3. — La classification des corrélations dans un espace à trois dimensions.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

THÉORÈME 21. — La polarité plane peut être écrite d'une des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le choix des systèmes des coordonnées est évident. (Voir fig. 6 et 7.)

3. — La classification des corrélations dans un espace à trois dimensions.

THÉORÈME 22. — Chaque corrélation régulière dans l'espace possède un couple involutif des éléments qui coïncident.

Démonstration: Le théorème 9 montre que chaque corrélation A a un couple involutif (^1a; $^2\alpha$). Soit le point ^1a en dehors du plan $^2\alpha$. Les plans $^2\xi$, qui correspondent aux points ^1x du plan $^2\alpha$, coupent $^2\alpha$ aux droites ^2X. Les éléments des couples (^1x; ^2X) correspondent l'un à l'autre dans une corrélation plane B non singulière (Dét. $|B| \neq 0$) qui possède un couple (^1b; ^2B) involutif des éléments coïncidants. Ensuite le plan déterminé par le point ^1a et par la droite ^2B correspond involutivement au point ^1b dans A.

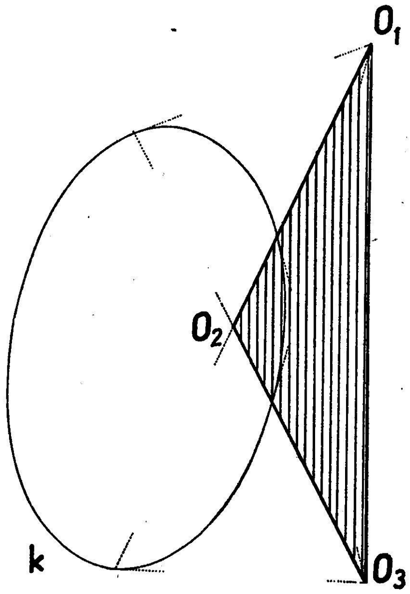

Fig. 7.

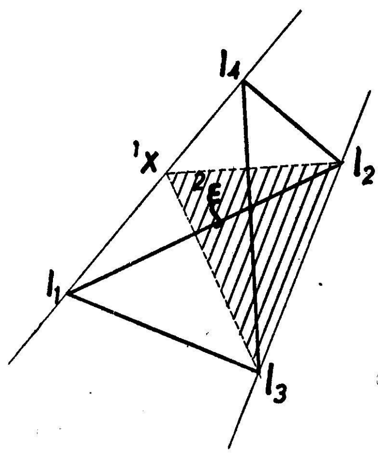

Fig. 8.

THÉORÈME 23. — Quand les quadriques fondamentales de la corrélation A ont le rang 4, cinq cas vont se présenter:

1º Les quadriques K_1, K_2 possèdent un quadrilatère gauche $l_1 l_2 l_3 l_4$ en commun. La corrélation a quatre couples involutifs:

$$(l_1 ; \lambda_1) , \quad (l_2 ; \lambda_2) , \quad (l_3 ; \lambda_3) ; \quad (l_4 ; \lambda_4)$$

où

$$\lambda_1 \equiv (l_1 l_2 l_3) , \quad \lambda_2 \equiv (l_1 l_2 l_4) , \quad \lambda_3 \equiv (l_1 l_3 l_4) , \quad \lambda_4 = (l_2 l_3 l_4) .$$

(Voir fig. 8.)

2º K_1, K_2 possèdent un quadrilatère gauche $l_1 l_2 l_3 l_4$ en commun. La corrélation a les couples involutifs suivants: $(l_2; \lambda_2)$, $(l_3; \lambda_3)$, $({}^1x; {}^2\xi)$, où λ_2, λ_3 sont les plans, mentionnés plus haut et où le point ${}^1x$ parcourt la droite $l_1 l_4$; le plan ${}^2\xi$ est déterminé par les points ${}^1x$, l_2, l_3. (Voir fig. 8.)

