

SUR LES n -SECTRICES D'UN TRIANGLE

Autor(en): **Lebesgue, Henri**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515773>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES n -SECTRICES D'UN TRIANGLE

[*En mémoire de Frank Morley (1860-1937)*]

PAR

M. Henri LEBESGUE, Membre de l'Institut (Paris).

1. — Il y a une quarantaine d'années le géomètre américain Frank MORLEY obtenait incidemment le théorème suivant: *Les trisectrices intérieures des angles d'un triangle, adjacentes à un même côté, se coupent deux à deux aux trois sommets d'un triangle équilatéral.* La méthode de Morley ressortissant à une géométrie analytique du plan de la variable complexe, on s'empessa de rechercher des justifications plus élémentaires de cet énoncé. Ces justifications furent souvent critiquées par leurs auteurs eux-mêmes qui auraient désiré une démonstration aussi courte et aussi élégante que l'énoncé, ou qui regrettaient d'être si facilement conduits à faire jouer des rôles dissymétriques à des éléments intervenant symétriquement dans l'énoncé¹. A mon avis, de tels désirs ne sauraient être satisfaits. Morley trouve que le lieu des centres des cardioïdes inscrites dans un triangle est formé de neuf droites, trois à trois parallèles aux trois côtés d'un triangle équilatéral. Il examine comment le centre peut passer d'une des droites constituant le lieu à une autre et trouve ainsi que les 27 points en lesquels se rencontrent les 9 droites du lieu sont les points où se coupent deux trisectrices du triangle,

¹ Voici, prises un peu au hasard, quelques références: MORLEY, *Tr. of the Am. Math. Soc.*, vol. 1, 1900; vol. 8, 1907; vol. 51, 1929; *Math. Assoc. of Japan for second. Math.*, vol. 6, 1924; — BRIGARD, *Nouv. Ann. de Math.*, 1922; — J. MARCHAND, *L'Ens. math.*, XXIX^e année, 1930; — *Le journal X*, information, avril 1931; mai 1931; mai 1937; — GAMBIER, *L'Ens. scient.*, 4^{me} ann., juin 1931; 5^{me} ann., janv. 1932; 10^{me} ann., juill. 1937; — J. ROBORGH, *Euclides*, janv. 1938.

adjacentes à un même côté de celui-ci. Pour bien faire apparaître la simplicité de ce qu'il avait obtenu, Morley a extrait de son résultat complet l'énoncé partiel que j'ai cité, en isolant grammaticalement — par l'emploi du mot intérieur — l'un des triangles obtenus des autres. Mais il serait aussi vain de rechercher un raisonnement applicable à ce seul triangle qu'il serait vain, dans la question des bissectrices ou des cercles inscrits, de prétendre isoler mathématiquement le cas des bissectrices intérieures. Il faut donc que le raisonnement permette d'étudier une figure comprenant 27 triangles équilatéraux ne jouant pas tous le même rôle; on ne saurait s'étonner qu'il faille prendre des précautions un peu minutieuses et longues.

D'autre part, on raisonne dissymétriquement quand on montre que, par le point de rencontre de deux bissectrices, il en passe une troisième et, plus généralement, quand il s'agit de prouver que plusieurs droites concourent; or, c'est bien de cela qu'il s'agit dans le théorème de Morley. Je suis donc parfaitement satisfait par les démonstrations qui ont été publiées; si je reviens sur la question, c'est pour donner une démonstration qui, ne visant ni à l'élégance, ni à la brièveté, pourra mieux faire état de ce qui n'est pas indispensable à la preuve, mais servira à *faire comprendre*.

Faire comprendre un résultat, c'est essentiellement l'intégrer dans un tout cohérent dont certaines parties sont déjà bien familières. Au point de vue où s'était placé Morley, son exposé fait parfaitement comprendre; du point de vue élémentaire auquel je me place ici, il faut confronter les cas des bissectrices et des trisectrices, mettre en lumière les raisons des différences et réussir à ne voir dans ces différences, choquantes au premier abord, que des aspects très voisins et tout naturellement variés d'une même vérité.

2. — Par *angle* d'une première droite AB, avec une seconde droite BC, nous entendons l'un *quelconque* des angles dont il faut faire tourner AB pour l'amener sur BC; nous représenterons cet angle, et sa mesure en degrés, par la notation ABC ou (AB, BC). La mesure n'étant définie dans le plan orienté qu'à un multiple entier de 180 près, nous n'écrirons pas d'égalités entre les angles,

mais seulement des *congruences, module 180*. Ces congruences ne résulteront pas de l'examen de la figure mais de l'application des relations suivantes qui sont contenues dans nos définitions :

$$\begin{aligned} ABC &= (AB, BC) = (BA, BC) = (AB, CB) = (AB, DE) + \\ &+ (DE, BC) = - (BC, AB) . \end{aligned}$$

Un triangle ABC étant donné dans un plan orienté, on désignera par A, B, C trois des mesures des angles BAC, CBA, ACB et par $\alpha_h^k, \beta_i^l, \gamma_j^m$ les droites issues respectivement de A, B, C, données par la congruence

$$(AB, \alpha_h^k) = k \frac{A}{n} + h \frac{180}{n} ,$$

et celles qui s'en déduisent par permutations circulaires sur les lettres A, B, C; α, β, γ . Les lettres n, k et h, l et i, m et j représentent des entiers. Il est clair que les indices inférieurs h, i, j n'interviennent et ne doivent être considérés comme déterminés que *module n*. Quant aux indices supérieurs, nous ne leur donnerons pour le moment que les deux valeurs 1 et $n - 1$ et nous emploierons les notations simplifiées α, β, γ au lieu de $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1$ et α', β', γ' au lieu de $\alpha^{n-1}, \beta^{n-1}, \gamma^{n-1}$. Les droites $\alpha_h, \beta_i, \gamma_j$ sont dites les premières n -sectrices du triangle et les droites $\alpha'_h, \beta'_i, \gamma'_j$ les dernières n -sectrices.

Désignons par $a_{h,i}, b_{i,j}, c_{j,h}$ les points communs respectivement à β_h et γ'_i , à γ_i et α'_j , à α_j et β'_h ; c'est la figure formée par les $3n^2$ points a, b, c qu'il s'agit d'étudier.

On a :

$$\begin{aligned} Ac_{h,i}B &= c_{h,i}AB + ABC + CBc_{h,i} = - (AB, \alpha_h) - B + (BC, \beta'_i) \\ &= - \left(\frac{A}{n} + h \frac{180}{n} \right) - B + \left[(n-1) \frac{B}{n} + i \frac{180}{n} \right] \\ &= - \frac{A+B}{n} + (i-h) \frac{180}{n} ; \end{aligned}$$

donc, les n points $c_{h,i}$, pour lesquels la différence $h - i$ a une valeur constante, *module n*, sont les points de rencontre d'une circonférence (P_{h-i}) avec les premières n -sectrices de A. Et comme ces sectrices se succèdent en faisant des angles de $+\frac{180}{n}$, lorsque l'on parcourt

(P_{h-i}) dans le sens positif on rencontre dans l'ordre des indices croissants, module n , les points $c_{h,i}$ qui sont par suite les sommets consécutifs d'un polygone régulier convexe P_{h-i} .

