SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES

Autor(en): **Turrière, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515775

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Il est à peine nécessaire de faire remarquer que, pour ne pas trop allonger l'exposé précédent, nous avons supprimé les énoncés des postulats qui, quoique indispensables au développement des démonstrations complètes des théorèmes de la théorie, se présentent si naturellement à l'esprit qu'en supprimant ces énoncés nous ne croyons pas avoir nui à la clarté de l'exposition. J'ajoute que j'ai appliqué les idées esquissées dans le présent article avec tous les détails nécessaires dans le *Traité de Mécanique rationnelle* que je publie actuellement en langue polonaise.

SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES

PAR

E. TURRIÈRE (Montpellier).

Les équations du type

$$\frac{dy}{dx} + a_0 y^3 + 3 a_1 y^2 + 3 a_2 y + a_3 = 0$$

ont été étudiées par R. LIOUVILLE et par P. APPELL [1]. La présente note concerne diverses courbes dont la détermination dépend d'équations de cette forme.

L'isochrone paracentrique.

1. — En premier lieu, considérons l'isochrone paracentrique [2] qui, historiquement, est la première courbe définie par une équation différentielle dont l'intégration, impossible dans le cas général, tint en échec les fondateurs de l'analyse.

[1] P. APPELL, Sur les invariants de quelques équations différentielles. *Journal de mathématiques pures et appliquées* [4], t. V, 1889, p. 361-423.

[2] Gomes TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables planes ou gauches*, t. II, p. 50-55.

Quelques années plus tard, années dont le nombre comptait pour les progrès de la géométrie infinitésimale, la courbe de pression constante donnait elle aussi lieu à des difficultés. La question posée en 1695, reposée en 1696 par Jean BERNOULLI dans deux lettres à LEIBNIZ n'était résolue qu'en 1700 par le marquis DE L'HÔPITAL dans un mémoire, plus important que la question à laquelle il était consacré et dans lequel étaient énoncés des principes relatifs au mouvement gêné du point pesant. Ici la difficulté tenait uniquement à l'insuffisance de méthode en dynamique et non à l'imperfection de l'analyse [1].

Au contraire, dans le cas du problème de l'isochrone paracentrique proposé par LEIBNIZ en 1689, considéré par Huygens (1694), résolu partiellement en 1694 par Jacques et par Jean BERNOULLI, la difficulté était purement analytique. Jacques BERNOULLI, entre temps, en 1690, montrait que l'isochrone ordinaire était identique à la parabole semi-cubique, complétant ainsi la solution de 1689 de Huygens d'une question posée en 1687 par LEIBNIZ.

L'équation différentielle de l'isochrone paracentrique (en coordonnées polaires)

$$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 = \frac{\sin\theta}{r} + \frac{a}{r^2}, \qquad a = \text{constante} .$$

$$\operatorname{tg}^2 V = y + a ,$$

ne peut, en effet, être intégrée que dans le cas $a = 0$

$$2\sqrt{r} = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} ,$$

la courbe dépend alors des fonctions elliptiques du cas harmonique et c'est précisément à l'étude de la représentation de l'isochrone paracentrique qu'est due la découverte de la lemniscate de Jacques BERNOULLI.

---

[1] Voir mon étude « La courbe de L'Hôpital », dans *L'Enseignement mathématique*, t. XXXVI, 1937, p. 179-194.

2. — Considérons d'une manière générale l'équation de condition

$$y = f(\operatorname{tang} V)$$

imposée à une courbe plane inconnue, ou encore

$$y = r \sin \theta = f(\varphi)$$

en posant

$$\operatorname{tg} V = \varphi .$$

Il en résulte, par dérivation,

$$\frac{dr}{r} + \operatorname{cotg} \theta \, d\theta = \frac{f'}{f} d\varphi \ ;$$

$$d\theta \left[\frac{1}{\varphi} + \operatorname{cotg} \theta \right] = \frac{f'}{f} d\varphi \ .$$

Effectuons le changement d'inconnue

$$\operatorname{cotg} \theta + \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{fz} \ ;$$

l'équation devient

$$\frac{dz}{d\varphi} = ff' \cdot \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2} \cdot z^2 (z + P) \ ,$$

avec

$$P = \frac{f - 2\varphi f'}{ff'(\varphi^2 + 1)} \ .$$

Le changement de variable défini par

$$\varpi = \int \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2} f \, df$$

donne à l'équation sa forme canonique:

$$\frac{dz}{d\varpi} = z^2 (z + P) \ .$$

Pour l'isochrone paracentrique

$$y = \operatorname{tang}^2 V - a \ ,$$

$$f = \varphi^2 - a$$

$$P = \frac{-(\varphi^2 + a)}{2\varphi(\varphi^2 + 1)(\varphi^2 - a)} \ .$$

3. — L'équation est intégrable pour P = constante. Le cas P = 0 donne:

$$\frac{dz}{z^3} = f \cdot \frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2} df ,$$

$$2\varphi f' = f .$$

En prenant

$$f = \sqrt{\varphi} , \; y^2 = tang\, \mathrm{V},$$

la courbe a pour équation polaire

$$r^2 = 2(a - \operatorname{cotg} \theta) ;$$

a est une constante.

