensuit qu'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole suivant que $a \gtrless c$. On arrive à la même conclusion [1] en opérant la transformation de coordonnées déterminée par les formules suivantes:

$$x = X + a\,, \qquad y = Y\;;$$

[1] Ce qui suit ne se trouve pas chez Euler.

on trouve alors

$$X = \frac{a(c^2 - au)}{c(a - u)} , \qquad Y = \frac{(a^2 - c^2)\sqrt{c^2 - u^2}}{c(a - u)}$$

d'où l'on tire

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} = 1 .$$

II. Le second des exemples choisis par Euler correspond à l'hypothèse qu'entre u et v il existe la relation $v = \frac{u^3}{c^2}$, c étant une constante[1]; comme on a alors $\frac{dv}{du} = \frac{3u^2}{c^2}$ les équations (7) deviennent:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{u(ac^2 - u^3)}{c^3}\left(1 - 3u\frac{c^2 - u^2 + c\sqrt{c^2 - u^2}}{ac^2 - u^3}\right)\left(1 - 3u\frac{c^2 - u^2 - c\sqrt{c^2 - u^2}}{ac^2 - u^3}\right) , \\ y &= \frac{c^2 - u^2}{c^3(ac^2 - u^3)}(ac^2 - 3cu^3 + 2u^3)(ac^2 + 3cu^2 + 2u^3) . \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Pour les interpréter géométriquement Euler se sert de la caustique de la courbe obtenue; on a dans ce cas

$$s = \frac{3u^2}{c^2}\sqrt{c^2 - u^2}$$

et les formules (8) fournissent la représentation paramétrique qui suit:

$$p = \frac{6u^2(2u^2 - c^2)}{c^3} , \qquad q = \frac{12u(c^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3} . \tag{11}$$

Pour donner à ces expressions une forme plus convenable on peut avoir recours à l'angle ω déjà considéré: comme on a

$$\cos\omega = \frac{u}{c} , \qquad \sin\omega = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} , \qquad \cos 2\omega = \frac{2u - c^2}{c^2} ,$$

au lieu des équations (11), on a:

$$p = 6c\cos^2\omega \, . \cos 2\omega , \qquad q = 6c\sin\omega \, . \sin 2\omega \tag{11'}$$

---

[1] Euler a été, probablement, amené à s'occuper de ce cas par un passage de la lettre de Goldbach du 9 novembre 1745 (vol. cit. p. 336) où, sans égard à l'homogénéité, on suppose $v = u^3$.

et sous cette forme il est aisé de reconnaître qu'il s'agit d'une hypocycloïde à trois rebroussements [1]; Euler en donne la figure exacte et en trouve l'équation cartésienne sous la forme suivante:

$$p^4 + 2\,p^2\,q^2 + q^4 + 30\,cpq^2 - 18\,cp^3 - 9\,c^2\,q^2 + 108\,c^2\,p^2 - 216\,c^3\,p = 0\ ;$$

il peut alors conclure qu'il s'agit d'une courbe algébrique du 4me ordre. Ce qui précède nous autorise à conclure que *dans le cas considéré la courbe catoptrique est l'anticaustique d'une hypocycloïde à trois rebroussements.* On voit en même temps que, tandis qu'on croyait que cette courbe s'était présentée pour la première fois à Steiner vers le moitié du XIXe siècle comme enveloppe de droites de Simson d'un triangle quelconque [2], *son origine remonte à un siècle auparavant et est liée au nom d'un autre célèbre mathématicien suisse.*

III. Euler s'est occupé d'un troisième cas dans sa lettre du 7 août 1745 (vol. cit., p. 327); c'est celui qui correspond à l'hypothèse $uv = c^2$ avec $c = a$; il dit que la courbe à laquelle on arrive est du 12me degré, qu'elle a la représentation paramétrique suivante

$$x = \frac{3a^3 - a^2 v - 3au^2 - u^3}{u^2}\ , \qquad y = \frac{a^3 - a^2 u - 3au^2 - u^3}{u^3}\sqrt{a^2 - u^2}\ ,$$

et qu'en conséquence il est facile de la dessiner.

VI. — La seconde solution eulérienne.

9. — Quoique le grand géomètre pût se considérer comme satisfait pour avoir atteint le but proposé, sa correspondance scientifique prouve qu'il ne cessa de s'occuper de la courbe catoptrique et, utilisant l'extraordinaire faculté qu'il avait d'imaginer des procédés originaux, il arriva à une seconde solution tout à fait nouvelle qu'il communiqua à Goldbach le 25 janvier 1746 (vol. cit., p. 359) et dont nous allons donner un résumé. Elle est une application de la solution de cet autre problème:

---

1 Voyez par exemple G. Loria, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven*, II. Aufl. (Leipzig, 1910), t. I, p. 162; édit. italienne t. I (Milan, 1930), p. 192.

2 J. Steiner, *Ueber eine besondere Curve dritter Classe (und vierter Ordnung)* (J. de Crelle, t. LIII, 1856).