Nous avons ainsi n polygones P et n circonférences (P); la tangente AT_{h-i} à (P_{h-i}) en A fait avec AB un angle égal à $Ac_{h,i}B$, donc

$$T_{h-i}AT_{h+1-i} = T_{h-i}AB + BAT_{h+1-i} = + \frac{180}{n} ;$$

donc, les circonférences (P) se coupent deux à deux sous des angles de $\frac{180}{n}$ et quand on tourne autour de A dans le sens positif on les rencontre dans l'ordre croissant de leur indice.

Le côté $c_{h,i}c_{h+1,i+1}$ de P_{h-i} est, en direction, symétrique de AT_{h-i} par rapport aux bissectrices de $c_{h,i}Ac_{h+1,i+1}$, de même $c_{h,i-1}c_{h+1,i}$ est symétrique de AT_{h+1-i} par rapport aux mêmes bissectrices, donc

$$(c_{h,i}c_{h+1,i+1}, c_{h,i-1}c_{h+1,i}) = - T_{h-i}AT_{h+1-i} = - \frac{180}{n} .$$

Ainsi on passe de P_u à P_{u+1} par une similitude directe dont la rotation est de $-\frac{180}{n}$ et comme les axes de P_u font entre eux des angles de $\frac{180}{n}$, les n polygones réguliers P ont leurs axes parallèles.

Si n est impair, chaque axe est perpendiculaire à un côté, et un seul; donc, quand n est impair, les polygones P ont leurs côtés parallèles. Si n est pair, il y a deux espèces d'axes, une rotation de $\frac{180}{n}$ échange ces deux espèces d'axes dont une seule est perpendiculaire aux côtés, donc, quand n est pair le parallélisme des côtés ne subsiste que pour les P_u dont les indices sont de même parité.

3. — Arrêtons-nous un instant sur les cas $n = 2$ et 3 . Pour $n = 2$, nous avons deux points $c_{0,0}, c_{1,1}$ diamétralement opposés sur une circonférence (P_0) passant par A et B , deux points $c_{0,1}, c_{1,0}$ diamétralement opposés sur une circonférence (P_1) orthogonale à la première. Les deux diamètres P_0 et P_1 étant rectangulaires. Pour avoir le résultat classique, il reste à déterminer

la direction des droites P_0 et P_1 et la position de leur point de rencontre.

Pour $n = 3$, nous trouvons trois triangles équilatéraux à côtés parallèles:

- P_0 de sommets $c_{0,0}$, $c_{1,1}$, $c_{2,2}$;
- P_1 de sommets $c_{0,1}$, $c_{1,2}$, $c_{2,0}$;
- P_2 de sommets $c_{0,2}$, $c_{1,0}$, $c_{2,1}$.

Les 9 droites, portant les côtés de ces triangles, sont celles que Morley obtient comme lieu de centres de cardioïdes, ce qui incitait, comme je l'ai dit, à rechercher quels sont les points de rencontre de ces droites; nous allons aussi procéder à cette étude,

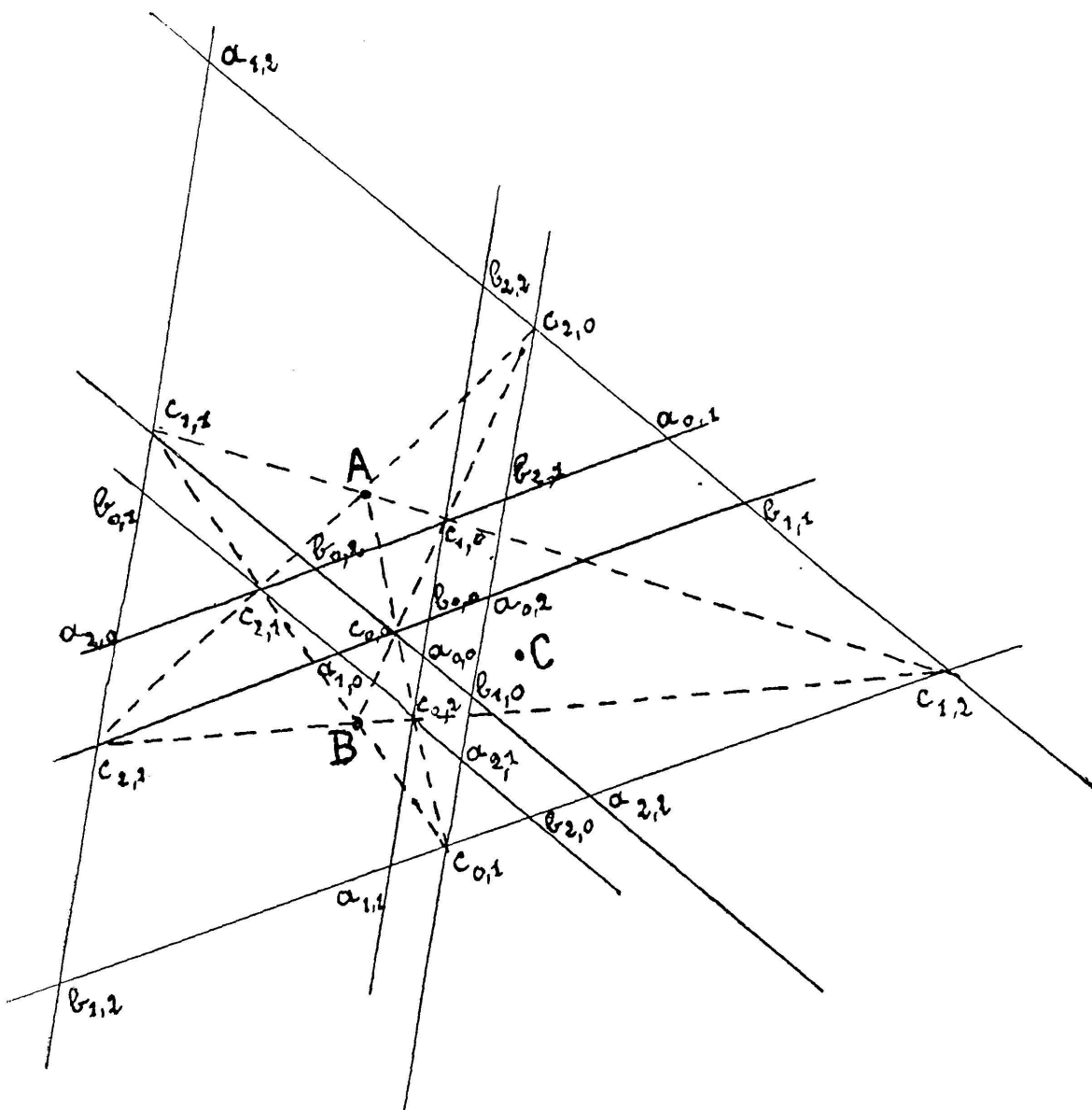


Fig. 1

mais c'est seulement la connaissance du résultat de Morley qui nous incite à le faire; il y a là une infériorité de notre mode d'exposition.

