Applications géométriques de $y'^2 + y^2 = f^2(x)$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Applications géométriques de $y'^2 + y^2 = f^2(x)$.

7. — Deux questions de géométrie dépendent de l'équation différentielle du premier ordre [1]:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f^2(x) .$$

1º La détermination d'une courbe plane satisfaisant à une condition imposée entre l'abscisse curviligne s et l'azimut θ du point courant:

$$s = F(\theta)$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dF}{d\theta}\right)^2 .$$

C'est donc le problème d'*isométrie* par alignement sur un point fixe O: les rayons vecteurs issus de O déterminant des arcs égaux sur les diverses courbes intégrales. Le problème généralise celui des isométriques de la droite, qui se ramène aux fonctions elliptiques [2].

2º La détermination des courbes planes telles que

$$r = f(\alpha)$$

r désignant le rayon polaire OM $= r$, et α étant l'angle d'inclinaison sur Ox de la tangente au point courant M. Si ϖ désigne la distance à cette tangente du pôle O, l'expression connue de r

$$r^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2$$

donne l'équation

$$\varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2 = f^2(\alpha) .$$

---

[1] Cette équation a fait l'objet d'une courte note de M. Dragoslav MITRINOVITCH: Remarque sur une équation différentielle du premier ordre, *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, 1934, p. 171-174.

[2] Maurice D'OCAGNE, Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, 1884-1885, p. 71-83.

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes. *Ibid.*, t. XVII, 1888-1889, p. 171-175.

Le problème de l'éclaireur (à propos d'un article de M. E. TURRIÈRE). *L'Enseignement mathématique*, XVIIe année, 1915, p. 336.

E. TURRIÈRE, Sur le problème de l'éclaireur. *L'Enseignement mathématique*, t. XVII, 1915, p. 212-215.

Prenons donc l'équation

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = f^2(\theta)$$

et posons

$$\operatorname{tang} V = \frac{r\,d\theta}{dr} = \rho \;;$$

l'équation devient:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (1 + \rho^2)(1 - f_1\rho) \,, \qquad f_1 = \frac{f'}{f} \,, \qquad f' = \frac{df}{d\theta} \,.$$

La réduction à la forme canonique de P. Appell

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 + J \,,$$

se fait par le changement de variables:

$$\rho = UZ + W \,,$$
$$d\Theta = M \cdot d\theta \,,$$

avec

$$W = \frac{1}{3f_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f}{f'} \,,$$

$$\operatorname{Log} U = \int \left(\frac{1}{3f_1} - f_1\right) d\theta \,, \qquad 3 \operatorname{Log}(f \cdot U) = \int \frac{f}{f'}\, d\theta \;;$$

$$M = -f_1 \cdot U^2 \;;$$

L'invariant J a l'expression:

$$J = -\frac{1}{27U^3 f_1^3}\left(9\frac{df_1}{d\theta} + 18f_1^2 + 2\right) \cdot$$

$$= -\frac{f}{27U^3 f_1^3}(9ff'' + 9f'^2 + 2f^2) \,.$$

8. — J est nul lorsque

$$9\frac{df_1}{d\theta} + 18f_1^2 + 2 = 0,$$

$$f_1 = -\frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{2}{3}(\theta - \theta_0) \;; \qquad f^2 = A \cos \frac{2}{3}(\theta - \theta_0) \;;$$

sans restriction de la généralité de la question, θ_0 peut être pris égal à zéro et A égal à 1

$$f_1 = -\frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{2}{3} \theta .$$

$$f^2 = \cos \frac{2}{3} \theta .$$

$$ds = \sqrt{\cos \frac{2}{3} \theta} \, d\theta ;$$

les courbes seront rectifiables au moyen de fonctions elliptiques du cas lemniscatique $g_3 = 0$, l'arc dépendant de l'intégrale:

$$\int \sqrt{\cos \varphi} \cdot d\varphi .$$

Les fonctions U, W, M, Θ sont ici:

$$W = -3 \operatorname{cotg} \frac{2}{3} \theta ,$$

$$\frac{1}{U^2} = \sin^3 \frac{2}{3} \theta \cos \frac{2}{3} \theta ,$$

$$\frac{4}{M} = 3 \sin^2 \frac{4}{3} \theta , \qquad \Theta = -\operatorname{cotg} \frac{4}{3} \theta .$$

L'équation se réduit à

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 ,$$

d'où:

$$2\Theta + \frac{1}{Z^2} = \text{const} = k ,$$

$$2\left(\operatorname{cotg} \frac{4}{3} \theta + k\right) \sin^2 \frac{2}{3} \theta \cos \frac{2}{3} \theta = \frac{1}{\left(\rho + 3 \operatorname{cotg} \frac{2}{3} \theta\right)^2} ,$$

$$\left(\cos \frac{4}{3} \theta + k \sin \frac{4}{3} \theta\right) \cdot \sin \frac{4}{3} \theta \left[\rho + 3 \operatorname{cotg} \frac{2}{3} \theta\right]^2 = 1 .$$

L'intégration s'achève par quadrature en exprimant ρ en fonction de la variable $\operatorname{tg} \frac{2}{3} \theta$.

A signaler aussi le cas d'intégration $f_1 =$ constante par séparation des variables.

9. — Comme courbes se rattachant à cette équation, il y a lieu de citer les deux suivantes:

I. Soient N et T′ les traces respectives sur les axes Ox et Oy de la normale MN et de la tangente MTT′ d'une courbe (C).

La condition NT′ = 1 caractérise des courbes (C) telles que

$$r = \cos\alpha\ ,$$
$$\mathrm{MN} = \sin\theta\ , \qquad \mathrm{ON} = \sin\widehat{\mathrm{OMN}}\ ;$$

le cercle circonscrit au triangle OMN a pour diamètre NT′ = 1.

L'équation des courbes est:

$$\varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2 = \cos^2\alpha$$

ϖ étant la distance du pôle O à la tangente d'inclinaison α sur Ox.

II. L'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2\ ,$$

est équivalente à

$$r^2 = \operatorname{tg}\alpha\ .$$

La courbe atuptique.

10. — J. Porro a donné le nom de courbe *atuptique* à l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2+y^2) + 2ay\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{y(x^2+y^2) + 2ax\sqrt{x^2+y^2-a^2}}\ .$$

Ce serait la forme théoriquement assignée aux aubes destinées aux moteurs hydrauliques [1].

---

[1] J. Porro, *Essai sur la théorie des moteurs hydrauliques.* Turin, 1844, p. 29.
Théorie générale des moteurs hydrauliques. *C. R.*, 1852, t. XXXIV, p. 172-174.
H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, 1897, p. 66.
G. Loria, *Curve piane speciali*, I, 1930, p. 118.
Le nom dérive de τύπτω = je frappe de près (par opposition à βάλλω). C'est la courbe *sans choc*.