

## II. — Applications à quelques questions générales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

f. — Pour un point N lié au trièdre mobile ( $i_m$ ) on aura, puisque  $p \wedge n = p^b i_b \wedge n^c i_c = i^a (abc) p^b n^c$ ,

$$dN = dM + p \wedge n = i_a (M^a + (abc) p^b n^c) , \quad (f)$$

g. — Si N était mobile par rapport à ( $i_m$ ) on aurait (DARBOUX, L. I, ch. VII, éq. 4):

$$dN = i_a (dn^a + M^a + (abc) p^b n^c) .$$

## II. — APPLICATIONS À QUELQUES QUESTIONS GÉNÉRALES.

a. — *Tangentes conjuguées.* — « Si le point M de la surface décrit une courbe on obtiendra la conjuguée de la tangente à cette courbe en prenant l'intersection du plan tangent en M avec le plan tangent infiniment voisin » (DARBOUX, L. V, ch. I), cette droite est l'axe des normales N — M en M, et N + dN — (M + dM) au point infiniment voisin de M, elle a donc pour vecteur, d'après (f):

$$\begin{aligned} j &= (N - M) \wedge (N - M + dN - dM) = \\ &= n \wedge (n + p \wedge n) = p (n \times n) - n (p \times n) = p - np^3 = p^\varepsilon i_\varepsilon , \end{aligned}$$

et un déplacement  $\delta M$  suivant la direction conjuguée de  $dM$  devra satisfaire à l'équation (puisque  $\delta M$  devra être suivant  $j$ ):

$$\begin{aligned} \delta &= j \wedge \delta M = (n \wedge dN) \wedge \delta M = p^\mu i_\mu \wedge M_r^\nu \delta u^r i_\nu = \\ &= p^\mu M_r^\nu (\mu\nu 3) i_3 \delta u^r = (3\mu\nu) np_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta , \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$(3\mu\nu) p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta = 0 .$$

Si les deux directions conjuguées coïncident, on obtient l'équation des asymptotiques:

$$j \wedge dM = 0 \quad \text{ou} \quad (3\mu\nu) p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha du^\beta = 0 ,$$

ou encore, ayant  $j = n \wedge (p \wedge n)$  et  $dN = p \wedge n$ , on a  $dN \times j = 0$  et, ici,  $j$  portant  $dM$ :

$$dM \times dN = 0 .$$

b. — *Lignes de courbure.* — 1° Cherchons les déplacements  $d$  du trièdre mobile pour lesquels la normale à la surface engendrera une surface développable, il faut qu'il existe sur  $n$  un point  $P = M + \rho n$  décrivant, dans le mouvement considéré, une courbe constamment tangente à cette normale,  $dP = dM + \rho dn + nd\rho$  sera porté par  $n$  si  $n \wedge dP = 0$ , donc si  $n \wedge (dM + \rho dn) = 0$ , ainsi pour un déplacement suivant une ligne de courbure on aura :

$$dM + \rho dn = 0, \quad (\rho)$$

or  $n = N - M$ ,  $dn = dN - dM = dM + \rho \wedge n - dM = \rho \wedge n$ , posons  $k = \frac{1}{\rho}$ , l'équation devient (équation de Rodrigues)

$$dn + k dM = 0, \quad \text{ou} \quad (k M_\alpha + p_\alpha \wedge n) du^\alpha = 0, \quad (R)$$

de la forme  $x_\alpha du^\alpha = 0$ , pour que cette équation homogène en  $du^\alpha$  ait une solution, il faut que l'on ait :  $x_1 \wedge x_2 = 0$ , posons  $H = |M_1 \wedge M_2|$ , rappelant que  $M_1 \wedge M_2 = Hn$ ,  $M_\alpha \times n = 0$ , et  $(p_1 \wedge n) \wedge (p_2 \wedge n) = n(n \times p_1 \wedge p_2)$ ,  $n$  apparaît alors en facteur dans tous les termes, il faut donc que son coefficient soit nul, ce qui donne l'équation aux courbures principales :