Pour éviter des redites, nous allons faire cette étude par l'intermédiaire d'une proposition accessoire. La correspondance ponctuelle entre deux circonférences (P), réalisée par alignement avec A, est, nous l'avons en somme démontré, une similitude directe; et comme B se correspond à lui-même, le point double ou pôle est le point B. Ce sont, en particulier, les points de rencontre des côtés homologues dans une telle similitude qu'il nous faut étudier; nous le ferons pour les polygones que j'appellerai *réguliers par rapport à B*. Ce sont ceux dont tous les angles (angle d'un côté avec le suivant) ont une même valeur V et dont tous côtés sont vus de B sous un même angle orienté θ .

4. — Soit donc Π_0 un polygone régulier par rapport à Ω ; il est donné par les angles V, θ , la position d'un sommet α_0 et l'angle α de $\Omega\alpha_0$ avec le premier côté $\alpha_0\beta_0$. Une similitude directe de pôle Ω transforme Π_0 en Π_1 , cette similitude est donnée par les angles

$$\alpha_0\Omega\alpha_1 = \rho_0, \quad \Omega\alpha_1\alpha_0 = \sigma_0, \quad \alpha_1\alpha_0\Omega = \tau_0, \quad \rho_0 + \sigma_0 + \tau_0 = 0,$$

α_1 étant l'homologue de α_0 . On désigne par $\alpha_0^1, \beta_0^1, \dots$ les points de rencontre des côtés successifs $\alpha_0\beta_0, \beta_0\gamma_0, \dots$ de Π_0 avec leurs homologues et par Π_0^1 le polygone $\alpha_0^1\beta_0^1\dots$. Les côtés homologues faisant entre eux l'angle ρ_0 , les points $\Omega, \beta_0, \beta_1, \alpha_0^1, \beta_0^1$ sont sur une même circonférence et l'on a :

$$\alpha_0^1\Omega\beta_0^1 = \alpha_0^1\beta_0\beta_0^1 = \alpha_0\beta_0\gamma_0 = V,$$

tous les côtés de Π_0^1 sont donc vus de Ω sous l'angle $\theta^1 = V$. Désignons par α^1 et β les angles $\Omega\alpha_0^1\beta_0^1$ et $\Omega\beta_0\gamma_0$ qui

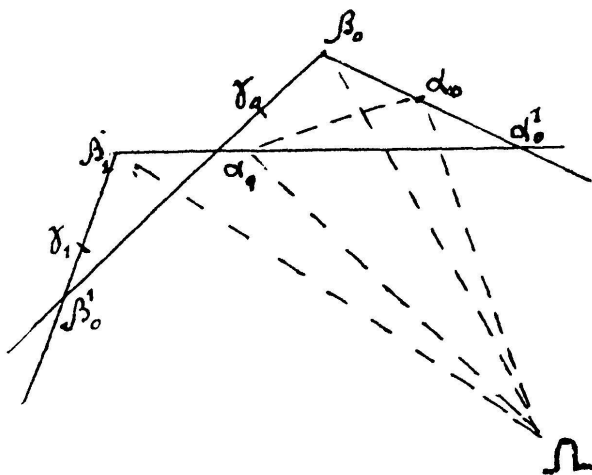


Fig. 2

sont analogues à α ; la circonférence déjà utilisée montre que $\alpha^1 = \beta$, or

$$\Omega\alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_0\gamma_0 + \gamma_0\beta_0\Omega + \beta_0\Omega\alpha_0 = 0,$$

ou

$$\alpha + V - \beta - \theta = 0.$$

Donc:

$$\alpha^1 = \Omega\alpha_0^1\beta_0^1 = \alpha + V - \theta,$$

de même

$$\Omega\beta_0^1\gamma_0^1 = \beta + V - \theta = \alpha^1 + V - \theta,$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_0^1\beta_0^1\gamma_0^1 &= \beta_0^1\alpha_0^1\Omega + \alpha_0^1\Omega\beta_0^1 + \Omega\beta_0^1\gamma_0^1 = \\ &= -\alpha^1 + \theta^1 + (\alpha^1 + V - \theta) = 2V - \theta = V^1; \end{aligned}$$

Π_0^1 est donc régulier par rapport à Ω . Il sera déterminé par les angles calculés θ^1 , V^1 et α^1 et par la position de α_0^1 . Or, Ω , α_0 , α_1 , α_0^1 étant sur une même circonférence, on a:

$$\alpha_0\Omega\alpha_0^1 = \alpha_0\alpha_1\alpha_0^1 = \alpha_0\alpha_1\Omega + \Omega\alpha_1\alpha_0^1 = \alpha_0\alpha_1\Omega + \Omega\alpha_0\alpha_0^1 = -\sigma_0 + \alpha.$$

De plus, on a:

$$\frac{\Omega\alpha_0^1}{\Omega\alpha_0} = \frac{\sin\Omega\alpha_0\alpha_0^1}{\sin\Omega\alpha_0^1\alpha_0} = \frac{\sin\alpha}{\sin\Omega\alpha_1\alpha_0} = \frac{\sin\alpha}{\sin\sigma_0};$$

égalité qui, entre longueurs, n'a lieu qu'au signe près puisque α et σ_0 ne sont déterminés qu'à 180° près. Mais supposons qu'on ait choisi les déterminations de α et σ_0 , alors le quotient précédent représente, *en grandeur et signe*, le rapport des mesures algébriques de $\Omega\alpha_0^1$ et $\Omega\alpha_0$ faites respectivement sur deux axes, portés par $\Omega\alpha_0^1$ et $\Omega\alpha_0$, et dont l'angle $\alpha_0\Omega\alpha_0^1$ est, à 360° près, égal à $\alpha - \sigma_0$.

Supposons maintenant qu'à partir de Π_1 nous formions un polygone Π_2 par une similitude ρ_1 , σ_1 , τ_1 puis un polygone Π_3 par ρ_2 , σ_2 , τ_2 , ..., et que nous considérons les polygones Π_1^1 (ou $\alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1\dots$), Π_2^1 (ou $\alpha_2^1, \beta_2^1, \gamma_2^1, \dots$) ... dont les sommets sont respectivement les points de rencontre des côtés homologues de Π_1 et Π_2 , de Π_2 et Π_3 , ... Ces polygones Π^1 sont tous réguliers par

rapport à Ω et donnés par les mêmes angles θ^1, V^1, α^1 , ils se déduisent donc les uns des autres par des similitudes directes $\rho_i^1, \sigma_i^1, \tau_i^1$; calculons $\rho_0^1, \sigma_0^1, \tau_0^1$ relatifs au passage de Π_0^1 à Π_1^1 .