Lorsque P est constante, f est déterminé par une équation de Riccati en φ:

$$\frac{d\varphi}{df} = \frac{2\varphi}{f} - k(\varphi^2 + 1) .$$

En posant

$$\varphi = \mathrm{F} \cdot f^2 ,$$

la nouvelle fonction inconnue F est intégrale de l'équation de Riccati

$$\frac{d\mathrm{F}}{df} + k\left(f^2 \mathrm{F}^2 + \frac{1}{f^2}\right) = 0 .$$

k est la valeur constante de P. En posant

$$u = \frac{1}{f} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{X} , \qquad \varphi = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^2} , \qquad \mathrm{F} = \mathrm{P}^2\, \mathrm{Y}$$

la forme canonique de l'équation de Riccati est:

$$\boxed{\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = 1 + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^4} .}$$

Un nouveau changement de variables

$$\mathrm{X} = \frac{1}{3}\xi^{-\frac{1}{3}} , \qquad \mathrm{Y} = \frac{1}{9}\eta ,$$

lui donne la forme

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 + \xi^{-\frac{4}{3}} = 0 .$$

Elle est réduite au type classique

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = k\xi^m$$

$$m = -\frac{4N}{2N+1}$$

N étant entier (N = 1). Le changement de variable

$$\xi = At^{\frac{2}{m+2}}, \qquad A^{m+2} = -\frac{(m+2)^2}{4k},$$

$$\eta = \frac{1}{u}\frac{du}{d\xi},$$

la transforme en l'équation de BESSEL:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2n+1}{t}\frac{du}{dt} + u = 0 \ ;$$

on est dans le cas d'intégration des fonctions de BESSEL d'indice $n = -\frac{3}{2}$,

$$k = -1, \qquad A = \frac{1}{27}.$$

4. — A signaler aussi, un cas d'intégration

$$y^m = \operatorname{tg} V, \qquad m = \text{const.}$$

par séparation des variables:

$$r^{m-1}\, dr = \sin^{-m}\theta \cdot d\theta\ .$$

Courbes définies par une relation entre OT et OM.

5. — Soit T la trace sur l'axe Ox de la tangente en M à une courbe. La condition

$$\lambda = OT = f(r),$$

entre la coordonnée axiale $\lambda = x - y\frac{dx}{dy}$ et le rayon vecteur $r = OM$, devient

$$r^2\frac{d\theta}{dy} = f(r),$$

$$\frac{dx}{x-f} = \frac{dr}{r - \frac{x}{r}f}.$$

En posant

$$x = \frac{r^2}{f} - \frac{1}{z},$$

l'équation prend la forme:

$$\frac{dz}{dr} = r\left(\frac{r^2}{f^2} - 1\right) \cdot z^2 (z + \mathrm{P}),$$

$$\mathrm{P} = \frac{rf' - 3f}{r^2 - f^2}, \qquad f' = \frac{df}{dr}.$$

Il y a séparation des variables, pour P constant.

Pour $\mathrm{P} = 0$, il suffit de prendre $f = r^3$:

$$\frac{1}{z^2} = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2a,$$

d'où la courbe:

$$r^2 \sin^2 \theta = 2(a - \cos\theta),$$

$$y^2 = 2(a - \cos\theta),$$

circulaire, du sixième degré.

Le cas de P constant correspond aux intégrales $f(r)$ d'une équation de Riccati

$$r\frac{df}{dr} = 3f + \mathrm{P}(r^2 - f^2).$$

En posant alors

$$r = \frac{1}{\mathrm{PX}}, \qquad f = \frac{1}{\mathrm{P}} \cdot \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^3},$$

l'équation de Riccati prend la forme canonique

$$\boxed{\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = -1 + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^4}.}$$

Il y a lieu d'observer que le changement de variables

$$\mathrm{Y} = -i\mathrm{Y}_1, \qquad \mathrm{X} = i\mathrm{X}_1,$$

lui donne la forme

$$\frac{d\mathrm{Y}_1}{d\mathrm{X}_1} = 1 + \frac{\mathrm{Y}_1^2}{\mathrm{X}_1^4},$$

obtenue plus haut pour l'équation correspondante de séparation des variables dans le problème de l'isochrone paracentrique; la transformation

$$X_1 = \frac{1}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}, \qquad Y_1 = \frac{1}{9}\eta,$$

donne l'équation

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \xi^{-\frac{4}{3}},$$

intégrable par les fonctions de Bessel d'indice $-\frac{3}{2}$.