$$Hk^2 + (p_1 \times M_2 - p_2 \times M_1)k + n \times p_1 \wedge p_2 = 0,$$

on a ainsi les expressions suivantes de la courbure totale  $K$  et de la courbure moyenne  $J$  :

$$K = \frac{p_1 \wedge p_2 \times n}{M_1 \wedge M_2 \times n} = \frac{p_1 \wedge p_2 \times n}{H}, \quad J = \frac{M_1 \times p_2 - M_2 \times p_1}{H}.$$

Remarquons que l'on peut donner à  $K$  une autre forme, ayant  $p_1 \wedge p_2 \times M_1 \wedge M_2 = p_1 \wedge p_2 \times Hn = Hp_1 \wedge p_2 \times n = H^2 K$  on peut écrire  $K = p_1 \wedge p_2 \times M_1 \wedge M_2 / H^2$ .

La condition  $(\rho)$   $dM + \rho p \wedge n = 0$  exprime que  $dM$  est parallèle à  $p \wedge n$ , donc (ce qui revient à éliminer  $\rho$ )  $dM \wedge (p \wedge n) = -p \times dM = 0$  (car  $n \times dM = 0$ ), l'équation des lignes de courbure est donc :

$$p \times dM = 0 \quad (\gamma)$$

(la tangente est orthogonale à la rotation du trièdre).

2° On retrouve cette équation en cherchant si l'un des mouvements infiniment petits du trièdre peut se réduire à une rotation, exprimons qu'il existe une ligne de points  $P$ , liés au trièdre, de déplacement nul :  $dP = dM + p \wedge MP = 0$ , d'où :

$$MP = \lambda p + p \wedge dM / p^2 . \quad (\Delta)$$

On voit que pour un tel déplacement  $p \times dM = 0$  ( $\gamma$ ), « les déplacements qui se réduisent à des rotations correspondent à des déplacements de l'origine  $M$  suivant les lignes de courbure ( $\gamma$ ) à la surface » (DARBOUX, § 489). Il en résulte aussi que dans ce déplacement  $p$  est dans le plan normal en  $M$  à la ligne de courbure ( $\gamma$ ), la normale  $n$  sera donc coupée par  $MP$  en un point  $C = \rho n + M$ , tel que  $\rho n = \lambda p + p \wedge dM / p^2$ , en  $\wedge p$  il vient  $\rho n \wedge p = \frac{p \wedge dM}{p^2} \wedge p = dM$ , ce qui est ( $\rho$ ) « Les axes qui correspondent à ces rotations passent par le centre de courbure correspondant » ( $d^0$ ), en  $\times p$ , on a  $\rho n \times p = \lambda p^2$ , en  $\times n$ , on a

$$\rho = \lambda p \times n + n \times p \wedge dM / p^2 = \rho \frac{(p \times n)^2}{p^2} + n \times p \wedge dM / p^2$$

d'où pour  $C$

$$\rho = \frac{n \times p \wedge dM}{p^2 - (p \times n)^2} .$$

3° Les directions principales étant orthogonales, si  $t^\varepsilon$  sont leurs unitaires (dans ce qui suit  $\varepsilon$  n'est pas un indice muet à sommer), les formules de Rodrigues  $d_\varepsilon n + k_\varepsilon d_\varepsilon M = 0$ , donnent  $t^\varepsilon (d_\varepsilon \sigma + k_\varepsilon d_\varepsilon s) = 0$ , de plus, on pourra écrire  $dn = dn \times t^r \cdot t^r$ , posons  $\varphi = t^1, t$  on a :