α_1^1 étant sur la droite $\alpha_0^1 \alpha_1 \beta_1$, τ_0^1 est $\alpha_1 \alpha_0^1 \Omega$ donc $\alpha_1 \alpha_0 \Omega$,

$$\tau_0^1 = \tau_0 .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \rho_0^1 &= \alpha_0^1 \Omega \alpha_1^1 = \alpha_0^1 \Omega \alpha_0 + \alpha_0 \Omega \alpha_1 + \alpha_1 \Omega \alpha_1^1 = \\ &= (\sigma_0 - \alpha) + \rho_0 - (\sigma_1 - \alpha) = \sigma_0 - \sigma_1 + \rho_0 , \end{aligned}$$

et, puisque

$$\begin{aligned} \rho_0^1 + \sigma_0^1 + \tau_0^1 &= \rho_0 + \sigma_0 + \tau_0 = 0 , \\ \sigma_0^1 &= \sigma_1 , \quad \rho_0^1 + \sigma_0^1 = \rho_0 + \sigma_0 . \end{aligned}$$

5. — Appliquons ces résultats à la suite des P_u rangés dans l'ordre croissant, module n , de leur indice en prenant P_{h-i} pour Π_0 , et à la suite des sommets de P_{h-i} , rangés dans l'ordre croissant, module n , de leurs indices, $c_{h,i}$ étant pris pour α_0 . Alors Ω est en B et (fig. 1 et 2) $\theta = \frac{180}{n}$, $V = 2 \cdot \frac{180}{n}$,

$$\alpha = Bc_{h,i}c_{h+1,i+1} = BA c_{h+1,i+1} = \frac{A}{n} + (h+1) \frac{180}{n} ,$$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= Bc_{h,i-1}c_{h,i} = c_{h,i-1}BC + CBA + BA c_{h,i} \\ &= - \left((n-1) \frac{B}{n} + (i-1) \frac{180}{n} \right) + B + \left(\frac{A}{n} + h \frac{180}{n} \right) , \\ &= \frac{A+B}{n} + (h-i+1) \frac{180}{n} . \end{aligned}$$

De proche en proche on en déduit, puisque l'on passe de σ_0 à σ_1 en diminuant i d'une unité,

$$\theta^1 = 2 \cdot \frac{180}{n} , \quad V^1 = 3 \cdot \frac{180}{n} , \quad \alpha^1 = \frac{A}{n} + (h+2) \frac{180}{n} .$$

$$\sigma_0^1 = \frac{A+B}{n} + (h-i+2) \frac{180}{n} ;$$

puis

$$\theta^2 = 3 \cdot \frac{180}{n}, \quad V^2 = 4 \cdot \frac{180}{n}, \quad \alpha^2 = \frac{A}{n} + (h + 3) \frac{180}{n}$$

$$\sigma_0^2 = \frac{A + B}{n} + (h - i + 3) \frac{180}{n}; \quad \text{etc.}$$

La position des $\Pi, \Pi^1, \Pi^2 \dots$ dépend de celles des $\alpha_0, \alpha_0^1, \dots$ laquelle est donnée par les angles $AB\alpha_0, AB\alpha_0^1, \dots$ et par les mesures de $\overline{B\alpha_0}, \overline{B\alpha_0^1}, \dots$ Or,

$$AB\alpha_0 = ABc_{h,i} = -B + (n - 1) \frac{B}{n} + i \frac{180}{n} = -\frac{B}{n} + i \frac{180}{n},$$

$$AB\alpha_0^1 = AB\alpha_0 + \alpha_0 \Omega \alpha_0^1 = -\frac{B}{n} + i \frac{180}{n} + \frac{A}{n} + (h + 1) \frac{180}{n} - \\ - \left[\frac{A + B}{n} + (h - i + 1) \frac{180}{n} \right] = 2 \left(-\frac{B}{n} + i \frac{180}{n} \right),$$

$$AB\alpha_0^2 = 3 \left(-\frac{B}{n} + i \frac{180}{n} \right), \quad \text{etc.}$$

Si nous mesurons les vecteurs $\overline{B\alpha_0}, \overline{B\alpha_0^1}, \overline{B\alpha_0^2}, \dots$ sur des axes faisant à 360° près avec l'axe BA les angles $AB\alpha_0, AB\alpha_0^1, \dots$ qui viennent d'être calculés, on a, BA étant la longueur du côté AB,

$$\overline{B\alpha_0} = BA \frac{\sin \left(\frac{A}{n} + h \frac{180}{n} \right)}{\sin \left[\frac{A + B}{n} + (h - i) \frac{180}{n} \right]},$$

$$\overline{B\alpha_0^1} = \overline{B\alpha_0} \frac{\sin \alpha}{\sin \sigma_0} = BA \frac{\sin \left(\frac{A}{n} + h \frac{180}{n} \right) \cdot \sin \left(\frac{A}{n} + (h + 1) \frac{180}{n} \right) \frac{180}{n}}{\sin \left[\frac{A + B}{n} + (h - i) \frac{180}{n} \right] \cdot \sin \left[\frac{A + B}{n} + (h + 1 - i) \frac{180}{n} \right]},$$

$$\overline{B\alpha_0^2} = BA \frac{\sin \left(\frac{A}{n} + h \frac{180}{n} \right) \cdot \sin \left[\frac{A}{n} + (h + 1) \frac{180}{n} \right] \cdot \sin \left[\frac{A}{n} + (h + 2) \frac{180}{n} \right]}{\sin \left[\frac{A + B}{n} + (h - i) \frac{180}{n} \right] \cdot \sin \left[\frac{A + B}{n} + (h + 1 - i) \frac{180}{n} \right] \cdot \sin \left[\frac{A + B}{n} + (h + 2 - i) \frac{180}{n} \right]}, \dots$$

Si, enfin, on désigne par $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ les angles d'un axe Ox avec BC, CA, AB, les angles de Ox avec les côtés des polygones $\Pi_0,$

Π_0^1, Π_0^2, \dots dérivent des inclinaisons suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_0 \beta_0) &= (Ox, AB) + (AB, B\alpha_0) + (B\alpha_0, \alpha_0 \beta_0) \\ &= \varphi_c + \left(-\frac{B}{n} + i\frac{180}{n} \right) + \alpha \\ &= \varphi_c + \left[-\frac{\varphi_c - \varphi_a}{n} + i\frac{180}{n} \right] + \left[\frac{\varphi_b - \varphi_c}{n} + (h+1)\frac{180}{n} \right] \\ &= \frac{\varphi_a + \varphi_b + (n-2)\varphi_c}{n} + (h+i+1)\frac{180}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_0^1 \beta_0^1) &= \varphi_c + 2\left(-\frac{B}{n} + i\frac{180}{n} \right) + \alpha^1 \\ &= \varphi_c + \left[-2\frac{\varphi_c - \varphi_a}{n} + 2i\frac{180}{n} \right] + \left[\frac{\varphi_b - \varphi_c}{n} + (h+2)\frac{180}{n} \right] \\ &= \frac{2\varphi_a + \varphi_b + (n-3)\varphi_c}{n} + (h+2i+2)\frac{180}{n}. \end{aligned}$$

$$\varphi(\alpha_0^2 \beta_0^2) = \frac{3\varphi_a + \varphi_b + (n-4)\varphi_c}{n} + (h+3i+3)\frac{180}{n}, \dots$$

