problème général des lignes de poursuite dans le plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Le problème général des lignes de poursuite dans le plan.

14. — Autant les lignes de poursuite de la droite ont donné lieu à une abondante littérature, autant la même question pour d'autres courbes que la droite a été délaissée. La raison en est que, dès le cas du cercle, l'équation différentielle des lignes de poursuite cesse d'être intégrable [1].

La courbe (C) étant définie par sa tangente en M

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ,$$

soit

$$\mathrm{X} \cos \Phi + \mathrm{Y} \sin \Phi = \Pi$$

$$\Phi = \varphi + \delta , \qquad \Pi = \varpi \cos \delta + \varpi' \sin \delta ,$$

$$\varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

l'équation d'une droite Δ quelconque passant par le point M (x, y) de (C). L'enveloppe (Γ) de Δ, pour un choix déterminé d'une fonction $\delta(\varphi)$, est touchée par Δ au point μ de coordonnées

$$\xi = x - r \sin \Phi , \qquad \eta = y + r \cos \Phi ;$$

dans ces formules,

$$r = \rho \frac{\sin \delta}{1 + \delta'} .$$

r représente la distance $\mathrm{M}\mu$. Les rayons de courbure ρ et R de (C) en M et (Γ) en μ sont:

$$\rho = \varpi + \varpi'' , \qquad \mathrm{R} = \Pi + \frac{d^2 \Pi}{d \Phi^2} ;$$

$$\mathrm{R}(1 + \delta') = \rho \cos \delta + \frac{dr}{d\varphi} ;$$

[1] L. Dunoyer, Sur les courbes de poursuite d'un cercle. *Nouvelles Annales de Mathématiques* [4], t. VI, 1906, p. 193-222.

F. Morley, A curve of pursuit. *American Math. Monthly*, t. XXVIII, 1921.

F. Morley, The curve of ambience, *American journal of mathematics*, t. XLVI, 1924, p. 193-200.

Emile Turrière, De l'intégration des équations des problèmes de poursuite et d'ambiance en géométrie plane. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LXV, 1937, p. 168-174.

les arcs correspondants ds de (C) et dS de (Γ) sont liés par la relation connue:

$$dS = dr + ds \cdot \cos\delta\ .$$

$$\frac{r}{R} = \sin\delta \cdot \frac{ds}{dS}\cdot$$

Cela étant, la condition

$$dS = k\,ds\ , \qquad k = \text{const.}\ ,$$

exprime que (Γ) est une ligne de poursuite de (C). D'où

$$k = \cos\delta + \frac{dr}{ds}\cdot$$

L'équation générale du problème des courbes de poursuite est donc

$$(k - \cos\delta)\,\rho = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\rho\sin\delta}{1+\delta'}\right)\cdot$$

δ est la fonction inconnue; ρ est une fonction connue de φ, variable qui n'intervient que par

$$\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg} V\ .$$

Cette équation est du second ordre.

Supposons que

$$\frac{\rho'}{\rho} = m\ , \qquad m = \text{const.}\ ;$$

la courbe (C) est alors une spirale logarithmique et, dans le cas plus particulier $m = 0$ un cercle; alors φ est absente dans l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\delta''}{1+\delta'}\sin\delta + \delta''(k - 2\cos\delta) = m\sin\delta + \cos\delta - k\ ;$$

et cette absence permet de mettre l'équation sous la forme d'une équation du premier ordre:

$$1 + \delta' = 1 - \frac{1}{Z}\ , \qquad Z = 1 + \mu\sin\delta\ , \qquad r = \rho\left(\sin\delta + \frac{1}{\mu}\right)\ ,$$

$$\sin\delta\cdot\frac{dZ}{d\delta} + Z(Z-1)\left[Z(\cos\delta + m\sin\delta - k) + k - 2\cos\delta\right] = 0\ .$$

$$\frac{d\mu}{d\delta} + \mu^2\left[\mu\sin\delta(\cos\delta - k) - k\right] = 0\ .$$

A la solution $z = 1$, correspond $\mu = 0$.
A la solution $z = 0$ correspond

$$\mu = -\frac{1}{\sin\delta}, \qquad r = 0 .$$

Il suffit finalement de poser

$$\mu = \Omega \cdot e^{-m\delta},$$

$$\Delta = \int e^{-2m\delta}(k - \cos\delta - m\sin\delta)\sin\delta\, d\delta$$

$$= e^{-2m\delta}\left[\frac{2m\sin 2\delta + (1 - m^2)\cos 2\delta}{4(1 + m^2)} - \frac{k}{1 + 4m^2}(2m\sin\delta + \cos\delta) + \frac{m}{4}\right]$$

pour réduire cette équation à sa forme canonique

$$\frac{d\Omega}{d\Delta} = \Omega^3 + \mathrm{P}\Omega^2,$$

$$\mathrm{P} = \frac{k - 2m\sin\delta}{(k - \cos\delta - m\sin\delta)\sin\delta}\, e^{m\delta} .$$