6. — Un autre cas d'intégration est celui des courbes définies par la condition:

$$OT = k \cdot OM .$$

L'équation correspondante

$$\frac{dr}{r - kx} = \frac{dx}{x - kr},$$

est homogène. Elle devient

$$k\frac{dr}{r} = \frac{1 - k\cos\theta}{\sin\theta}d\theta .$$

D'où:

$$y = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}}\frac{\theta}{2},$$

$$r\sin\theta = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}}\frac{\theta}{2},$$

$$2x = y(y^{-k} - y^k) .$$

Ces courbes sont identiques aux *images d'Aoust des courbes ordinaires de poursuite.*

Applications géométriques de $y'^2 + y^2 = f^2(x)$.

7. — Deux questions de géométrie dépendent de l'équation différentielle du premier ordre [1]:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f^2(x) .$$

1° La détermination d'une courbe plane satisfaisant à une condition imposée entre l'abscisse curviligne s et l'azimut θ du point courant:

$$s = F(\theta)$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dF}{d\theta}\right)^2 .$$

C'est donc le problème d'*isométrie* par alignement sur un point fixe O: les rayons vecteurs issus de O déterminant des arcs égaux sur les diverses courbes intégrales. Le problème généralise celui des isométriques de la droite, qui se ramène aux fonctions elliptiques [2].

2° La détermination des courbes planes telles que

$$r = f(\alpha)$$

r désignant le rayon polaire OM $= r$, et α étant l'angle d'inclinaison sur Ox de la tangente au point courant M. Si ϖ désigne la distance à cette tangente du pôle O, l'expression connue de r

$$r^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2$$

donne l'équation

$$\varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2 = f^2(\alpha) .$$

---

[1] Cette équation a fait l'objet d'une courte note de M. Dragoslav MITRINOVITCH: Remarque sur une équation différentielle du premier ordre, *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, 1934, p. 171-174.

[2] Maurice D'OCAGNE, Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, 1884-1885, p. 71-83.

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes. *Ibid.*, t. XVII, 1888-1889, p. 171-175.

Le problème de l'éclaireur (à propos d'un article de M. E. TURRIÈRE). *L'Enseignement mathématique*, XVII^e^ année, 1915, p. 336.

E. TURRIÈRE, Sur le problème de l'éclaireur. *L'Enseignement mathématique*, t. XVII, 1915, p. 212-215.

Prenons donc l'équation

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = f^2(\theta)$$

et posons

$$\operatorname{tang} V = \frac{r\,d\theta}{dr} = \rho \ ;$$

l'équation devient:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (1 + \rho^2)(1 - f_1 \rho) \ , \qquad f_1 = \frac{f'}{f} \ , \qquad f' = \frac{df}{d\theta} \ .$$

La réduction à la forme canonique de P. Appell

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 + J \ ,$$

se fait par le changement de variables:

$$\rho = UZ + W \ ,$$
$$d\Theta = M \cdot d\theta \ ,$$

avec

$$W = \frac{1}{3f_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f}{f'} \ ,$$
$$\operatorname{Log} U = \int \left(\frac{1}{3f_1} - f_1\right) d\theta \ , \qquad 3 \operatorname{Log}(f \cdot U) = \int \frac{f}{f'}\, d\theta \ ;$$
$$M = - f_1 \cdot U^2 \ ;$$

L'invariant J a l'expression:

$$J = -\frac{1}{27 U^3 f_1^3}\left(9\frac{df_1}{d\theta} + 18 f_1^2 + 2\right) \cdot$$
$$= -\frac{f}{27 U^3 f_1^3}\,(9 f f'' + 9 f'^2 + 2 f^2) \ .$$

8. — J est nul lorsque

$$9\frac{df_1}{d\theta} + 18 f_1^2 + 2 = 0,$$

$$f_1 = -\frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{2}{3}(\theta - \theta_0) \ ; \qquad f^2 = A \cos \frac{2}{3}(\theta - \theta_0) \ ;$$

sans restriction de la généralité de la question, θ_0 peut être pris égal à zéro et A égal à 1

$$f_1 = -\frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{2}{3}\theta .$$

$$f^2 = \cos\frac{2}{3}\theta .$$

$$ds = \sqrt{\cos\frac{2}{3}\theta}\, d\theta ;$$

les courbes seront rectifiables au moyen de fonctions elliptiques du cas lemniscatique $g_3 = 0$, l'arc dépendant de l'intégrale:

$$\int\sqrt{\cos\varphi}\cdot d\varphi .$$

Les fonctions U, W, M, Θ sont ici:

$$W = -3\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\theta ,$$

$$\frac{1}{U^2} = \sin^3\frac{2}{3}\theta\cos\frac{2}{3}\theta ,$$

$$\frac{4}{M} = 3\sin^2\frac{4}{3}\theta , \qquad \Theta = -\operatorname{cotg}\frac{4}{3}\theta .$$