Dans ces formules $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ doivent être choisis d'après les déterminations prises pour A et B et de façon que

$$A = \varphi_b - \varphi_c, \quad B = \varphi_c - \varphi_a.$$

Si l'on suppose que l'on a pris pour A, B, C les déterminations élémentaires ordinaires des angles du triangle ABC (ce qui le suppose d'orientation positive) les valeurs de $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ qui en résultent, donnent

$$C = 180 + \varphi_a - \varphi_b.$$

Et l'orientation de la droite \mathcal{C}_j^m est alors :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{C}_j^m) &= \varphi_b + m\frac{180 + \varphi_a - \varphi_b}{n} + j\frac{180}{n} \\ &= \frac{m\varphi_a + (n-m)\varphi_b}{n} + (m+j)\frac{180}{n}. \end{aligned}$$

6. — Supposant choisies les déterminations élémentaires de A, B, C, interprétons nos résultats, d'abord pour $n = 2$ et 3,

nous verrons ainsi la parenté et la raison des différences entre les deux cas. Nous verrons en même temps ce que nos formules, qui semblent prévoir une suite indéfinie de polygones Π, Π^1, Π^2, \dots , ont d'illusoire. Bien entendu, pour $n = 2$ et $n = 3$, on se passerait facilement des formules précédentes, mais j'ai dit que je sacrifiais la brièveté au souci de faire comprendre.

Pour $n = 2$,

$$\varphi(c_{0,0}c_{1,1}) = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} + \frac{180}{2} ;$$

$$\varphi(c_{0,1}c_{1,0}) = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} + 180 ,$$

nous retrouvons la perpendicularité de nos deux droites $c_{0,0}c_{1,1}$, $c_{0,1}c_{1,0}$ (ou P_0 et P_1), mais en même temps on voit que leurs directions sont celles des bissectrices de C . Le point de rencontre α_0^1 de ces deux droites est tel que

$$AB \alpha_0^1 = 2 \left(-\frac{B}{2} + i \frac{180}{2} \right) = -B , \quad (\text{mod. } 180) ,$$

$$\overline{B \alpha_0^1} = BA \frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \left(\frac{A}{2} + 90 \right)}{\sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \left(\frac{A+B}{2} + 90 \right)} = BA \frac{\sin A}{\sin C} ;$$

donc α_0^1 est en C ; le théorème classique sur les bissectrices est prouvé.

On voit que pour $n = 2$, il n'y a en réalité qu'un point α^1 , parce que les polygones P_0 et P_1 , qui sont à deux sommets, n'ont chacun qu'un côté. La considération des polygones Π^1, Π^2 , etc., est illusoire.

Pour $n = 3$,

$$\varphi(c_{h,i}c_{h+1,i+1}) = \frac{\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c}{3} + (h + i + 1) \frac{180}{3} ,$$

on retrouve ainsi que les différents côtés $c_{h,i}c_{h+1,i+1}$ sont trois à trois parallèles aux trois côtés d'un triangle équilatéral, mais en

même temps on voit que leurs directions sont les trois moyennes arithmétiques des directions des côtés du triangle. Le point α_0^1 commun à $c_{h,i} c_{h+1,i+1}$ et à $c_{h,i-1} c_{h+i,i}$ est tel que

$$AB \alpha_0^1 = 2 \left(-\frac{B}{3} + i \frac{180}{3} \right), \quad CB \alpha_0^1 = \frac{B}{3} + 2i \frac{180}{3},$$

donc $B \alpha_0^1$ est la trisectrice \mathcal{B}_{2i} .

L'angle V^1 des polygones Π^1 est $3 \cdot \frac{180}{3} = 180$, c'est-à-dire que les trois points $\alpha_0^1, \beta_0^1, \gamma_0^1$ sont alignés; ce qui était bien évident car ce sont les points de rencontre des côtés homologues de deux triangles qui sont homologues puisque leurs sommets sont alignés avec A. Les Π^1 n'ont donc chacun qu'un côté; il n'y aura pas de polygones Π^2 .

La direction de Π_0^1 ou $\alpha_0^1 \beta_0^1$ est

$$\varphi(\alpha_0^1 \beta_0^1) = \frac{2\varphi_a + \varphi_b}{3} + (h + 2i + 2) \frac{180}{3},$$

cette direction (qui ne change pas quand h et i augmentent tous deux d'une unité, ce qui prouve à nouveau l'alignement de $\alpha_0^1 \beta_0^1 \gamma_0^1$) est donc celle de \mathcal{C}_{h+2i}^2 , ou \mathcal{C}'_{h-i} .

$\alpha_0^1 \beta_0^1$ et $\alpha_1^1 \beta_1^1$ se coupent en α_0^2 tel que

$$AB \alpha_0^2 = 3 \left(-\frac{B}{3} + i \frac{180}{n} \right) = -B, \quad (\text{mod. } 180);$$

$$\overline{B \alpha_0^2} = BA \cdot \frac{\sin \frac{A}{3} \sin \left(\frac{A}{3} + 60 \right) \sin \left(\frac{A}{3} + 120 \right)}{\sin \frac{A+B}{3} \sin \left(\frac{A+B}{3} + 60 \right) \sin \left(\frac{A+B}{3} + 120 \right)} = BA \frac{\sin A}{\sin C},$$

donc α_0^2 est en C. La droite $\alpha_0^1 \beta_0^1$ est la droite \mathcal{C}'_{h-i} elle-même. *Le théorème de Morley est démontré.*

Nous venons, en effet, de voir que le point de rencontre de $c_{h,i} c_{h+1,i+1}$ et de $c_{h,i-1} c_{h+i,i}$ est le point $a_{2i,h-i}$ ou $a_{-i,h-i}$; en donnant à h et à i toutes les valeurs possibles on a ainsi tous les points a . En intervertissant les rôles de A et B on voit que le point de rencontre de $c_{h-1,i-1} c_{h,i}$ et de $c_{h,i-1} c_{h+1,i}$ est le point $b_{i-h,2h}$ ou $b_{i-h,-h}$, d'où tous les b . On peut résumer les résultats

dans un tableau ou, ce qui est équivalent, dans une figure que l'on aura le droit de lire comme un tableau (voir figure 1):

Il existe neuf droites, trois à trois parallèles, qui limitent 27 triangles équilatéraux;

trois d'entre eux ont pour sommets des points a, trois ont pour sommets des points b, trois ont pour sommets des points c;

les 18 autres triangles équilatéraux ont chacun pour sommets un point a, un point b, un point c; les neuf triangles de sommets $c_{h,i}$, $a_{-i,h-i}$, $b_{i-h,-h}$ (ou $a_{\lambda,-\mu}$, $b_{\mu,-\nu}$, $c_{\nu,-\lambda}$ avec $\lambda + \mu + \nu = 0$) ont même orientation que ABC, les neuf triangles de sommets $c_{h,i}$, $a_{-i,h-i-1}$, $b_{i-h+1,-h}$ (ou $a_{\lambda,-\mu}$, $b_{\mu,-\nu}$, $c_{\nu,-\lambda}$ avec $\lambda + \mu + \nu = 1$) sont d'orientation opposée.