Il résulte, de cette analyse, que *le problème général des lignes de poursuite se simplifie dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique et que, dans ces cas, l'équation non intégrable est du type Liouville-Appell.*

15. — L'équation donnée par M. L. Dunoyer, dans la note citée plus haut, pour les lignes de poursuite du cercle

$$\frac{dx}{y(x^2 - 1)} = \frac{dy}{(y - a)[2xy - ax + by - bx]},$$

dans le cas $a + b \neq 0$ de non-séparation des variables, se ramène à

$$\frac{d\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{Z}^3 + \mathrm{P}\mathrm{Z}^2,$$

en posant

$$\frac{1}{y} = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{\frac{b}{2}} \cdot \frac{\mathrm{Z}}{x^2 - 1} = \mathrm{UZ},$$

$$d\mathrm{X} = - a(a + b)\mathrm{U}^2 \frac{x\, dx}{x^2 - 1},$$

$$\mathrm{P} = -\frac{(3a + b)x + ab}{a(a + b)\mathrm{U}x} .$$

16. — *Le problème inverse du problème des lignes de poursuite.* — La fonction $R(\Phi)$, caractéristique de la courbe donnée (Γ) est connue. L'élimination de δ entre les conditions

$$\sin\delta = k\cdot\frac{r}{R}, \qquad \cos\delta = k\left(1-\frac{dr}{dS}\right),$$

donne l'équation différentielle

$$\frac{r^2}{R^2}+\left(\frac{dr}{dS}-1\right)^2=\frac{1}{k^2};$$

$$\boxed{r^2+\left(\frac{dr}{d\Phi}-R\right)^2=\frac{R^2}{k^2}},$$

où r est l'inconnue. C'est encore une équation non intégrable du premier ordre.

L'élimination de r donne l'équation en δ

$$\cos\delta\cdot\frac{d\delta}{d\Phi}=k-\cos\delta-M\sin\delta$$

où M est une fonction connue de φ: $M=\frac{R'}{R}$.

Avec la nouvelle inconnue t:

$$t=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}.$$

L'équation prend la forme:

$$2\frac{dt}{d\Phi}=\frac{1+t^2}{1-t^2}\left[(k+1)t^2-2Mt+k-1\right].$$

La dérivée $\frac{dt}{d\Phi}$ est égale à une fonction rationnelle de t dont le degré du numérateur surpasse de deux unités celui du dénominateur: c'est un type d'équations étudiées par P. APPELL.

En posant

$$t=\frac{1-T}{1+T}, \qquad T=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right),$$

il vient:

$$4\frac{dT}{d\Phi}=-\frac{1+T^2}{T}\left[(k+M)T^2-2T+k-M\right].$$

Dans le cas de M constant, les variables δ et Φ sont séparées. Par suite, *dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique, le problème inverse du problème des lignes de poursuite est réductible à une intégrale de fonction rationnelle.*

En particulier, pour $M = k$, l'équation

$$2\frac{dT}{d\Phi} = (1 + T^2)(1 - kT) ,$$

est identique à celle rencontrée plus haut (paragraphe 8, cas f_1 constante).

Sur une généralisation des podaires.

17. — Soit une courbe donnée (C) du plan, $m(x, y)$ son point courant; sur la tangente en m est pris un point $M(x, y)$,

$$X = x + \lambda\frac{dx}{ds} = x + \lambda x' , \qquad Y = y + \lambda\frac{dy}{ds} = y + \lambda y' ,$$

à la distance $\lambda = m\mathrm{M}$ de M; elle sera considérée comme une fonction $\lambda(s)$ de l'abscisse curviligne.

La normale en M à la courbe (Γ) décrite par ce point, pour un choix de $\lambda(s)$, rencontre la normale en m de (C) en un point P de coordonnées

$$\xi = x + \rho y' , \qquad \eta = y - \rho x' ,$$

$$\rho = \frac{1 + \lambda'}{y'x'' - x'y''} .$$

R étant le rayon de courbure en m de la courbe (C):

$$\rho = R(1 + \lambda') .$$

La déviation des normales

$$\delta = \widehat{mPM} ,$$

est donnée par la relation

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{\rho}{\lambda} = R \cdot \frac{1 + \lambda'}{\lambda} .$$

Ces formules connues étant rappelées, cherchons à déterminer $\lambda(s)$ par la condition suivante: *la normale en* M *à la courbe* (Γ) *décrite par ce point rencontre le rayon polaire* Om *en son milieu.*