L'équation se réduit à

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 ,$$

d'où:

$$2\Theta + \frac{1}{Z^2} = \text{const} = k ,$$

$$2\left(\operatorname{cotg}\frac{4}{3}\theta + k\right)\sin^2\frac{2}{3}\theta\cos\frac{2}{3}\theta = \frac{1}{\left(\rho + 3\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\theta\right)^2} ,$$

$$\left(\cos\frac{4}{3}\theta + k\sin\frac{4}{3}\theta\right)\cdot\sin\frac{4}{3}\theta\left[\rho + 3\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\theta\right]^2 = 1 .$$

L'intégration s'achève par quadrature en exprimant ρ en fonction de la variable $\operatorname{tg}\frac{2}{3}\theta$.

A signaler aussi le cas d'intégration $f_1 =$ constante par séparation des variables.

9. — Comme courbes se rattachant à cette équation, il y a lieu de citer les deux suivantes:

I. Soient N et T′ les traces respectives sur les axes Ox et Oy de la normale MN et de la tangente MTT′ d'une courbe (C).

La condition NT′ = 1 caractérise des courbes (C) telles que

$$r = \cos\alpha \ ,$$
$$\mathrm{MN} = \sin\theta \ , \qquad \mathrm{ON} = \sin\widehat{\mathrm{OMN}} \ ;$$

le cercle circonscrit au triangle OMN a pour diamètre NT′ = 1.

L'équation des courbes est:

$$\varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2 = \cos^2\alpha$$

ϖ étant la distance du pôle O à la tangente d'inclinaison α sur Ox.

II. L'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \ ,$$

est équivalente à

$$r^2 = \operatorname{tg}\alpha \ .$$

La courbe atuptique.

10. — J. Porro a donné le nom de courbe *atuptique* à l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2+y^2) + 2ay\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{y(x^2+y^2) + 2ax\sqrt{x^2+y^2-a^2}} \ .$$

Ce serait la forme théoriquement assignée aux aubes destinées aux moteurs hydrauliques [1].

[1] J. Porro, *Essai sur la théorie des moteurs hydrauliques*. Turin, 1844, p. 29.
Théorie générale des moteurs hydrauliques. *C. R.*, 1852, t. XXXIV, p. 172-174.
H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, 1897, p. 66.
G. Loria, *Curve piane speciali*, I, 1930, p. 118.
Le nom dérive de τύπτω = je frappe de près (par opposition à βάλλω). C'est la courbe *sans choc*.

L'équation différentielle n'a pu être intégrée. Donnée sans démonstration par PORRO dans sa communication de 1852, elle a été relevée d'après cette communication. Mais si l'on se reporte à l'opuscule de 1844, on constatera l'existence de deux erreurs dans les formules trigonométriques (de la page 28) qui faussent entièrement l'équation indiquée [1].

11. — Etudions l'équation différentielle telle qu'elle a été considérée jusqu'à présent. En coordonnées polaires elle prend la forme

$$d(r^2 \cos 2\theta) = 2c\sqrt{r^2 - a^2}\, d\theta$$

où $c = 2a$.

Pour $c = 0$, cette équation représente des hyperboles équilatères. Pour $a = 0$, $c \neq 0$, l'équation

$$d(r^2 \cos 2\theta) = 2cr \cdot d\theta$$

est linéaire en r et admet l'intégrale générale

$$r\sqrt{\cos 2\theta} = c\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \text{const.}$$

dépendant d'une intégrale elliptique (du cas lemniscatique $g_3 = 0$).

Dans le cas général, en posant

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{z^2},$$

on met l'équation sous la forme

$$\cos 2\theta \cdot \frac{dz}{d\theta} + a^2 \sin 2\theta \cdot z^3 + cz^2 + z\sin 2\theta = 0 .$$

Sans restriction de la généralité de la question, la constante a peut être prise égale à l'unité. La réduction à la forme type

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 + J ,$$

[1] Voir à ce sujet ma note « Sur diverses courbes planes » des *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, 1937, t. XXII, p. 93-129, 145-150.

se fait par les formules

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \mathrm{M} \; , \qquad z = \mathrm{UZ} + \mathrm{V} \; ,$$

avec

$$\mathrm{U}^2 = \cos 2\theta \cdot \operatorname{tang}^{\frac{c^2}{3}} 2\theta \; , \qquad \mathrm{V} = -\frac{c}{3} \cdot \frac{1}{\sin 2\theta} \; ,$$

$$\mathrm{M} = -\mathrm{U}^2 \operatorname{tang} 2\theta \; ,$$

$$27\,\mathrm{U}^3 \sin^3 2\theta \cdot \frac{\mathrm{J}}{c} = 2(c^2 + 9) - 27 \sin^2 2\theta \; .$$