Les orientations indiquées résultent de ce que nous connaissons l'orientation des P_0 , P_1 , P_2 et les angles orientés que font entre eux les côtés de ces triangles, considérés comme droites, d'où aussi les angles de ces côtés en tant que segments dirigés.

7. — Tandis qu'avec les bissectrices il n'y avait qu'à considérer les polygones Π , pour les trisectrices il y a eu à considérer les Π et les Π^1 , d'où deux stades. Pour $n \geq 4$ il en faudra davantage, on va le voir plus nettement. En même temps on comprendra que l'élégance du théorème classique et du théorème de Morley vient, en partie, de ce qu'ils ne font intervenir qu'une espèce de points: les points de rencontre des bissectrices pour $n = 2$, car alors α_0^1 est C; les points de rencontre des trisectrices pour $n = 3$, car alors α_0^1 est un point a et α_0^2 est C. Cela ne se représentera plus pour $n > 3$.

Nous avons vu qu'en prenant toujours $c_{h,i} c_{h+1,i+1}$ pour $\alpha_0 \beta_0$, on a

$$V = 2 \cdot \frac{180}{n}, \quad V^1 = 3 \frac{180}{n}, \quad V^2 = 4 \frac{180}{n}, \dots$$

donc les sommets des Π^{n-2} sont alignés, on ne peut pas considérer de polygones Π^{n-1} . Les Π^{n-2} ont un seul côté dont l'inclinaison est donnée par

$$\varphi(\alpha_0^{n-2} \beta_0^{n-2}) = \frac{(n-1)\varphi_a + \varphi_b}{n} + [h + (n-1)i + n - 1] \frac{180}{n},$$

et les formules analogues. La droite portant Π_0^{n-2} est donc parallèle à la n -sectrice $\mathcal{C}_{h+(n-1)i}^{n-1}$ ou \mathcal{C}'_{h-i} .

Le point α_0^{n-1} où Π_0^{n-2} coupe Π_1^{n-2} est tel que

$$AB\alpha_0^{n-1} = n \left(-\frac{B}{n} + i \frac{180}{n} \right) = -B = ABC,$$

$$\overline{B\alpha_0^{n-1}} = BA \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\sin \left(\frac{A}{n} + h \frac{180}{n} \right) \sin \left[\frac{A}{n} + (h+1) \frac{180}{n} \right] \dots \sin \left(\frac{A}{n} + (h+n-1) \frac{180}{n} \right)}{\sin \left(\frac{A+B}{n} + h \frac{180}{n} \right) \sin \left[\frac{A+B}{n} + (h+1) \frac{180}{n} \right] \dots \sin \left[\frac{A+B}{n} + (h+n-1) \frac{180}{n} \right]} \\ & = BA \frac{\sin n \left(\frac{A}{n} + h \frac{180}{n} \right)}{\sin n \left(\frac{A+B}{n} + h \frac{180}{n} \right)} = BA \frac{\sin A}{\sin C}, \end{aligned}$$

donc α_0^{n-1} est en C; $\alpha_0^{n-2} B_0^{n-2}$ est la n -sectrice \mathcal{C}'_{h-i} . Or, on avait :

$$AB\alpha_0^{n-2} = (n-1) \left(-\frac{B}{n} + i \frac{180}{n} \right),$$

$$CB\alpha_0^{n-2} = \frac{B}{n} + (n-1) i \frac{180}{n},$$

$B\alpha_0^{n-2}$ est donc le n -sectrice $\mathcal{B}_{(n-1)i}$ et le point α_0^{n-2} est le point $a_{(n-1)i, h-i}$ ou $a_{-i, h-i}$.

Ainsi: le point $c_{h,i}$ commun aux 2-sectrices $\mathcal{A}_h, \mathcal{B}'_i$ est en même temps un point a;

cela n'est plus exact pour les 3-sectrices, mais les points $\alpha_0^1, \beta_0^1, \dots$ communs à $c_{h,i} c_{h+1,i+1}$ et $c_{h,i-1} c_{h+1,i}$, à $c_{h+1,i+1} c_{h+2,i+2}$ et $c_{h+1,i} c_{h+2,i+1}, \dots$ sont des points a, d'où tous les a;

cela n'est plus exact pour les 4-sectrices, mais les points $\alpha_0^2, \beta_0^2, \dots$ communs à $\alpha_0^1 \beta_0^1$ et $\alpha_1^1 \beta_1^1$, à $\beta_0^1 \gamma_0^1$ et $\beta_1^1 \gamma_1^1, \dots$ sont des points a, d'où tous les a;

.....;

et, pour les n -sectrices, il faudra aller jusqu'aux points $\alpha_0^{n-2}, \beta_0^{n-2}, \dots \alpha_1^{n-2}, \beta_1^{n-2}, \dots$ pour obtenir les points a.

8. — On peut simplifier la forme de cet énoncé. On a :

$$\begin{aligned}\varphi (Ac_{h,i}) &= \varphi (A\alpha_0) = \varphi_c + BA\alpha_0 = \varphi_c + \left(\frac{A}{n} + h\frac{180}{n}\right) = \\ &= \frac{\varphi_b + (n-1)\varphi_c}{n} + h\frac{180}{n} ;\end{aligned}$$

D'autre part, on a calculé

$$\begin{aligned}\varphi (\alpha_0 \alpha_0^1) &= \varphi (\alpha_0 \beta_0) = \frac{\varphi_a + \varphi_b + (n-2)\varphi_c}{n} + (h+i+1)\frac{180}{n}, \\ \varphi (\alpha_0^1 \alpha_0^2) &= \varphi (\alpha_0^1 \beta_0^1) = \frac{2\varphi_a + \varphi_b + (n-3)\varphi_c}{n} + \\ &+ (h+2i+2)\frac{180}{n}, \text{ etc.}\end{aligned}$$

D'où il résulte que le polygone $A \alpha_0 \alpha_0^1 \alpha_0^2 \dots \alpha_0^{n-2} C$ est régulier par rapport à B ; car on a trouvé que tous ses côtés étaient vus de B sous l'angle $-\frac{B}{n} + i\frac{180}{n}$ et tous ses angles sont égaux à

$$\frac{\varphi_a - \varphi_c}{n} + (i+1)\frac{180}{n} = -\frac{B}{n} + (i+1)\frac{180}{n}.$$

Donc, si, à partir de $Ac_{h,i}$ pour premier côté, on construit une ligne polygonale de n côtés dont tous les angles sont égaux à $ABC_{h,i} + \frac{180}{n}$ et dont tous les côtés sont vus de B sous l'angle $ABC_{h,i}$ le dernier sommet de cette ligne est C , l'avant-dernier sommet est le point $a_{-i,h-i}$, le second côté contient le point $c_{h+1,i+1}$, l'avant-dernier côté contient le point $a_{-i-1,h-i-1}$.