3º K_1, K_2 possèdent les droites, de système gauche, L_2, L_3 et leur transversale double $l_4 l_3$ en commun. La corrélation a deux couples involutifs: $(l_3; \lambda_3)$, $(l_4; \lambda_4)$, où $\lambda_3 \equiv (l_4, L_3)$, $\lambda_4 \equiv (l_3, L_2)$. (Voir fig. 9.)

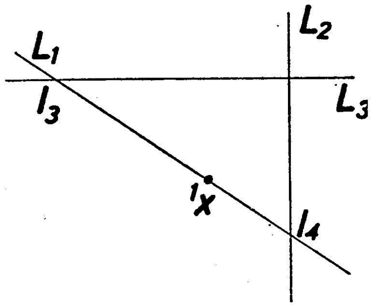

Fig. 9.

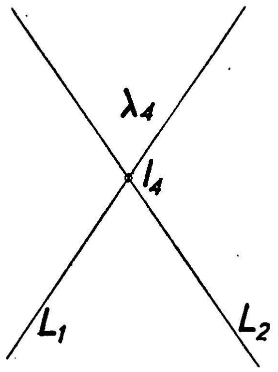

Fig. 10.

4º K_1, K_2 possèdent les droites de système gauche L_2, L_3 et leur transversale double $l_4 l_3$ en commun. La corrélation a un faisceau des couples involutifs $({}^1x; {}^2\xi)$, où ${}^1x$ parcourt la droite $l_4 l_3$; ${}^2\xi$ est un plan du faisceau $(l_4 l_3)$. (Voir fig. 9.) (Le plan (l_3, L_2) correspond au point l_4 et le plan (l_4, L_3) correspond au point l_3.)

5º K_1, K_2 possèdent deux droites doubles L_1, L_2 (qui se coupent au point l_4) en commun, c'est-à-dire que les surfaces K_1, K_2 sont tangentes l'une à l'autre le long des droites L_1, L_2. (Voir fig. 10.)

La corrélation a un unique couple involutif, à savoir $(l_4; \lambda_4)$, où $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$.

Démonstration: D'après le théorème 22 il existe un point l_4 qui correspond au plan λ_4 et qui coïncide avec ce plan. Ce plan est tangent à la quadrique K_1 au point l_4 (d'après le théorème 10). Alors, il coupe K_1 aux droites L_1, L_2. Les droites L_1, L_2 sont les droites doubles d'une homographie B induite en λ_4 par l'homographie $\overline{A}^{-1} . A$, qui a le plan λ_4 pour le plan double. La position des points doubles l_2, l_3 de l'homographie B et par suite de l'homographie $\overline{A}^{-1} . A$ donne trois cas:

a) Les points l_2, l_3 sont situés sur les deux droites L_1, L_2. Les plans ${}^2\lambda_2 \equiv \lambda_2$, ${}^2\lambda_3 \equiv \lambda_3$ qui correspondent aux points ${}^1l_2 \equiv l_2$, ${}^1l_3 \equiv l_3$ en corrélation A, possèdent avec la quadrique respectivement les droites $l_4 l_2$, $l_4 l_3$ en commun. Ces plans se coupent en une droite qui coupe la quadrique K_1 (excepté le point l_4) au point l_1. Le plan ${}^2\lambda_1 \equiv \lambda_1$ qui correspond à ce point ${}^1l_1 \equiv l_1$ possède les points $l_1 l_2 l_3$. Nous avons ainsi obtenu les cas 1° et 2° mentionnés plus haut.

b) Seulement un point (par exemple le point l_3) est situé sur L_1 mais aucune des droites de la quadrique K_1, qui sont situées en λ_4 (c'est-à-dire L_2) ou en λ_3 (c'est-à-dire L_3) ne contiennent plus de point double de l'homographie $\overline{A}^{-1} . A$. Dans le cas qui nous occupe nous obtiendrons les cas 3° et 4°.

c) Aucune droite des L_1, L_2 (en λ_4) ne contient un point double de l'homographie $\overline{A}^{-1} . A$. C'est le cinquième cas de notre théorème. Le plan ${}^2\lambda_4 \equiv \lambda_4$, qui correspond au point ${}^1l_4 \equiv l_4$ en A, possède avec la quadrique K_1 deux droites L_1, L_2 en commun, qui sont aussi les droites de la quadrique K_2, parce qu'elles sont les axes des faisceaux des plans tangents à la quadrique K_1.

