

# I. — Mouvement à trois paramètres.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

dans l'espace euclidien, tout en donnant des résultats à la fois condensés et aisément développables.

Je prendrai comme exemple quelques questions traitées par DARBOUX dans sa *Théorie des Surfaces*. Au symbole de Kronecker, désigné ici par  $(ab)$ , j'ajouterai le symbole  $(abc)$  valeur  $+1$ ,  $-1$ , ou  $0$  suivant que la permutation des trois nombres est paire, impaire, ou avec deux nombres égaux.

### I. — MOUVEMENT À TROIS PARAMÈTRES.

Considérons deux trièdres orthonormaux, l'un  $I (I_m)$  fixe, d'origine  $O$ , l'autre  $i (i_m)$  lié au corps, d'origine  $M$ ; ces deux trièdres sont rattachés l'un à l'autre par les cosinus directeurs des angles des axes :

$$c_l^m = I^m \times i_l ,$$

a. — Soit un vecteur  $a$  de composantes  $a^m$  sur le trièdre  $i$ , posons  $a/R = i_m \frac{\partial a^m}{\partial u^R}$ , désignons par  $p_R$  la rotation instantanée de  $i$  quand  $u^R$  varie seul, la condition  $i_m \times i_m = 1$ , nous donne quand  $u^R$  varie seul  $i_m \times \frac{\partial i_m}{\partial u^R} = 0$ , c'est donc que  $p_R$  est tel que  $\frac{\partial i_m}{\partial u^R} = p_R \wedge i_m$ ,  $p_R$  a pour composantes  $p_R^m = p_R \times i^m$ , ces notations permettent de séparer le mouvement en un mouvement relatif et en un mouvement d'entraînement

$$\frac{\partial a}{\partial u^R} = \frac{\partial}{\partial u^R} a^m i_m = i_m \frac{\partial a^m}{\partial u^R} + a^m \frac{\partial i_m}{\partial u^R} = a/R + p_R \wedge a . \quad (1)$$

Passons au repère  $(I_m)$  mais, pour abrégier l'écriture, écrivons  $I$  pour  $I_m$  jusqu'à l'équation  $(A_1)$ ,  $I$  étant fixe, les  $\frac{\partial I}{\partial u^R}$  sont nuls, donc :

$$I/R = I \wedge p_R , \quad (2)$$

leurs dérivées partielles sont  $\frac{\partial}{\partial u^S} I/R = \frac{\partial I}{\partial u^S} \wedge p_R + I \wedge \frac{\partial p_R}{\partial u^S}$ , pour évaluer les  $\frac{\partial}{\partial u^S}$  tenons compte de (1) qui s'applique aux

vecteurs  $I$  et  $p_R$ , le premier membre est, d'après (2):  $(I_{/R})_{/S} + p_S \wedge I_{/R} = I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R)$ , le second membre est  $I \wedge (p_{R/S} + p_S \wedge p_R)$ , on a donc  $I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R) = I \wedge p_{R/S} + I \wedge (p_S \wedge p_R)$ , de même  $I_{/S/R} + p_R \wedge (I \wedge p_S) = I \wedge p_{S/R} + I \wedge (p_R \wedge p_S)$ , or: 1°  $I_{/R/S} = I_{/S/R}$ , car les  $/R/S$  supposent des vitesses relatives, donc des  $i_m$  constants; 2° entre les trois vecteurs  $I$ ,  $p_R$ ,  $p_S$  on a l'identité  $I \wedge (p_R \wedge p_S) + p_R \wedge (p_S \wedge I) + p_S \wedge (I \wedge p_R) = 0$ , donc  $p_S \wedge (I \wedge p_R) - p_R \wedge (I \wedge p_S) = -I \wedge (p_R \wedge p_S)$ , et par soustraction des deux formules on obtient:  $-I \wedge (p_R \wedge p_S) = I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R}) + I \wedge (p_S \wedge p_R) - I \wedge (p_R \wedge p_S)$ , et par suite:  $I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R} + p_S \wedge p_R) = 0$ , d'où les équations pour trois paramètres généralisant les équations de Darboux (L. I, ch. V, éq. 5) pour deux paramètres (cf. *Systèmes orthogonaux*, L. II, ch. II):

$$(A_1) p_{R/S} - p_{S/R} = p_R \wedge p_S ;$$

**b.** — Pour déterminer le mouvement d'un point, introduisons les deux trios de vecteurs: vitesses  $M_R$  de l'origine  $M$  et rotations  $p_R$  du trièdre mobile pour  $u^R$  variant seul ( $R = 1, 2, 3$ ).

Appliquons (1) aux vitesses  $\frac{\partial M_R}{\partial u^S} = M_{R/S} + p_S \wedge M_R$ , mais

puisque  $M_R = \frac{\partial M}{\partial u^R}$ , on a  $\partial^2 M / \partial u^R \partial u^S = \partial M_R / \partial u^S = \partial M_S / \partial u^R$ ,

donc:

$$(A_2) M_{R/S} - M_{S/R} = p_R \wedge M_S - p_S \wedge M_R ;$$

**c.** — Introduisons  $p_R^m$  et  $M_R^m$  composantes sur  $i_m$  de  $p_R$  et  $M_R$ , ayant:

$$M_{R/S} = (M_R^0 i_0)_{/S} = i_0 \partial M_R^0 / \partial u^S, \quad p_{R/S} = (p_R^0 i_0)_{/S} = i_0 \partial p_R^0 / \partial u^S,$$