$$t = t^1 \cos \varphi + t^2 \sin \varphi , \quad (1)$$

enfin, comme  $n$  est orthogonal à tout déplacement de  $M$  dans le plan tangent :  $n \times dM = 0$ ,  $n \times d_\varepsilon M = 0$ , donc  $d_\varepsilon n \times dM + n \times d_\varepsilon dM = 0$ , et  $dn \times d_\varepsilon M + n \times dd_\varepsilon M = 0$ , aussi, ayant  $dd_\varepsilon M = d_\varepsilon dM$ ,  $dn \times d_\varepsilon M = d_\varepsilon n \times dM$ , ou

$$dn \times t^\varepsilon d_\varepsilon s = t^\varepsilon d_\varepsilon \sigma \times t ds = t^\varepsilon \times t ds (-k_\varepsilon d_\varepsilon s)$$

et

$$dn \times t^\varepsilon = -k_\varepsilon ds t^\varepsilon \times t , \quad (2)$$

d'où ( $\kappa$  courbure,  $\tau$  torsion) avec les notations usuelles

$$k = \kappa \cos \theta = \frac{n \times d^2 M}{ds^2} = - \frac{dn \times t^r \cdot t^r \times dM}{ds^2} =$$

$$= \frac{k_1 ds \cos \varphi \cdot ds \cos \varphi + k_2 ds \sin \varphi \cdot ds \sin \varphi}{ds^2}, \quad (\alpha)$$

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \quad (\text{E. Euler})$$

$$\mathfrak{C} = \tau - \frac{d\theta}{ds} = \frac{dM \times dn \wedge n}{ds} = \frac{dn \times n \wedge t ds}{ds^2} \quad (\beta)$$

qui vaut d'après (1) et (2)

$$dn \times \frac{\cos \varphi t^2 - \sin \varphi t^1}{ds} = \cos \varphi (-k_2 \sin \varphi) - \sin \varphi (-k_1 \cos \varphi),$$

$$\mathfrak{C} = (k_1 - k_2) \sin \varphi \cos \varphi, \quad (\text{B. Bonnet})$$

( $\gamma$ ) (E) peut s'écrire:

$$k_1 - k = (k_1 - k_2) \sin^2 \varphi, \quad k - k_2 = (k_1 - k_2) \cos^2 \varphi,$$

(B) peut s'écrire en portant ses deux membres au carré et tenant compte de ce qui précède:

$$\mathfrak{C}^2 = (k_1 - k)(k - k_2),$$

d'où, pour les lignes de courbure,

$$\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'après (B)} \quad \mathfrak{C} = 0, \quad \text{donc} \quad \tau = \frac{d\theta}{ds}, \quad (\text{Lancret});$$

pour les géodésiques

$$\theta = 0, \quad k = \kappa \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}^2 = \tau^2 = (k_1 - \kappa)(\kappa - k_2), \quad (\text{Kommerer});$$

pour les asymptotiques

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \mathfrak{C} = \tau = \pm \sqrt{-k_1 k_2}, \quad (\text{Enneper}).$$

**c. — Représentation sphérique.** — Considérons les quatre trièdres: 1° le trièdre ( $i_m$ ) de rotation  $p$  et d'origine M; 2° le trièdre parallèle ( $i_m^0$ ) de même rotation  $p$  et d'origine O fixe; 3° le trièdre formé par  $n$ , normale à la surface (qui est  $i_3$ ), par  $t$ ,

unitaire de la tangente  $dM$  à la courbe (C) dont un arc  $ds$  est décrit par  $M$  dans le déplacement  $d$ , et par le vecteur  $n \wedge t$  (ce trièdre est dit de Ribaucour et sa rotation sera  $r$ ); 4° le trièdre de Serret-Frenet associé à la courbe C,  $t, \hat{n}, b$ . L'angle  $i_1, t$  sera désigné par  $\psi$ , l'angle  $\hat{n}, n$  par  $\theta$ , l'angle entre  $i_1$  et  $p \wedge n = dn$  par  $\chi$ .