12. — L'équation ayant une intégrale évidente ($z = 0$) peut être réduite à la forme canonique

$$\frac{d\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{Z}^3 + \mathrm{P} \cdot \mathrm{Z}^2 \; ;$$

il suffit de poser pour le cas $c = 2$, $a = 1$ de la courbe de PORRO:

$$z = \sqrt{\cos 2\theta} \cdot \mathrm{Z} \; ,$$

$$\cos 2\theta = 2\mathrm{X} \; ,$$

$$\mathrm{P} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{X}(1 - 4\mathrm{X}^2)}} \; .$$

13. — Les trajectoires orthogonales des courbes atuptiques, intégrales de la même équation différentielle pour une valeur donnée de a, ont pour équation

$$xy + c \int \sqrt{r^2 - a^2} \cdot \frac{dr}{r} = 0 \; ;$$

elles sont déterminées par les formules paramétriques:

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \; ,$$

$$\sin 2\theta = 2\frac{c}{a} \cos^2 \varphi (\varphi - \operatorname{tang} \varphi) + \mathrm{A} \cos^2 \varphi \; ,$$

avec une constante arbitraire A.

Le problème général des lignes de poursuite dans le plan.

14. — Autant les lignes de poursuite de la droite ont donné lieu à une abondante littérature, autant la même question pour d'autres courbes que la droite a été délaissée. La raison en est que, dès le cas du cercle, l'équation différentielle des lignes de poursuite cesse d'être intégrable [1].

La courbe (C) étant définie par sa tangente en M

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ,$$

soit

$$\mathrm{X} \cos \Phi + \mathrm{Y} \sin \Phi = \Pi$$

$$\Phi = \varphi + \delta , \qquad \Pi = \varpi \cos \delta + \varpi' \sin \delta ,$$

$$\varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

l'équation d'une droite Δ quelconque passant par le point M (x, y) de (C). L'enveloppe (Γ) de Δ, pour un choix déterminé d'une fonction $\delta(\varphi)$, est touchée par Δ au point μ de coordonnées

$$\xi = x - r \sin \Phi , \qquad \eta = y + r \cos \Phi ;$$

dans ces formules,

$$r = \rho \frac{\sin \delta}{1 + \delta'} .$$

r représente la distance $\mathrm{M}\mu$. Les rayons de courbure ρ et R de (C) en M et (Γ) en μ sont:

$$\rho = \varpi + \varpi'' , \qquad \mathrm{R} = \Pi + \frac{d^2 \Pi}{d \Phi^2} ;$$

$$\mathrm{R}(1 + \delta') = \rho \cos \delta + \frac{dr}{d\varphi} ;$$

---

[1] L. Dunoyer, Sur les courbes de poursuite d'un cercle. *Nouvelles Annales de Mathématiques* [4], t. VI, 1906, p. 193-222.

F. Morley, A curve of pursuit. *American Math. Monthly*, t. XXVIII, 1921.

F. Morley, The curve of ambience, *American journal of mathematics*, t. XLVI, 1924, p. 193-200.

Emile Turrière, De l'intégration des équations des problèmes de poursuite et d'ambiance en géométrie plane. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LXV, 1937, p. 168-174.

les arcs correspondants ds de (C) et dS de (Γ) sont liés par la relation connue:

$$dS = dr + ds \cdot \cos\delta \, .$$

$$\frac{r}{R} = \sin\delta \cdot \frac{ds}{dS} \cdot$$

Cela étant, la condition

$$dS = k\,ds \;, \qquad k = \text{const.} \;,$$

exprime que (Γ) est une ligne de poursuite de (C). D'où

$$k = \cos\delta + \frac{dr}{ds} \cdot$$

L'équation générale du problème des courbes de poursuite est donc

$$(k - \cos\delta)\,\rho = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\rho \sin\delta}{1 + \delta'}\right) \cdot$$

δ est la fonction inconnue; ρ est une fonction connue de φ, variable qui n'intervient que par

$$\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg} V \, .$$

Cette équation est du second ordre.

Supposons que

$$\frac{\rho'}{\rho} = m \;, \qquad m = \text{const.} \;;$$

la courbe (C) est alors une spirale logarithmique et, dans le cas plus particulier $m = 0$ un cercle; alors φ est absente dans l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\delta''}{1 + \delta'} \sin\delta + \delta''(k - 2\cos\delta) = m \sin\delta + \cos\delta - k \;;$$

et cette absence permet de mettre l'équation sous la forme d'une équation du premier ordre:

$$1 + \delta' = 1 - \frac{1}{Z} \;, \qquad Z = 1 + \mu \sin\delta \;, \qquad r = \rho\left(\sin\delta + \frac{1}{\mu}\right) \;,$$

$$\sin\delta \cdot \frac{dZ}{d\delta} + Z(Z - 1)\left[Z(\cos\delta + m \sin\delta - k) + k - 2\cos\delta\right] = 0 \; .$$

$$\frac{d\mu}{d\delta} + \mu^2\left[\mu \sin\delta(\cos\delta - k) - k\right] = 0 \; .$$

