IV. — La première solution d'Euler.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

IV. — La première solution d'Euler.

6. — Les formules à appliquer maintenant sont les suivantes (voyez la fig. 2):

$$\mathrm{TS} = -s\,, \qquad \mathrm{CS} = a + v \quad (v \text{ fonction impaire de } s)$$

$$\sin \mathrm{CMO} = \frac{2(a+v)s}{(a+v)^2 + s^2}\,, \qquad \cos \mathrm{CMO} = \frac{(a+v)^2 - s^2}{(a+v)^2 + s^2}$$

$$\mathrm{CM} = a + v + \frac{s^2}{a+v}\,, \qquad \mathrm{MO} = \frac{2s\,ds}{dv} + a + v - \frac{s^2}{a+v}$$

$$\mathrm{CO} = \frac{2s\sqrt{dv^2 + ds^2}}{dv}\,, \qquad \operatorname{tg} \mathrm{CMO} = \frac{dv}{ds}\,.$$

Nous choisissons à présent comme axe une droite quelconque AB passant par le point C. Soit R son intersection avec le rayon réfléchi MM* et ω l'angle que celui-ci forme avec l'axe; si l'on pose $\cos \omega = \frac{u}{c}$ (c étant une constante différente de O), on aura $\sin \omega = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c}$, $d\omega = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}$ et u sera aussi une fonction impaire de s. Soit $m\mathrm{O}r$ le rayon réfléchi consécutif au rayon MOR; on aura $\widehat{\mathrm{C}rm} = \omega + d\omega$ et ensuite $\widehat{\mathrm{MO}m} = d\omega$. Mais on a déjà trouvé $\widehat{\mathrm{MO}m} = \frac{dr}{ds} =$ (car $r = a + v$) $\frac{dv}{ds}$, $d\omega = \frac{dv}{s} = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}$; donc on conclut:

$$s = -\frac{dv \,.\, \sqrt{c^2 - u^2}}{du}\,;$$

u sera une fonction impaire de s, donc inversement s et v seront des fonctions impaires de u.

On observe à présent que dans le triangle CRM on connaît les angles et le côté CM; en conséquence le théorème des sinus nous donne

$$\mathrm{CR} = -\frac{2c \,.\, dv}{du}\,, \qquad \mathrm{RV} = -\frac{2u \,.\, dv}{du}$$

et ensuite

$$\mathrm{MR} = a + v - \frac{2u \,.\, dv}{du} - \frac{(c^2 - u^2) \,.\, dv^2}{(a+v) \,.\, du^2}\,.$$

Menons la droite MP perpendiculaire à l'axe ACB; comme on a MP = MR . sin ω, à cause des formules qu'on a trouvées, on peut écrire

$$\mathrm{MP} = \left(a + v - 2\frac{u \, . \, dv}{du} - \frac{dv^2}{du^2}\,\frac{c^2 - u^2}{a + v}\right)\frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} \;,$$

où le signe ambigu du radical correspond à la symétrie de la courbe catoptrique par rapport à l'axe AB. On a encore

$$\mathrm{RP} = \mathrm{MR} \cos\omega = \frac{u\,(a + v)}{c} - \frac{2\,u^2 \, . \, dv}{c \, . \, du} - \frac{u\,(c^2 - u^2)}{c\,(a + v)}\,\frac{dv^2}{du^2}$$

et, à cause de la valeur de CR,

$$\mathrm{CP} = \frac{dv^2}{du^2} \cdot \frac{u\,(c^2 - u^2)}{c\,(c + v)} - 2\,\frac{dv}{du}\,\frac{c^2 - u^2}{c} - \frac{u\,(a + v)}{c} \;.$$

Si donc nous prenons comme premier axe d'un système cartésien la droite AB et comme origine le point C, on aura CP = x et MP = y.

Euler trouve convenable de changer dans les formules précédentes le signe de v; par conséquent il écrit comme il suit les formules qui donnent la solution du problème:

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{u\,(a - v)}{c}\left[1 - \frac{du}{dv}\,\frac{c^2 - u^2 + c\sqrt{c^2 - u^2}}{u\,(a - v)}\right]\left[1 - \frac{du}{dv}\,\frac{c^2 - u^2 - c\sqrt{c^2 - u^2}}{u\,(a - v)}\right] \\ y &= \frac{c^2 - u^2}{c\,(a - v)}\left[a - v + (c + u)\,\frac{dv}{du}\right]\left[a - v - (c - u)\,\frac{dv}{du}\right] \;; \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

[1]

en supposant que ces formules déterminent le point M de la première réflexion, celles qui se rapportent au point M* de la seconde s'en déduisent en échangeant les signes de u, v et du radical.

Remarque. — A toute équation $f\,(u, v) = 0$ entre u et v correspond une courbe catoptrique particulière; si f est une fonction algébrique, on peut la supposer rationnelle et entière; la même chose arrivera alors par rapport aux dérivées $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$; cela prouve qu'en substituant à $\frac{dv}{du}$ le rapport $-\frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial v}$ les for-

---

[1] Comme u et v sont liées par une relation, les équations (7) nous offrent peut-être le premier exemple de la représentation des coordonnées d'une courbe *à l'aide de deux paramètres, entre lesquels il existe une relation connue.*

mules (7) deviendront algébriques en u, v; entre elles et l'équation $f(u, v) = 0$ on pourra éliminer ces quantités et on arrivera à une équation également algébrique en x, y: *cela prouve l'existence d'un nombre indéfini de courbes catoptriques, toutes algébriques.*

V. — Quelques conséquences des formules trouvées. Exemples.

7. — Les formules (7) mènent à toutes les propriétés de la courbe catoptrique; bornons-nous à citer celles dont parle Euler. La courbe catoptrique coupe orthogonalement l'axe en deux points dont la distance est $2a$. L'ordonnée EC du point C est fournie en posant $x = 0$ dans la première des formules (7); sa valeur est donc

$$\frac{-2c(a-v)\left(\sqrt{c^2-u^2} \pm c\right)}{u^2};$$

tandis que les points d'ordonnées *maxima* sont donnés par les formules

$$x = c\frac{dv}{du}, \qquad y = \frac{c\sqrt{c^2-u^2}}{u}\frac{dv}{du},$$

etc.[1]

Euler remarque encore que des formules exposées on peut tirer aisément la représentation analytique de la caustique de la

[1] Les mêmes formules permettraient l'étude des relations géométriques ayant lieu entre la courbe catoptrique et le point lumineux C. Par exemple, elles portent à la conclusion que *ce point n'appartient jamais à cette courbe.* En effet, des équations

$$-\frac{u(a-v)}{c} + 2\frac{c^2-u^2}{c}\frac{dv}{du} + \frac{u(c^2-u^2)}{c(a-v)}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

$$a - v + 2u\frac{dv}{du} - \frac{c^2-u^2}{a-x}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0,$$

on tire, en ajoutant à la première la seconde multipliée par $\frac{u}{c}$,

$$2c\frac{dv}{du} = 0;$$

comme $c \neq o$, on a $\frac{dv}{du}$ nul et les équations précédentes donnent $a - v = 0$; en conséquence les (7) deviennent en général $x = 0$, $y = 0$ et la courbe catoptrique se réduirait au point lumineux.