1. — L'extrémité du vecteur  $n = i_3^0$  a un déplacement  $dn = p \wedge n$ , soit, comme au (I, e),  $d\sigma$  sa longueur, puis  $t^0$  le vecteur égal à  $t$  issu de 0, l'angle  $i_1^0, t^0$  vaut aussi  $\psi$ , par suite:

$$t_0 = t = \frac{dM}{ds} = i_1^0 \cos \psi + i_2^0 \sin \psi = M^e i_\varepsilon^0 / ds ,$$

$$p \wedge n = p^r i_r^0 \wedge n = p^2 i_1^0 - p^1 i_2^0 , \quad dn = d\sigma (\cos \chi i_1^0 + \sin \chi i_2^0) ,$$

$$dn \times dM = d\sigma ds \cos (\psi - \chi) = p \wedge n \times t ds = (p^2 \cos \psi - p^1 \sin \psi) ds ,$$

$$\begin{aligned} dn \wedge dM &= d\sigma ds \sin (\psi - \chi) n = (p \wedge n) \wedge t ds = \\ &= nt \times p ds = (p^1 \cos \psi + p^2 \sin \psi) ds \cdot n , \end{aligned}$$

qui contiennent les formules de DARBOUX (L. V, ch. I, éq. 5):  
 $d\sigma \cos (\psi - \chi) = p^2 \cos \psi - p^1 \sin \psi$ , ...

2. — Soit  $\kappa$  la courbure en  $M$  de la courbe (C), on a  $dt = \kappa ds \hat{n}$ , comme l'extrémité du vecteur subit un déplacement (d'après I a)  $dt^0 = dt = t_r^0 du^r + p \wedge t$ , et que l'on a:

$$t_r^0 du^r = -\sin \psi d\psi i_1^0 + \cos \psi d\psi i_2^0 = n \wedge t d\psi ,$$

$$p \wedge t = (p^1 \sin \psi - p^2 \cos \psi) n + p^2 \cos \psi i_2^0 - p^1 \sin \psi i_1^0 ,$$

il vient

$$\kappa ds \hat{n} = (d\psi n + p) \wedge t .$$

En multipliant par  $n$  (scalairement, vectoriellement), ayant

$$\hat{n} \wedge n = t \sin \theta ,$$

$$\kappa \cos \theta ds = n \wedge p \times t = p^1 \sin \psi - p^2 \cos \psi ,$$

$$t \kappa \sin \theta ds = (d\psi + p \times n) t , \quad \text{ou} \quad \kappa \sin \theta ds = d\psi + p^3 ;$$

on en déduit  $\kappa \cos \theta = -\cos (\psi - \chi) d\sigma/ds$ , on en déduit aussi, ayant  $n \wedge p \times t = -dn \times dM/ds$ , que  $\kappa \cos \theta = -t \times dn/ds$

sera un invariant pour toutes les courbes ayant même tangente  $t$ , ensuite que:  $\kappa \cos \theta = \frac{n \times d^2 M}{ds^2}$  (puisque  $n \times dM = 0$ ,  $dn \times dM = -n \times d^2 M$ ). On peut en déduire rapidement une forme de l'équation des géodésiques, car  $b$  étant l'axe du plan osculateur à (C) en M, pour que le plan osculateur soit en chaque point normal à la surface,  $b$  doit être normal à  $n$ , on a donc pour équation

$$0 = n \times b = n \times t \wedge \hat{n} = t \times \hat{n} \wedge n = t \times t \sin \theta = \sin \theta ,$$

ou

$$d\psi + p^3 = 0 .$$

3. — Soit  $\tau$  la torsion de la courbe (C) en M, on a  $db = \tau ds \hat{n}$ , l'extrémité du vecteur  $b^0 = b = t \wedge n \cos \theta + n \sin \theta$ , subit un déplacement  $db^0 = b_{/r}^0 du^r + p \wedge b$ , mais