A la solution $z = 1$, correspond $\mu = 0$.
A la solution $z = 0$ correspond

$$\mu = -\frac{1}{\sin\delta}, \qquad r = 0 .$$

Il suffit finalement de poser

$$\mu = \Omega \cdot e^{-m\delta},$$

$$\Delta = \int e^{-2m\delta}(k - \cos\delta - m\sin\delta)\sin\delta\, d\delta$$

$$= e^{-2m\delta}\left[\frac{2m\sin 2\delta + (1-m^2)\cos 2\delta}{4(1+m^2)} - \frac{k}{1+4m^2}(2m\sin\delta + \cos\delta) + \frac{m}{4}\right]$$

pour réduire cette équation à sa forme canonique

$$\frac{d\Omega}{d\Delta} = \Omega^3 + \mathrm{P}\Omega^2,$$

$$\mathrm{P} = \frac{k - 2m\sin\delta}{(k - \cos\delta - m\sin\delta)\sin\delta}\, e^{m\delta} .$$

Il résulte, de cette analyse, que *le problème général des lignes de poursuite se simplifie dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique et que, dans ces cas, l'équation non intégrable est du type Liouville-Appell.*

15. — L'équation donnée par M. L. Dunoyer, dans la note citée plus haut, pour les lignes de poursuite du cercle

$$\frac{dx}{y(x^2-1)} = \frac{dy}{(y-a)[2xy - ax + by - bx]},$$

dans le cas $a + b \neq 0$ de non-séparation des variables, se ramène à

$$\frac{d\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{Z}^3 + \mathrm{P}\mathrm{Z}^2,$$

en posant

$$\frac{1}{y} = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{b}{2}} \cdot \frac{\mathrm{Z}}{x^2-1} = \mathrm{UZ},$$

$$d\mathrm{X} = -a(a+b)\mathrm{U}^2\frac{x\,dx}{x^2-1},$$

$$\mathrm{P} = -\frac{(3a+b)x + ab}{a(a+b)\mathrm{U}x} .$$

16. — *Le problème inverse du problème des lignes de poursuite.* — La fonction $\mathrm{R}(\Phi)$, caractéristique de la courbe donnée (Γ) est connue. L'élimination de δ entre les conditions

$$\sin\delta = k\cdot\frac{r}{\mathrm{R}}, \qquad \cos\delta = k\left(1-\frac{dr}{d\mathrm{S}}\right),$$

donne l'équation différentielle

$$\frac{r^2}{\mathrm{R}^2}+\left(\frac{dr}{d\mathrm{S}}-1\right)^2=\frac{1}{k^2};$$

$$\boxed{r^2+\left(\frac{dr}{d\Phi}-\mathrm{R}\right)^2=\frac{\mathrm{R}^2}{k^2}},$$

où r est l'inconnue. C'est encore une équation non intégrable du premier ordre.

L'élimination de r donne l'équation en δ

$$\cos\delta\cdot\frac{d\delta}{d\Phi}=k-\cos\delta-\mathrm{M}\sin\delta$$

où M est une fonction connue de φ: $\mathrm{M}=\dfrac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}$.

Avec la nouvelle inconnue t:

$$t=\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}.$$

L'équation prend la forme:

$$2\frac{dt}{d\Phi}=\frac{1+t^2}{1-t^2}\left[(k+1)t^2-2\mathrm{M}t+k-1\right].$$

La dérivée $\dfrac{dt}{d\Phi}$ est égale à une fonction rationnelle de t dont le degré du numérateur surpasse de deux unités celui du dénominateur: c'est un type d'équations étudiées par P. Appell.

En posant

$$t=\frac{1-\mathrm{T}}{1+\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{T}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\delta}{2}\right),$$

il vient:

$$4\frac{d\mathrm{T}}{d\Phi}=-\frac{1+\mathrm{T}^2}{\mathrm{T}}\left[(k+\mathrm{M})\mathrm{T}^2-2\mathrm{T}+k-\mathrm{M}\right].$$

Dans le cas de M constant, les variables δ et Φ sont séparées. Par suite, *dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique, le problème inverse du problème des lignes de poursuite est réductible à une intégrale de fonction rationnelle.*

En particulier, pour $M = k$, l'équation

$$2\frac{dT}{d\Phi} = (1 + T^2)(1 - kT) ,$$

est identique à celle rencontrée plus haut (paragraphe 8, cas f_1 constante).

Sur une généralisation des podaires.

