

problème général des lignes de poursuite dans le plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le problème général des lignes de poursuite dans le plan.

14. — Autant les lignes de poursuite de la droite ont donné lieu à une abondante littérature, autant la même question pour d'autres courbes que la droite a été délaissée. La raison en est que, dès le cas du cercle, l'équation différentielle des lignes de poursuite cesse d'être intégrable¹.

La courbe (C) étant définie par sa tangente en M

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ,$$

soit

$$X \cos \Phi + Y \sin \Phi = \Pi$$

$$\Phi = \varphi + \delta , \quad \Pi = \varpi \cos \delta + \varpi' \sin \delta ,$$

$$\varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

l'équation d'une droite Δ quelconque passant par le point M (x, y) de (C). L'enveloppe (Γ) de Δ , pour un choix déterminé d'une fonction $\delta(\varphi)$, est touchée par Δ au point μ de coordonnées

$$\xi = x - r \sin \Phi , \quad \eta = y + r \cos \Phi ;$$

dans ces formules,

$$r = \rho \frac{\sin \delta}{1 + \delta'}$$

r représente la distance $M\mu$. Les rayons de courbure ρ et R de (C) en M et (Γ) en μ sont:

$$\rho = \varpi + \varpi'' , \quad R = \Pi + \frac{d^2 \Pi}{d\Phi^2} ;$$

$$R(1 + \delta') = \rho \cos \delta + \frac{dr}{d\varphi} ;$$

¹ L. DUNOYER, Sur les courbes de poursuite d'un cercle. *Nouvelles Annales de Mathématiques* [4], t. VI, 1906, p. 193-222.

F. MORLEY, A curve of pursuit. *American Math. Monthly*, t. XXVIII, 1921.

F. MORLEY, The curve of ambience, *American journal of mathematics*, t. XLVI, 1924, p. 193-200.

Emile TURRIÈRE, De l'intégration des équations des problèmes de poursuite et d'ambience en géométrie plane. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LXV, 1937, p. 168-174.

les arcs correspondants ds de (C) et dS de (Γ) sont liés par la relation connue:

$$dS = dr + ds \cdot \cos \delta .$$

$$\frac{r}{R} = \sin \delta \cdot \frac{ds}{dS} .$$

Cela étant, la condition

$$dS = k ds , \quad k = \text{const.} ,$$

exprime que (Γ) est une ligne de poursuite de (C). D'où

$$k = \cos \delta + \frac{dr}{ds} .$$

L'équation générale du problème des courbes de poursuite est donc

$$(k - \cos \delta) \rho = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho \sin \delta}{1 + \delta'} \right) .$$

δ est la fonction inconnue; ρ est une fonction connue de φ , variable qui n'intervient que par

$$\frac{\rho'}{\rho} = \text{tg } V .$$

Cette équation est du second ordre.

Supposons que

$$\frac{\rho'}{\rho} = m , \quad m = \text{const.} ;$$

la courbe (C) est alors une spirale logarithmique et, dans le cas plus particulier $m = 0$ un cercle; alors φ est absente dans l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\delta''}{1 + \delta'} \sin \delta + \delta'' (k - 2 \cos \delta) = m \sin \delta + \cos \delta - k ;$$

et cette absence permet de mettre l'équation sous la forme d'une équation du premier ordre:

$$1 + \delta' = 1 - \frac{1}{Z} , \quad Z = 1 + \mu \sin \delta , \quad r = \rho \left(\sin \delta + \frac{1}{\mu} \right) ,$$

$$\sin \delta \cdot \frac{dZ}{d\delta} + Z(Z - 1) [Z(\cos \delta + m \sin \delta - k) + k - 2 \cos \delta] = 0 .$$

$$\frac{d\mu}{d\delta} + \mu^2 [\mu \sin \delta (\cos \delta - k) - k] = 0 .$$

A la solution $z = 1$, correspond $\mu = 0$.