$$\begin{aligned} b_{/r}^0 du^r &= -\sin \theta d\theta t \wedge n + \cos \theta (i_2^0 \sin \psi + i_1^0 \cos \psi) d\psi + n \cos \theta d\theta = \\ &= n \wedge t \sin \theta d\theta + t \cos \theta d\psi + n \cos \theta d\theta , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \wedge b &= p \wedge (t \wedge n) \cos \theta + p \wedge n \sin \theta = \\ &= t p \times n \cos \theta - n p \times t \cos \theta + p \wedge n \sin \theta , \end{aligned}$$

mais

$$p \wedge n = p \wedge n \times t \cdot t - p \times t \cdot n \wedge t ,$$

donc:

$$\begin{aligned} &\tau ds (n \cos \theta + n \wedge t \sin \theta) = \\ &= (d\theta - p \times t) (n \cos \theta + n \wedge t \sin \theta) + t [(d\psi + p^3) \cos \theta + p \wedge n \times t \sin \theta] , \end{aligned}$$

on en déduit la valeur de la torsion géodésique:

$$\mathfrak{E} ds = \tau ds - d\theta = -p \times t = -p^1 \cos \psi - p^2 \sin \psi = -n \times dn \wedge t .$$

(de  $\mathfrak{E} ds = -p \times t$ , nous déduisons d'abord le théorème de Bonnet:  $\mathfrak{E} ds$  est le même pour toutes les courbes ayant même tangente et ensuite que  $\mathfrak{E} ds$  est nul le long d'une ligne de courbure). Quant au terme en  $t$  il est identiquement nul car

$$(d\psi + p^3) \cos \theta = \kappa ds \sin \theta \cdot \cos \theta ,$$

et

$$p \wedge n \times t \sin \theta = -n \wedge p \times t \sin \theta = -\kappa \cos \theta ds \cdot \sin \theta .$$

On a aussi d'après le 1<sup>o</sup>  $\tau ds - d\theta = -d\sigma \sin(\psi - \chi)$  qui, combinée à la valeur de  $\kappa \cos \theta$  donne

$$(\kappa \cos \theta)^2 + \left( \tau - \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 ;$$

4. — Sur le repère de Ribaucour la rotation du trièdre ( $i_m$ ) a pour valeur:

$$\begin{aligned} p &= p \times n \cdot n + p \times t \cdot t + p \times n \wedge t \cdot n \wedge t = \\ &= (\kappa \sin \theta ds - d\psi) n + (d\theta - \tau ds) t - \kappa \cos \theta ds n \wedge t , \end{aligned}$$

elle s'exprimera donc sur son repère par:

$$\begin{aligned} p &= (\kappa \sin \theta ds - d\psi) n + (d\theta - \tau ds) (i_1 \cos \psi + i_2 \sin \psi) \\ &\quad - \kappa \cos \theta ds (-i_1 \sin \psi + i_2 \cos \psi) , \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} p &= i_1 (\kappa \cos \theta ds \sin \psi + (d\theta - \tau ds) \cos \psi) + \\ &+ i_2 (-\kappa \cos \theta ds \cos \psi + (d\theta - \tau ds) \sin \psi) + i_3 (\kappa \sin \theta ds - d\psi) , \end{aligned}$$

avec les notations habituelles on aura:

$$\frac{p}{ds} = (\kappa_N \sin \psi - \mathfrak{T} \cos \psi) i_1 - (\kappa_N \cos \psi + \mathfrak{T} \sin \psi) i_2 + \left( \kappa_G - \frac{d\psi}{ds} \right) i_3 ,$$

remarquons que le trièdre orthonormal le plus naturellement associé à une courbe tracée sur une surface semble être le trièdre de Ribaucour car sa rotation  $r$  (obtenue en faisant  $d\psi = 0$  dans  $p$ ) a pour valeur sur lui-même:

$$r/ds = \kappa_G n - \mathfrak{T} t - \kappa_N n \wedge t .$$

d. — *Rotation, courbures, torsion et composantes de  $dM$  et  $d^2M$ .* — 1. — Avant de calculer  $d^2M$ , indiquons quelques résultats utiles, comme  $dM$  est dans le plan tangent auquel  $i_3 = n$  est normal,  $dM = M^\alpha i_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , et comme sur la surface (S)  $u^3 = \text{const.}$ , en continuant à indiquer par un

indice grec, un indice ne prenant que les valeurs 1 et 2, on peut écrire :

$$dM = M_{\alpha} du^{\alpha} \quad (\text{où } M_{\alpha} = \partial M / \partial u^{\alpha}) ,$$

$$dM = M_{\alpha}^{\mu} i_{\mu} du^{\alpha} , \quad M_{\alpha} = M_{\alpha}^{\mu} i_{\mu} ,$$

par suite :

$$g_{\alpha\beta} = M_{\alpha} \times M_{\beta} = M_{\alpha}^{\mu} i_{\mu} \times M_{\beta}^{\nu} i_{\nu} = (\mu\nu) M_{\alpha}^{\mu} M_{\beta}^{\nu} = M_{\alpha}^{\mu} M_{\beta}^{\mu} .$$

Si  $\Phi$  est la forme quadratique  $dM^2 = g_{\mu\nu} du^{\mu} du^{\nu}$ , en désignant par  $\Phi_{\varepsilon}$  sa demi-dérivée en  $du^{\varepsilon}$ , on a :

$$\Phi_{\varepsilon} = g_{\varepsilon\alpha} du^{\alpha} = M_{\varepsilon}^{\mu} M^{\mu} .$$

Si  $H$  est le module de  $M_1 \wedge M_2$  porté par  $n$ , on aura  $M_{\alpha} \wedge M_{\beta} = (3\alpha\beta) Hn$ , comparant à

$$M_{\alpha} \wedge M_{\beta} = M_{\alpha}^{\mu} i_{\mu} \wedge M_{\beta}^{\nu} i_{\nu} = M_{\alpha}^{\mu} M_{\beta}^{\nu} (\mu\nu r) i_r ,$$

où  $\mu, \nu$  ne prenant que les valeurs 1 et 2, l'unique valeur de  $r$  qui n'annule pas le symbole  $(abc)$  sera 3, il en résulte :

$$M_{\alpha} \wedge M_{\beta} = (3\alpha\beta) Hn = (3\mu\nu) M_{\alpha}^{\mu} M_{\beta}^{\nu} n .$$

(D'une manière générale  $M_r \wedge M_s = H(rst) M^t$  où  $H = M_1 \wedge M_2 \times M_3$ . Cf. *Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles*, 1931, p. 30.)

2. — Ayant  $d^2 M = dM^{\mu} i_{\mu} + M^{\mu} p \wedge i_{\mu}$ , comme

$$p \wedge i_{\mu} = -i_{\mu} \wedge p^s i_s = -(\mu sr) i_r p^s ,$$

$$d^2 M = i_r [(r\mu) dM^{\mu} - (r\mu s) M^{\mu} p^s] .$$

Le crochet étant  $i_r \times d^2 M$ : 1° Si  $r = 1, 2$ :

$$M_{\alpha} \times d^2 M = M_{\alpha}^{\nu} i_{\nu} \times d^2 M = M_{\alpha}^{\mu} dM^{\mu} - (\nu\mu s) M_{\alpha}^{\nu} M^{\mu} p^s ,$$

tenons compte que  $(\nu\mu s)$  n'est différent de zéro que si  $s = 3$ , que

$$g_{\alpha\beta} = M_{\alpha}^{\nu} M_{\beta}^{\nu} \quad \text{dans} \quad M_{\alpha} \times d^2 M = g_{\alpha\varepsilon} d^2 u^{\varepsilon} + [\alpha, \varepsilon\omega] du^{\varepsilon} du^{\omega} ,$$