$$p_R \wedge p_S = p_R^m i_m \wedge p_S^n i_n = p_R^m p_S^n i_0 (mno),$$

$$p_R \wedge M_S = p_R^m i_m \wedge M_S^n i_n = p_R^m M_S^n i_0 (mno) ;$$

les (A) donnent en égalant les coefficients de  $i_0$ :

$$(A_1) \frac{\partial p_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial p_S^0}{\partial u^R} = p_R^m p_S^n (mno),$$

$$(A_2) \frac{\partial M_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial M_S^0}{\partial u^R} = (p_R^m M_S^n - p_S^m M_R^n) (mno) ;$$

d. — Un déplacement  $d$  appliqué aux paramètres produit un déplacement  $dM$  de l'origine et  $di_a$  des axes, ayant pour expression (posant  $M^m = M_r^m du^r = i_m \times dM$ ,  $p = p_r du^r$ ):

$$dM = M_r du^r = (M_r \times i_m) i_m du^r = M_r^m i_m du^r = M^m i_m ,$$

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial u^r} du^r = p_r \wedge i_a du^r = p_r du^r \wedge i_a = p \wedge i_a ;$$

en désignant par  $p^m$  les composantes de  $p$  sur  $(i_m)$ :  $p^m = p \times i_m = p_r du^r \times i_m = p_r^m du^r$ , on peut écrire:

$$di_a = p^c i_c \wedge i_a = (abc) i_b p^c ,$$

si l'on pose  $di_a = \omega_{an} i_n$  (par exemple pp. 177 et suivantes de: *Théorie des groupes finis et continus...* de M. E. CARTAN), le lien avec la notation ci-dessus s'obtient en observant que:

$$\omega_{an} = di_a \times i_n = p \wedge i_a \times i_n = p \times i_a \wedge i_n = p \times (anr) i_r = p^r (anr) ,$$

on en déduit que  $\omega_{AA} = 0$ ,  $\omega_{an} = -\omega_{na}$ , car  $(anr) = -(nar)$ , et que

$$p^a = \frac{1}{2} (amn) \omega_{mn} ;$$

e. — Introduisons maintenant un trièdre auxiliaire qui va servir à la représentation sphérique, son origine sera fixe. Pour un point  $N$  lié au trièdre, tel que  $N = M + n$ , on aura  $\frac{\partial N}{\partial u^R} = \frac{\partial M}{\partial u^R} + n_{/R} + p_R \wedge n$ , qui se réduit à  $\frac{\partial N}{\partial u^R} = p_R \wedge n$ , et posons toujours  $dN = du^r \frac{\partial N}{\partial u^r}$ , on a:

$$dN = p \wedge n ,$$

par suite  $dN^2 = (p \wedge n)^2 = p^2 n^2 - (p \times n)^2$ , et si  $n$  est la normale unitaire à la surface ( $n = i_3$ ),  $n^2 = 1$ ,  $p \times n = p^3 = p_r^3 du^r$ ,  $(p \times n)^2 = p_r^3 p_s^3 du^r du^s$ ,  $p^2 = p^m p^m = p_r^m p_s^m du^r du^s$ , donc en désignant par une lettre grecque un indice qui ne prend pas la valeur 3,

$$d\sigma^2 = dN^2 = (p \wedge n)^2 = p_r^\varepsilon p_s^\varepsilon du^r du^s ,$$

f. — Pour un point N lié au trièdre mobile ( $i_m$ ) on aura, puisque  $p \wedge n = p^b i_b \wedge n^c i_c = i^a (abc) p^b n^c$ ,

$$dN = dM + p \wedge n = i_a (M^a + (abc) p^b n^c) , \quad (f)$$

g. — Si N était mobile par rapport à ( $i_m$ ) on aurait (DARBOUX, L. I, ch. VII, éq. 4):

$$dN = i_a (dn^a + M^a + (abc) p^b n^c) .$$

## II. — APPLICATIONS À QUELQUES QUESTIONS GÉNÉRALES.

a. — *Tangentes conjuguées.* — « Si le point M de la surface décrit une courbe on obtiendra la conjuguée de la tangente à cette courbe en prenant l'intersection du plan tangent en M avec le plan tangent infiniment voisin » (DARBOUX, L. V, ch. I), cette droite est l'axe des normales N — M en M, et  $N + dN - (M + dM)$  au point infiniment voisin de M, elle a donc pour vecteur, d'après (f):

$$\begin{aligned} j &= (N - M) \wedge (N - M + dN - dM) = \\ &= n \wedge (n + p \wedge n) = p(n \times n) - n(p \times n) = p - np^3 = p^\varepsilon i_\varepsilon , \end{aligned}$$

et un déplacement  $\delta M$  suivant la direction conjuguée de  $dM$  devra satisfaire à l'équation (puisque  $\delta M$  devra être suivant  $j$ ):

$$\begin{aligned} \delta &= j \wedge \delta M = (n \wedge dN) \wedge \delta M = p^\mu i_\mu \wedge M_r^\nu \delta u^r i_\nu = \\ &= p^\mu M_r^\nu (\mu\nu 3) i_3 \delta u^r = (3 \mu\nu) n p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta , \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$(3 \mu\nu) p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta = 0 .$$

Si les deux directions conjuguées coïncident, on obtient l'équation des asymptotiques:

$$j \wedge dM = 0 \quad \text{ou} \quad (3 \mu\nu) p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha du^\beta = 0 ,$$

ou encore, ayant  $j = n \wedge (p \wedge n)$  et  $dN = p \wedge n$ , on a  $dN \times j = 0$  et, ici,  $j$  portant  $dM$ :

$$dM \times dN = 0 .$$