17. — Soit une courbe donnée (C) du plan, $m(x, y)$ son point courant; sur la tangente en m est pris un point $M(x, y)$,

$$X = x + \lambda\frac{dx}{ds} = x + \lambda x' , \qquad Y = y + \lambda\frac{dy}{ds} = y + \lambda y' ,$$

à la distance $\lambda = m\mathrm{M}$ de M; elle sera considérée comme une fonction $\lambda(s)$ de l'abscisse curviligne.

La normale en M à la courbe (Γ) décrite par ce point, pour un choix de $\lambda(s)$, rencontre la normale en m de (C) en un point P de coordonnées

$$\xi = x + \rho y' , \qquad \eta = y - \rho x' ,$$

$$\rho = \frac{1 + \lambda'}{y'x'' - x'y''} .$$

R étant le rayon de courbure en m de la courbe (C):

$$\rho = \mathrm{R}(1 + \lambda') .$$

La déviation des normales

$$\delta = \widehat{m\mathrm{P}\mathrm{M}} ,$$

est donnée par la relation

$$\cot g\, \delta = \frac{\rho}{\lambda} = \mathrm{R} \cdot \frac{1 + \lambda'}{\lambda} .$$

Ces formules connues étant rappelées, cherchons à déterminer $\lambda(s)$ par la condition suivante: *la normale en* M *à la courbe* (Γ) *décrite par ce point rencontre le rayon polaire* Om *en son milieu.*

La courbe (C) étant définie comme enveloppe de sa tangente

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$$

où ϖ est une fonction donnée de sa tangente, la condition se présente sous la forme

$$\boxed{\frac{\varpi}{z'} - \frac{\varpi'}{z} = 2}$$

ou

$$z' = \frac{\varpi z}{2z + \varpi'} ;$$

l'inconnue z est définie par

$$\lambda = z + \varpi' ; \qquad \varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi} ; \qquad z' = \frac{dz}{d\varphi} \cdot$$

L'intégrale évidente $z = 0$, $\lambda = \varpi'$, correspond au cas où M est la projection de O sur la tangente de (C). C'est la *propriété des normales aux podaires* de passer par le milieu du rayon vecteur O*m*.

L'équation différentielle se ramène à la forme

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \varpi\varpi' Z^3 - (\varpi + \varpi'') Z^2 ,$$

par le changement d'inconnue

$$2z + \varpi' = \frac{1}{Z} \cdot$$

Soit R le rayon de courbure de (C)

$$R = -(\varpi + \varpi'') .$$

Le changement de variable

$$\varpi^2 = 2\Phi$$

réduit l'équation à sa forme canonique

$$\frac{dZ}{d\Phi} = Z^2(Z + P)$$

avec

$$P = \frac{R}{\varpi\varpi'} \cdot$$

Autres courbes.

18. — M. D. Mitrinovitch s'est spécialement attaché à cette forme d'équations différentielles et en a étudié diverses applications [1].

M. Ahmad-Vaziri [2] a donné un exemple de problème de géométrie réductible à l'équation de Liouville-Appell.

L'équation $\frac{dz}{du} = \frac{1 - z^2}{z + f(u)}$ de la *balistique extérieure* a été étudiée par M. J. Drach [3], en application de sa méthode d'intégration logique.

19. — L'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{b}(y + 2ax)$$

et l'équation de Riccati

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bt ,$$

a et *b* étant des coefficients constants sont équivalentes: il suffit de poser:

$$ax^2 + bt = \frac{b}{y} ;$$

par un changement de variables

$$x = \lambda\xi , \qquad t = \mu\tau ,$$

---

[1] D. Mitrinovitch, Remarque sur une équation différentielle du premier ordre. *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, 1934, t. III, p. 171-174.

Sur l'intégration d'une équation différentielle importante du premier ordre. *Bulletin de l'Académie royale des sciences serbe* (section A), 1936, p. 7-18.

Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre. *Publ. math. de l'Université de Belgrade*, 1936, t. V, p. 10-22.

Intégration d'une équation différentielle du premier ordre et polynômes d'Hermite qui s'y rattachent. *Revista de Ciencias*, Lima, n° 149, t. XXXVIII, 1937, p. 123-127.

Sur l'équation différentielle des lignes géodésiques des surfaces spirales. *C.R.*, 13 décembre 1937, t. 205, p. 1194.

Sur une équation différentielle du premier ordre intervenant dans divers problèmes de Géométrie. *Bulletin des sciences mathématiques*, 2me série, t. LXI, novembre 1937; *C.R.*, 7 juin 1937, t. 204, p. 1706.

Recherches sur les lignes asymptotiques. *Bulletin de l'Académie royale des sciences serbe*, 1938, n° 4, p. 105-120.

[2] Abolghassem Ahmad-Vaziri, Sur quelques courbes liées au mouvement d'une courbe plane dans son plan. Thèse. Montpellier, 1938, p. 98.