puis que  $(3\alpha\beta)H = (3\mu\nu)M_\alpha^\mu M_\beta^\nu$  il reste après division par  $du^\varepsilon$ :

$$[\alpha, \varepsilon\omega]du^\omega = M_\alpha^\mu dM_\varepsilon^\mu - p^3(3\mu\nu)M_\alpha^\mu M_\varepsilon^\nu = M_\alpha^\mu dM_\varepsilon^\nu - p^3(3\alpha\varepsilon)H,$$

$$H(3\alpha\varepsilon)p^3 = M_\alpha^\mu dM_\varepsilon^\mu - [\alpha, \varepsilon\omega]d^\omega. \quad (\text{L. V., ch. II, éq. 43})$$

On peut obtenir ce résultat à partir de

$$M_\beta^\mu = M_\beta \times i_\mu, \quad dM_\beta^\mu = M_\beta \times p \wedge i_\mu + M_{\beta\omega} du^\omega \times i_\mu,$$

et:

$$\begin{aligned} M_\alpha^\mu dM_\beta^\mu &= p \times M_\alpha^\mu i_\mu \wedge M_\beta + M_\alpha^\mu i_\mu \times M_{\beta\omega} du^\omega = \\ &= p \times M_\alpha \wedge M_\beta + M_\alpha \times M_{\beta\omega} du^\omega = p \times (3\alpha\beta)Hn + [\alpha, \beta\omega]du^\omega. \end{aligned}$$

2° Si  $r = 3$ , on aura

$$n \times d^2M = - (3\mu s)M^\mu p^s = M^2 p^1 - M^1 p^2,$$

comme  $n \times d^2M = [3, \varepsilon\omega]du^\varepsilon du^\omega$  que nous désignerons par  $\Psi$  et sa demi-dérivée en  $du^\varepsilon$  par  $\Psi_\varepsilon$ , l'équation précédente pouvant s'écrire  $(3\alpha\beta)p^\alpha M^\beta = \Psi$ , nous aurons

$$(3\alpha\beta)M_\varepsilon^\beta p^\alpha = \Psi_\varepsilon = [3, \varepsilon\omega]du^\omega,$$

le déterminant des coefficients étant  $M_2^2 M_1^1 - M_1^2 M_2^1 = H$ , on a:

$$Hp^\alpha = (3\mu\nu)M_\mu^\alpha \Psi_\nu,$$

ou, sous la forme classique d'un déterminant

$$Hp^\alpha = |M_\varepsilon^\alpha \Psi_\varepsilon|,$$

et pour les rotations partielles (DARBOUX, L. V, ch. II, éq. 43 et 44):

$$Hp_\omega^1 = |M_\varepsilon^1 [3\varepsilon\omega]|,$$

$$p_\omega^3 = M_1^\mu \partial M_2^\mu / \partial u^\omega - [1, 2\omega] = -M_2^\mu \partial M_1^\mu / \partial u^\omega + [2, 1\omega];$$

3. — Des formules précédentes nous tirons:

$\alpha$ . La formule classique de la courbure normale:

$$\kappa \cos \theta = n \times \frac{d^2M}{ds^2} = [3, \mu\nu]du^\mu du^\nu / ds^2,$$

β. La torsion géodésique:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} ds^2 &= -p \times t ds = -p \times dM = -p^\alpha M^\alpha = -\frac{1}{H} (3 \mu \nu) M^\alpha M_\mu{}^\alpha \Psi_\nu, \\ \mathfrak{C} ds^2 &= \frac{(3 \mu \nu)}{H} \Psi_\mu \Phi_\nu = \frac{1}{4 H} \frac{\partial (\Psi^\alpha, \Phi)}{\partial (du^1, du^2)},\end{aligned}$$

ou sous une forme développée la formule classique:

$$H \mathfrak{C} ds^2 = \left| [3, \varepsilon \mu] du^\mu \quad g_{\varepsilon \nu} du^\nu \right|.$$