Le dernier fait résulte de ce que la ligne pourrait aussi bien être construite à partir de son dernier côté, c'est-à-dire à l'aide de polygones Π déduits des a .

Cet énoncé, vérifiable en quelques lignes, résume tous les résultats précédemment obtenus, si $n = 2$ ou 3 ; pour $n > 3$ il n'en retient qu'une partie. Si, au contraire, on désire augmenter le nombre de ces résultats, on pourra remarquer que

si les points $C_{h,i}$ se répartissent d'eux-mêmes sur les circonférences (P_{h-i}), rien n'obligeait à les ranger dans l'ordre croissant de leurs indices et rien n'obligeait non plus à ranger les (P_{h-i}) dans l'ordre croissant de leur indice. On aurait donc pu, considérant les sommets de P_u et ceux de P_v , prendre les points où les droites joignant deux sommets de P_u sont rencontrées par les droites joignant les deux sommets de P_v qui se déduisent des premiers par alignements avec A . En d'autres termes, on aurait pu prendre pour les Π les polygones (ou systèmes de polygones) obtenus en joignant de k en k les sommets des P_u et ranger ces P_u par exemple dans l'ordre de leurs indices pris de l en l .

Si n est premier, quels que soient k et l inférieurs à n , les résultats seront fort analogues aux précédents, mais l'étude complète du cas où n n'est pas premier exigerait sans doute quelques développements.

Je me contenterai de signaler que les nouveaux points à considérer vont aussi se grouper en familles de sommets de polygones réguliers. Si, en effet, $\alpha\beta\gamma \dots, \alpha'\beta'\gamma' \dots$ sont les sommets homologues de P_u et P_v les points où les n droites $\alpha\beta, \alpha\gamma \dots$ coupent leurs homologues sont $n - 1$ sommets d'un polygone régulier, car ils sont sur la circonférence $\alpha\alpha' B$, qui nous a déjà servi, et les droites $\alpha\beta, \alpha\gamma, \dots$ font entre elles des angles de $\frac{180}{n}$. Le dernier sommet du polygone régulier ainsi trouvé serait le point de rencontre des tangentes en α et α' aux circonférences $\alpha\beta\gamma \dots, \alpha'\beta'\gamma' \dots$; tangentes que l'on peut considérer comme les droites joignant α à α et α' à α' .

9. — Tous les points dont il vient d'être question jouent des rôles analogues, le cas envisagé par Morley a ceci de particulier qu'il est, avec celui des bissectrices, le seul où tous les points sont non seulement de la même espèce, mais aussi relativement peu nombreux. Aussi l'examen des cas $n = 4, 5, 6$, qui donneraient des exemples de l'influence de la nature arithmétique de n , n'est certainement pas immédiat. Il paraît donc bien inutile de généraliser encore; j'indiquerai seulement d'un mot que, k et l étant fixés, on peut répéter ce qui a été dit au n° 2 pour les n^2 points $c_{h,i}^{k,l}$, en lesquels se coupent les couples \mathcal{A}_h^k et \mathcal{B}_i^l ; il suffit d'ailleurs

de remarquer que ces points sont les points $c_{h,i}$ pour le triangle $ABC^{k,l}$, où

$$BAC^{k,l} = k \cdot BAC, \quad C^{k,l}BA = (n-l) \cdot CBA.$$

Alors, pour le cas des trisectrices, nous aurions à considérer quatre familles de points c , les $c^{1,2}$ déjà examinés, les $c^{1,1}$, les $c^{2,2}$, les $c^{2,1}$ qui, chacune, donneront trois triangles équilatéraux, si nous nous bornons aux valeurs 1 et 2 pour k et l , c'est-à-dire aux droites $\mathcal{A}^k, \mathcal{B}^l$ déjà tracées.

La formule déjà écrite :

$$\varphi(c_{h,i}^{1,2} c_{h+1,i+1}^{1,2}) = \varphi_c + \left(-\frac{B}{3} + i \frac{180}{3}\right) + \left(\frac{A}{3} + (h+1) \frac{180}{3}\right),$$

donne,

$$\begin{aligned} \varphi(c_{h,i}^{k,l} c_{h+1,i+1}^{k,l}) &= \varphi_c + \frac{kA - (3-l)B}{3} + (h+i+1) \cdot 60 \\ &= \frac{(3-l)\varphi_a + k\varphi_b + (l-k)\varphi_c}{3} + (h+i+1)60. \end{aligned}$$

$$\varphi(c_{h,i}^{1,1} c_{h+1,i+1}^{1,1}) = \frac{2\varphi_a + \varphi_b}{3} + (h+i+1)60;$$

$$\varphi(c_{h,i}^{2,2} c_{h+1,i+1}^{2,2}) = \frac{\varphi_a + 2\varphi_b}{3} + (h+i+1)60;$$

$$\varphi(c_{h,i}^{2,1} c_{h+1,i+1}^{2,1}) = \frac{2\varphi_a + 2\varphi_b - \varphi_c}{3} + (h+i+1)60.$$

Les côtés des triangles équilatéraux formés par les $c^{1,1}$ sont parallèles aux dernières trisectrices de C; ceux des triangles de sommets $c^{2,2}$ sont parallèles aux premières trisectrices de C; ceux des triangles formés par les $c^{2,1}$ sont symétriques des côtés des triangles de sommets $c^{1,2}$ par rapport aux bissectrices de C.

Malgré l'existence de tels faits simples il est peu vraisemblable que la figure formée par les 108 points $a^{k,l}, b^{k,l}, c^{k,l}$ se prête à des énoncés aussi élégants que celui de Morley. Celui-ci, si l'on remarque que les $c_{h,i}^{1,2}$ et $c_{h,i}^{2,1}$ sont des points inverses par rapport au triangle, se traduit immédiatement en l'énoncé suivant :

Les 27 points $a^{2,1}$, $b^{2,1}$, $c^{2,1}$ sont situés 6 à 6 sur neuf coniques circonscrites à ABC; par chaque point a, b, c il passe deux de ces coniques; elles passent de plus chacune par l'un des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle circonscrit à ABC; par chaque sommet de ce triangle équilatéral passent trois des coniques.