[3] *Annales de l'Ecole normale supérieure*, (3), t. XXXVII, 1920, p. 1-96.

(à coefficients constants λ, μ), l'équation de Riccati précédente prend la forme canonique

$$\frac{d\xi}{d\tau} + \xi^2 = \tau \ .$$

X. Stouff [1] a signalé qu'à cette équation spéciale était réductible la recherche d'une courbe admettant une parabole donnée pour lieu du centre d'une conique en contact du quatrième ordre avec la courbe.

Pour terminer, voici encore des courbes dépendant d'équations non intégrables de Riccati et de fonctions de Bessel.

20. — *La courbe du pendule de longueur variable.* — L'équation du pendule simple dont la longueur l est une fonction donnée du temps est [2]

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0 \ .$$

En posant $\theta l = \omega$, elle prend la forme

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{l'' - g}{l}\omega \ ;$$

dans le cas du mouvement uniforme, elle se réduit par changement de variables à la forme

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \ .$$

C'est une équation de Bessel particulière.

Soit $\mathrm{OT}' = y - x\dfrac{dy}{dx}$, le segment de $\mathrm{O}y$ limité en O et à la trace T′ de la tangente à la courbe (x, y); cette équation exprime la condition

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{OT}') = y \ .$$

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques* [4], t. II, 1902, p. 480.

[2] Bossut, Sur le mouvement d'un pendule dont la longueur est variable. *Mémoires de l'ancienne Académie des Sciences de Paris*, 1778.

Lecornu, Mémoire sur le pendule de longueur variable. *Acta Mathematica*, t. XIX, 1895, p. 201-249.

Cours de Mécanique, t. II, 1915, p. 39.

Sur le pendule à tige variable. *C. R.*, t. CXVIII, 1894, p. 132-134.

Haton de la Goupillière, Oscillations des bennes non guidées. *Annales des mines*, 1909.

Kyrille Popoff, Sur le pendule de longueur variable. *C. R.*, t. CLXVI, 1923, p. 655-658.

21. — Dans un mémoire sur la résolution numérique des équations différentielles [1], RUNGE prend pour exemple la méridienne de la surface d'une goutte liquide ou d'une bulle gazeuse.

La surface est définie par la condition

$$2z = a^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ;$$

a est une longueur constante. Dans le cas de la surface de révolution, la méridienne est définie par l'équation

$$2z = a^2\left(\frac{\sin\alpha}{x} + \cos\alpha\frac{d\alpha}{dx}\right) ,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dz}{dx} ,$$

dans le plan Oxz. Cette équation n'est pas intégrable. En introduisant le rayon R de courbure, elle prend la forme

$$2Rz = a^2\left(1 + \frac{R}{x}\sin\alpha\right) ;$$

par suite pour tout arc éloigné de l'axe de révolution Oz et à pente faible sur Ox, la courbe est approximativement assimilable à une *courbe élastique:*

$$2Rz = a^2 .$$

D'autre part, si dans l'équation

$$2z = \frac{z'}{x\sqrt{1+z'^2}} + \frac{z''}{\sqrt{(1+z'^2)^3}} ,$$

les termes en z'^2 sont négligés (faibles pentes), on obtient l'équation linéaire

$$2z = \frac{z'}{x} + z'' ;$$

par changements de variables

$$z' = \frac{z}{x}Z , \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}e^X$$

[1] C. RUNGE, Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 1895, t. XLVI, p. 167-178.

elle devient l'équation de Riccati:

$$\boxed{\frac{dZ}{dX} + Z^2 = e^{2X}}$$

intégrable par les fonctions de Bessel d'indice zéro: il suffit de poser $t = ie^X$ pour effectuer la réduction de l'équation équivalente.

22. — C'est de cette même équation de Riccati que dépend la détermination des courbes du complexe linéaire

$$x\,dy - y\,dx = k\,dz\ ,$$

sur les surfaces cerclées représentées paramétriquement par les équations:

$$x = V \cos u \cos v\ ,$$
$$y = V \cos u \sin v\ ,$$
$$z = V \sin u\ ,$$

où $V = e^{av}$. Les cercles ont l'origine O pour centre et l'axe Oz pour diamètre. Les courbes du complexe linéaire, lorsque V est une fonction quelconque de v ont pour équation

$$k\frac{dz}{dv} + z^2 = V^2\ .$$

Pour $k = 1$, $a = 1$, c'est l'équation du paragraphe précédent.

Les lignes de courbure des surfaces considérées, dans l'hypothèse $V = e^{av}$, se déterminent par quadrature elliptique. Elles ont pour équation

$$u' \pm v = \text{const.}$$

dans la représentation conforme:

$$ds^2 = e^{2av}(a^2 + \cos^2 u)(du'^2 + dv^2)$$

$$u' = \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + \cos^2 u}}\ .$$