1. — Introduction.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES

PAR

M. Henri LEBESGUE, Membre de l'Institut (Paris).

1. — INTRODUCTION.

Sur un pareil sujet on ne saurait prétendre dire quoi que ce soit de réellement nouveau, j'ai seulement voulu écrire un exposé élémentaire et complet des premiers faits de la théorie. C'est qu'en effet aucun exposé de ce genre n'existe à ma connaissance. La question ne faisant pas partie des programmes officiels et le point de départ de la théorie se présentant facilement, on se contente souvent d'indiquer ce point de départ, renvoyant les développements aux exercices. C'est ainsi que les exercices 840 et suivants de la Géométrie de M. J. HADAMARD (Paris, Arm. Colin) ou 345 et suivants de la Géométrie de MM. G. ILIOVICI et P. ROBERT (Paris, Léon Eyrolles) constitueraient d'excellents exposés. Mais il arrive que, n'ayant pas traité ces exercices, connaissant la théorie des cercles focaux comme question de géométrie analytique, certains s'imaginent que l'étude élémentaire serait longue, difficile, compliquée de discussions pénibles et ils hésitent à faire telle remarque, ils ne sont pas préparés à proposer tel exercice, qui feraient mieux comprendre une propriété en la généralisant, ou montreraient mieux la puissance d'un raisonnement.

Il ne s'agit pas du tout d'enfler des programmes déjà trop lourds; je voudrais, au contraire, aider les jeunes professeurs à soulager leurs élèves en devinant parfois le mot à dire, celui qui ferait mieux comprendre. A cet effet, rien ne vaut les généralisations et les rapprochements d'autant que, dans la question actuelle, le rôle mystérieux des foyers n'a été compris des mathématiciens eux-mêmes que lorsque le raisonnement de Dandelin, la définition de Plücker ont fait des foyers des cercles focaux particuliers.

Deux articles, l'un de M. Ch. Bioche, l'autre de M. H. Mirabel, destinés à de jeunes élèves (*Les Sciences au Baccalauréat*, oct. 1937 — Paris, A. Hattier) montrent bien comment des maîtres avertis peuvent utiliser élémentairement la théorie des cercles focaux. Ces articles m'ont donné l'idée de présenter sous une forme moins concise et plus accessible une Note que j'avais publiée jadis (*Nouv. Ann. de Math.;* juin 1923); l'exposé qui en résulte est d'ailleurs en étroite parenté avec ceux constitués par les exercices cités ou avec la Note de M. Bioche.

2. — Rappel de propriétés des faisceaux de circonférences.

L'étude de l'axe radical Δ de deux circonférences Γ et Γ_1 de centres Ω et Ω_1 conduit à la relation

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) - \mathcal{P}(M, \Gamma_1) + 2\,\overline{\Omega\Omega_1}\cdot\overline{M\Delta} = 0\,, \tag{1}$$

dans laquelle le symbole $\mathcal{P}(M, \Gamma)$, par exemple, représente la puissance d'un point M par rapport à Γ et le symbole $\overline{M\Delta}$ le vecteur perpendiculaire à Δ dont l'origine est M et dont l'extrémité est sur Δ.

Si Γ_2 est une autre circonférence du faisceau Γ, Γ_1, et dont le centre est Ω_2, on a:

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) - \mathcal{P}(M, \Gamma_2) + 2\,\overline{\Omega\Omega_2}\cdot\overline{M\Delta} = 0\,. \tag{2}$$

D'où, par l'élimination de $\overline{M\Delta}$,

$$\overline{\Omega_1\Omega_2}\,\mathcal{P}(M, \Gamma) + \overline{\Omega_2\Omega}\,\mathcal{P}(M, \Gamma_1) + \overline{\Omega\Omega_1}\,\mathcal{P}(M, \Gamma_2) = 0\;; \tag{3}$$

relation qui lie les trois puissances d'un point quelconque M *par rapport à trois cercles d'un faisceau.*

Si M est tel que la somme des deux premiers termes soit nulle,