10. — Le résultat complet de Morley, celui qui vient d'être traduit, affirme que les points de rencontre des couples de trisectrices d'un triangle, adjacentes à un même côté, sont 6 à 6 alignés. Nous avons généralisé ce fait en donnant *une construction des premières et dernières n-sectrices des angles du triangle, à partir des premières n-sectrices de A et dernières n-sectrices de B supposées connues, laquelle n'utilise que la règle*. La possibilité d'une telle construction, c'est-à-dire le fait que les n -sectrices inconnues sont données par des équations du premier degré à partir de celles que nous supposons connues, était évidente. A mon avis, c'est ce fait analytique qui est la raison profonde du théorème sur les bissectrices, de celui de Morley et des théorèmes généralisés donnés ici¹. Pour cette raison, il y aurait peut-être lieu de rechercher des démonstrations utilisant davantage les alignements; en tout cas le théorème de Morley se démontre facilement en utilisant les homologues de pôle A que nous avons rencontrés et les homologues analogues de pôle B². En terminant, je veux signaler des homologues entre certains des triangles que nous avons rencontrés et le triangle ABC lui-même que mettent d'ailleurs bien en évidence certaines des démonstrations connues du théorème de Morley.

Prenons pour chaque angle du triangle une première et une dernière trisectrices symétriques par rapport aux bissectrices de l'angle; elles nous donnent un triangle $a_{\lambda, -\mu}^{1,2}$ $b_{\mu, -\nu}^{1,2}$ $c_{\nu, -\lambda}^{1,2}$ que

¹ On pourra se reporter à une communication publiée dans les *Comptes Rendus du Congrès des Sciences mathématiques de Liège*, 1939; (G. Thone. Editeur).

² Dans le cas des trisectrices, les trois triangles P_0 , P_1 , P_2 sont deux à deux homologues de trois manières, l'une des homologues se réduisant à une homothétie. J'ai posé autrefois (cette Revue, XXIII^e ann., 1923) le problème: trouver les systèmes de triangles tels que deux quelconques d'entre eux soient homologues; on voit qu'on pourrait tout d'abord exiger que les triangles soient homologues de trois manières.

j'appellerai seulement abc^1 , et un triangle $a_{\lambda,\mu}^{2,1} b_{\mu,\nu}^{2,1} c_{\nu,\lambda}^{2,1}$ que j'appellerai $\alpha\beta\gamma$.

Soit ω le point de rencontre de $A\alpha$ et $B\beta$. A et B , α et β , c et ω sont les trois couples de sommets d'un quadrilatère complet; les deux premiers sont vus de C sous des angles ayant les mêmes bissectrices, donc il en est de même du troisième couple. Et comme c et γ sont inverses par rapport au triangle, $C\omega$, symétrique de Cc par rapport aux bissectrices de BCA , passe par γ .

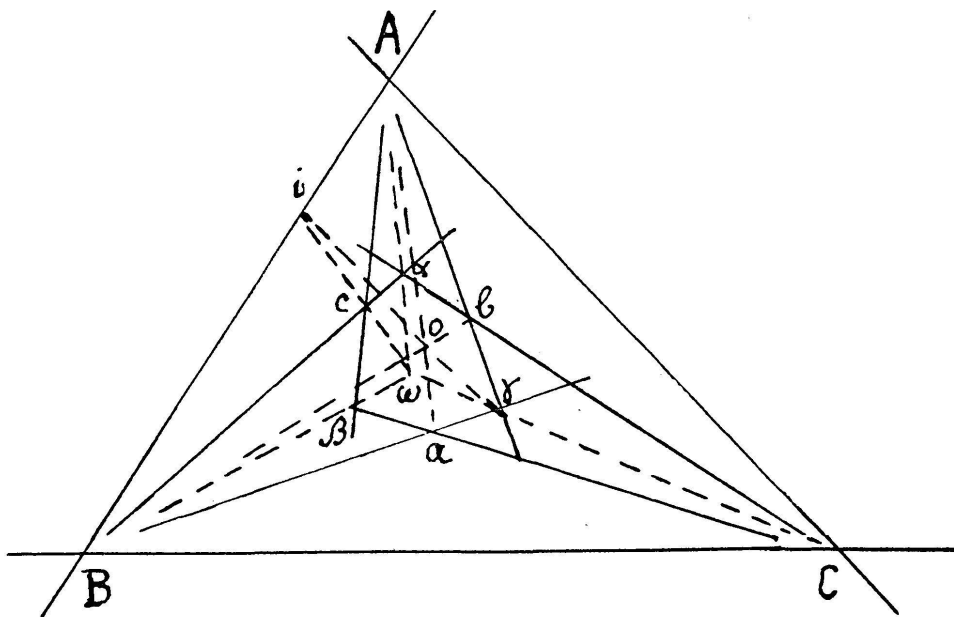


Fig 3.

Les deux triangles ABC , $\alpha\beta\gamma$ sont donc homologues, le pôle de l'homologie étant ω . Les droites Aa , Bb , Cc concourent donc au point o inverse de ω , ABC et abc sont aussi homologues.

c et γ , o et ω , C et le point de rencontre i de $c\omega$ et de $o\gamma$ sont les trois couples de sommets d'un quadrilatère complet; les deux premières sont vus de A sous des angles ayant les mêmes bissectrices, donc il en est de même du troisième et i est sur AB .

Mais, dans le quadrilatère de sommets opposés A et B , α et β , le point i apparaît comme le conjugué harmonique par rapport à A et B du point où $\alpha\beta$ coupe AB , tandis que, dans le quadrilatère de sommets opposés A et B , a et b , il apparaît comme le

¹ Il n'est pas nécessairement équilatéral, car on peut avoir $\lambda + \mu + \nu = 2$.

conjugué harmonique par rapport à A et B du point où ab coupe AB; donc *les trois triangles* ABC, abc , $\alpha\beta\gamma$ *sont homologues et ont même axe d'homologie.*

Ainsi $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ concourent; ce fait obtenu, si l'on choisit λ , μ , ν de façon que a , b , c soient respectivement des centres de circonférences inscrites ou ex-inscrites dans $B\alpha C$, $C\beta A$, $A\gamma B$, en remarquant que les bissectrices αa , βb , γc de ces triangles font entre elles des angles de 60 degrés, on en conclut que abc est équilatéral. C'est l'une des démonstrations élémentaires connues les plus simples du théorème de Morley ¹.

Il est possible que des raisonnements analogues à ceux de ce paragraphe, donc assez différents de ceux que j'ai surtout utilisés, permettent d'étudier le cas des n -sectrices. En tout cas, il serait prématuré de prétendre que l'étude de ces n -sectrices est terminée, que la figure formée par les n -sectrices, ou seulement par les trisectrices, nous est entièrement connue.

¹ Voir les articles cités et, en particulier, celui de M. J. MARCHAND.