γ. La courbure géodésique: prenons  $s$  comme variable sur la courbe:

$$\begin{aligned}dM &= t ds, \quad d^2 M = dt ds = \varkappa \hat{n} ds^2, \\ dM \wedge d^2 M &= \varkappa ds^3 t \wedge \hat{n} = \varkappa ds^3 b, \quad \sin \theta = n \times b,\end{aligned}$$

donc

$$\varkappa \sin \theta = n \times \frac{dM}{ds} \wedge \frac{d^2 M}{ds^2};$$

nous désignerons par un accent' la dérivée par rapport à  $s$ , par suite

$$t = M_\alpha u^{\alpha'}, \quad d^2 M / ds^2 = M_\varepsilon u^{\varepsilon''} + M_{\varepsilon \mu} u^{\varepsilon'} u^{\mu'};$$

comme

$$M_{\varepsilon \mu} = \begin{bmatrix} r \\ \varepsilon \mu \end{bmatrix} M_r = [r, \varepsilon \mu] M^r,$$

(ici les  $M^r$  constituent le repère réciproque du repère tangent formé par les  $M_r$ , et non plus  $dM \times i_r$ ), nous aurons deux formes pour le résultat, effectuons le calcul avec  $M_r$  en tenant compte du § 1,

$$\begin{aligned}\frac{dM}{ds} \wedge \frac{d^2 M}{ds^2} &= (3 \alpha \varepsilon) H n u^{\alpha'} u^{\varepsilon''} + \begin{bmatrix} r \\ \varepsilon \mu \end{bmatrix} H (\alpha r \nu) M^r u^{\alpha'} u^{\varepsilon'} u^{\mu'}, \\ \varkappa \sin \theta &= (3 \alpha \varepsilon) H u^{\alpha'} u^{\varepsilon''} + \begin{bmatrix} r \\ \varepsilon \mu \end{bmatrix} H (\alpha r 3) u^{\alpha'} u^{\varepsilon'} u^{\mu'},\end{aligned}$$

comme  $(3ar)$  se réduit à  $(3\alpha\beta)$  on aura avec quelques changements d'indices muets.

$$\varkappa \sin \theta = H u^{\alpha'} (3 \alpha \varepsilon) \left( u^{\varepsilon''} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \mu \nu \end{bmatrix} u^{\mu'} u^{\nu'} \right),$$

ou bien sous la forme classique d'un déterminant:

$$\kappa \sin \theta = H \left| u^{\varepsilon'} \quad u^{\varepsilon''} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \mu\nu \end{bmatrix} u^{\mu'} u^{\nu'} \right| ,$$

peut être moins maniable que la précédente (mais plus que l'interminable formule développée).

δ. L'étude des géodésiques peut se faire suivant les mêmes méthodes, mais, ainsi que dans ce § 3, on n'a pas intérêt à utiliser le trièdre orthonormal de Darboux, et comme c'était le but de ces pages, limitons-nous au calcul de la torsion d'une géodésique: la normale à la surface devant être la normale principale de la courbe, sa binormale sera  $b = t \wedge n$ , en différentiant par rapport à l'arc de géodésique nous avons pour la torsion:

$$\tau n = \frac{dM}{ds} \wedge \frac{dn}{ds} ,$$

donc

$$\tau = \frac{dn}{ds} \times n \wedge t ,$$

mais

$$n \wedge t = M_3 \wedge M_\alpha u^{\alpha'} = H (3 \alpha \beta) M^\beta u^{\alpha'} ,$$

$$\tau = M_{3\mu} u^{\mu'} \times H (3 \alpha \beta) M^\beta u^{\alpha'} ,$$

donc:

$$\tau = H (3 \alpha \beta) u^{\alpha'} \begin{bmatrix} \beta \\ 3 \mu \end{bmatrix} u^{\mu'} .$$