A la solution $z = 0$ correspond

$$\mu = -\frac{1}{\sin \delta}, \quad r = 0.$$

Il suffit finalement de poser

$$\begin{aligned} \mu &= \Omega \cdot e^{-m\delta}, \\ \Delta &= \int e^{-2m\delta} (k - \cos \delta - m \sin \delta) \sin \delta \, d\delta \\ &= e^{-2m\delta} \left[\frac{2m \sin 2\delta + (1 - m^2) \cos 2\delta}{4(1 + m^2)} - \frac{k}{1 + 4m^2} (2m \sin \delta + \cos \delta) + \frac{m}{4} \right] \end{aligned}$$

pour réduire cette équation à sa forme canonique

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\Delta} &= \Omega^3 + P\Omega^2, \\ P &= \frac{k - 2m \sin \delta}{(k - \cos \delta - m \sin \delta) \sin \delta} e^{m\delta}. \end{aligned}$$

Il résulte, de cette analyse, que *le problème général des lignes de poursuite se simplifie dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique et que, dans ces cas, l'équation non intégrable est du type Liouville-Appell.*

15. — L'équation donnée par M. L. DUNOYER, dans la note citée plus haut, pour les lignes de poursuite du cercle

$$\frac{dx}{y(x^2 - 1)} = \frac{dy}{(y - a)[2xy - ax + by - bx]},$$

dans le cas $a + b \neq 0$ de non-séparation des variables, se ramène à

$$\frac{dZ}{dX} = Z^3 + PZ^2,$$

en posant

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{b}{2}} \cdot \frac{Z}{x^2 - 1} = UZ, \\ dX &= -a(a+b)U^2 \frac{x \, dx}{x^2 - 1}, \\ P &= -\frac{(3a+b)x + ab}{a(a+b)Ux}. \end{aligned}$$

16. — *Le problème inverse du problème des lignes de poursuite.*
— La fonction $R(\Phi)$, caractéristique de la courbe donnée (Γ) est connue. L'élimination de δ entre les conditions

$$\sin \delta = k \cdot \frac{r}{R}, \quad \cos \delta = k \left(1 - \frac{dr}{dS} \right),$$

donne l'équation différentielle

$$\frac{r^2}{R^2} + \left(\frac{dr}{dS} - 1 \right)^2 = \frac{1}{k^2};$$

$$\boxed{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Phi} - R \right)^2 = \frac{R^2}{k^2}},$$

où r est l'inconnue. C'est encore une équation non intégrable du premier ordre.

L'élimination de r donne l'équation en δ

$$\cos \delta \cdot \frac{d\delta}{d\Phi} = k - \cos \delta - M \sin \delta$$

où M est une fonction connue de φ : $M = \frac{R'}{R}$.

Avec la nouvelle inconnue t :

$$t = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}.$$

L'équation prend la forme:

$$2 \frac{dt}{d\Phi} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} [(k + 1)t^2 - 2Mt + k - 1].$$

La dérivée $\frac{dt}{d\Phi}$ est égale à une fonction rationnelle de t dont le degré du numérateur surpasse de deux unités celui du dénominateur: c'est un type d'équations étudiées par P. APPELL.

En posant

$$t = \frac{1 - T}{1 + T}, \quad T = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right),$$

il vient:

$$4 \frac{dT}{d\Phi} = - \frac{1 + T^2}{T} [(k + M)T^2 - 2T + k - M].$$

Dans le cas de M constant, les variables δ et Φ sont séparées. Par suite, dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique, le problème inverse du problème des lignes de poursuite est réductible à une intégrale de fonction rationnelle.

En particulier, pour $M = k$, l'équation

$$2 \frac{dT}{d\Phi} = (1 + T^2)(1 - kT),$$

est identique à celle rencontrée plus haut (paragraphe 8, cas f_1 constante).

Sur une généralisation des podaires.

17. — Soit une courbe donnée (C) du plan, $m(x, y)$ son point courant; sur la tangente en m est pris un point $M(x, y)$,

$$X = x + \lambda \frac{dx}{ds} = x + \lambda x', \quad Y = y + \lambda \frac{dy}{ds} = y + \lambda y',$$

à la distance $\lambda = mM$ de M ; elle sera considérée comme une fonction $\lambda(s)$ de l'abscisse curviligne.

La normale en M à la courbe (Γ) décrite par ce point, pour un choix de $\lambda(s)$, rencontre la normale en m de (C) en un point P de coordonnées

$$\xi = x + \rho y', \quad \eta = y - \rho x',$$

$$\rho = \frac{1 + \lambda'}{y' x'' - x' y''}.$$

R étant le rayon de courbure en m de la courbe (C):

$$\rho = R(1 + \lambda').$$

La déviation des normales

$$\delta = m \widehat{PM},$$

est donnée par la relation

$$\cotg \delta = \frac{\rho}{\lambda} = R \cdot \frac{1 + \lambda'}{\lambda}.$$

Ces formules connues étant rappelées, cherchons à déterminer $\lambda(s)$ par la condition suivante: la normale en M à la courbe (Γ) décrite par ce point rencontre le rayon polaire Om en son milieu.