

# IV. — La première solution d'Euler.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## IV. — LA PREMIÈRE SOLUTION D'EULER.

6. — Les formules à appliquer maintenant sont les suivantes (voyez la fig. 2):

$$\begin{aligned} \text{TS} &= -s, & \text{CS} &= a + \nu \quad (\nu \text{ fonction impaire de } s) \\ \sin \text{CMO} &= \frac{2(a + \nu)s}{(a + \nu)^2 + s^2}, & \cos \text{CMO} &= \frac{(a + \nu)^2 - s^2}{(a + \nu)^2 + s^2} \\ \text{CM} &= a + \nu + \frac{s^2}{a + \nu}, & \text{MO} &= \frac{2s ds}{d\nu} + a + \nu - \frac{s^2}{a + \nu} \\ \text{CO} &= \frac{2s \sqrt{d\nu^2 + ds^2}}{d\nu}, & \text{tg CMO} &= \frac{d\nu}{ds}. \end{aligned}$$

Nous choisissons à présent comme axe une droite quelconque AB passant par le point C. Soit R son intersection avec le rayon réfléchi MM\* et  $\omega$  l'angle que celui-ci forme avec l'axe; si l'on pose  $\cos \omega = \frac{u}{c}$  ( $c$  étant une constante différente de 0), on aura  $\sin \omega = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c}$ ,  $d\omega = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}$  et  $u$  sera aussi une fonction impaire de  $s$ . Soit  $mOr$  le rayon réfléchi consécutif au rayon MOR; on aura  $\widehat{\text{Cr}m} = \omega + d\omega$  et ensuite  $\widehat{\text{M}Om} = d\omega$ . Mais on a déjà trouvé  $\widehat{\text{M}Om} = \frac{dr}{ds} = (\text{car } r = a + \nu) \frac{d\nu}{ds}$ ,  $d\omega = \frac{d\nu}{s} = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}$ ; donc on conclut:

$$s = -\frac{d\nu \cdot \sqrt{c^2 - u^2}}{du};$$

$u$  sera une fonction impaire de  $s$ , donc inversement  $s$  et  $\nu$  seront des fonctions impaires de  $u$ .

On observe à présent que dans le triangle CRM on connaît les angles et le côté CM; en conséquence le théorème des sinus nous donne

$$\text{CR} = -\frac{2c \cdot d\nu}{du}, \quad \text{RV} = -\frac{2u \cdot d\nu}{du}$$

et ensuite

$$\text{MR} = a + \nu - \frac{2u \cdot d\nu}{du} - \frac{(c^2 - u^2) \cdot d\nu^2}{(a + \nu) \cdot du^2}.$$

Menons la droite MP perpendiculaire à l'axe ACB; comme on a  $MP = MR \cdot \sin \omega$ , à cause des formules qu'on a trouvées, on peut écrire

$$MP = \left( a + v - 2 \frac{u \cdot dv}{du} - \frac{dv^2}{du^2} \frac{c^2 - u^2}{a + v} \right) \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c},$$

où le signe ambigu du radical correspond à la symétrie de la courbe catoptrique par rapport à l'axe AB. On a encore

$$RP = MR \cos \omega = \frac{u(a + v)}{c} - \frac{2u^2 \cdot dv}{c \cdot du} - \frac{u(c^2 - u^2)}{c(a + v)} \frac{dv^2}{du^2}$$

et, à cause de la valeur de CR,

$$CP = \frac{dv^2}{du^2} \cdot \frac{u(c^2 - u^2)}{c(c + v)} - 2 \frac{dv}{du} \frac{c^2 - u^2}{c} - \frac{u(a + v)}{c}.$$

Si donc nous prenons comme premier axe d'un système cartésien la droite AB et comme origine le point C, on aura  $CP = x$  et  $MP = y$ .

Euler trouve convenable de changer dans les formules précédentes le signe de  $v$ ; par conséquent il écrit comme il suit les formules qui donnent la solution du problème:

$$\begin{cases} x = -\frac{u(a - v)}{c} \left[ 1 - \frac{du}{dv} \frac{c^2 - u^2 + c\sqrt{c^2 - u^2}}{u(a - v)} \right] \left[ 1 - \frac{du}{dv} \frac{c^2 - u^2 - c\sqrt{c^2 - u^2}}{u(a - v)} \right] \\ y = \frac{c^2 - u^2}{c(a - v)} \left[ a - v + (c + u) \frac{dv}{du} \right] \left[ a - v - (c - u) \frac{dv}{du} \right]; \end{cases} \quad (7)$$

en supposant que ces formules déterminent le point M de la première réflexion, celles qui se rapportent au point M\* de la seconde s'en déduisent en échangeant les signes de  $u$ ,  $v$  et du radical.

REMARQUE. — A toute équation  $f(u, v) = 0$  entre  $u$  et  $v$  correspond une courbe catoptrique particulière; si  $f$  est une fonction algébrique, on peut la supposer rationnelle et entière; la même chose arrivera alors par rapport aux dérivées  $\frac{\partial f}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}$ ; cela prouve qu'en substituant à  $\frac{dv}{du}$  le rapport  $-\frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial v}$  les for-

<sup>1</sup> Comme  $u$  et  $v$  sont liées par une relation, les équations (7) nous offrent peut-être le premier exemple de la représentation des coordonnées d'une courbe à l'aide de deux paramètres, entre lesquels il existe une relation connue.

mules (7) deviendront algébriques en  $u, v$ ; entre elles et l'équation  $f(u, v) = 0$  on pourra éliminer ces quantités et on arrivera à une équation également algébrique en  $x, y$ : cela prouve l'existence d'un nombre indéfini de courbes catoptriques, toutes algébriques.

V. — QUELQUES CONSÉQUENCES DES FORMULES TROUVÉES.  
EXEMPLES.

7. — Les formules (7) mènent à toutes les propriétés de la courbe catoptrique; bornons-nous à citer celles dont parle Euler. La courbe catoptrique coupe orthogonalement l'axe en deux points dont la distance est  $2a$ . L'ordonnée EC du point C est fournie en posant  $x = 0$  dans la première des formules (7); sa valeur est donc

$$-\frac{2c(a-v)(\sqrt{c^2-u^2} \pm c)}{u^2};$$

tandis que les points d'ordonnées *maxima* sont donnés par les formules

$$x = c \frac{dv}{du}, \quad y = \frac{c \sqrt{c^2-u^2}}{u} \frac{dv}{du},$$

etc.<sup>1</sup>

Euler remarque encore que des formules exposées on peut tirer aisément la représentation analytique de la caustique de la

<sup>1</sup> Les mêmes formules permettraient l'étude des relations géométriques ayant lieu entre la courbe catoptrique et le point lumineux C. Par exemple, elles portent à la conclusion que ce point n'appartient jamais à cette courbe. En effet, des équations

$$-\frac{u(a-v)}{c} + 2 \frac{c^2-u^2}{c} \frac{dv}{du} + \frac{u(c^2-u^2)}{c(a-v)} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

$$a-v + 2u \frac{dv}{du} - \frac{c^2-u^2}{a-x} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0,$$

on tire, en ajoutant à la première la seconde multipliée par  $\frac{u}{c}$ ,

$$2c \frac{dv}{du} = 0;$$

comme  $c \neq 0$ , on a  $\frac{dv}{du}$  nul et les équations précédentes donnent  $a-v=0$ ; en conséquence les (7) deviennent en général  $x=0, y=0$  et la courbe catoptrique se réduirait au point lumineux.