Or, dans le cas *a*) les surfaces K_1, K_2 ont un quadrilatère gauche en commun, dans le cas *b*) elles possèdent uniquement les droites L_2, L_3 et leur transversale $L_1 \equiv l_3 l_4$ en commun.

Soit ${}^1R$ une autre droite commune aux quadriques K_1, K_2. La droite ${}^1R$ est une transversale des droites L_2, L_3. La droite ${}^2R$ qui correspond à ${}^1R$ en corrélation A, soit coïncide avec ${}^1R$ soit ne coupe jamais la droite ${}^1R$. Si ${}^1R \equiv {}^2R$, nous obtiendrons les cas 1° et 2°. Si ${}^1R$ et ${}^2R$ sont les droites gauches, la droite ${}^2R$

coïncide avec $L_1 \equiv l_3 l_4$, parce que ${}^2R$ est aussi la droite commune aux surfaces K_1, K_2. Or, ${}^1R \equiv L_1$.

Dans le dernier cas *c*) les quadriques K_1, K_2 possèdent uniquement les droites L_1, L_2 en commun et point d'autres. Si nous supposons que R soit une autre droite commune aux K_1 et K_2, nous déduirons soit que R coupe L_1 mais jamais L_2, soit que R coupe L_2, mais non L_1. Or, c'est le cas *b*) considéré plus haut. Si les quadriques K_1, K_2 ont un quadrilatère gauche commun, la corrélation A possède soit uniquement quatre couples involutifs que nous avons déjà pris en considération, et le cas 1° se présente, soit, outre quatre couples mentionnés, un autre couple involutif $({}^1p; {}^2\pi)$. Le point ${}^1p$ est situé dans un plan du tétraèdre $l_1 l_2 l_3 l_4$, mais jamais sur un côté du quadrilatère gauche. (Dans ce dernier cas la surface K_1 est tangente à la quadrique K_2 le long du côté mentionné.) (Voir théorème 10.) Alors le point ${}^1p$ est situé sur $l_1 l_4$ ou $l_2 l_3$. Ensuite, d'après théorème 9, n'importe quel point de cette droite est le point d'un couple involutif. C'est ce qui, en effet, a lieu tout au plus pour l'une des droites $l_1 l_4$, $l_2 l_3$. (Voir théorème 27.) Nous obtenons ainsi le cas 2°.

Si les surfaces K_1, K_2 possèdent un quadrilatère gauche incomplet en commun, la corrélation A a soit seulement deux couples involutifs, énoncés plus haut (cas 3°), soit, outre ces couples, un autre couple involutif $({}^1p; {}^2\pi)$. Le point ${}^1p$ doit être situé sur le côté $l_3 l_4$. Dans le cas contraire la transversale X des droites gauches $L_2 L_3$, passant par le point, ${}^1p$ est la droite double de l'homographie $\overline{A}^{-1}$. A. (Voir théorème 9.) C'est-à-dire: Un point des points d'intersection $(X \times L_2)$, $(X \times L_3)$ au moins, est un autre point double de cette homographie. (Mais ce n'est pas notre supposition.) Ensuite n'importe quel point de la droite $l_3 l_4$ est le point d'un couple involutif — d'après le théorème 9. C'est le cas 4° qui a lieu.

Enfin si K_1, K_2 sont tangentes l'une à l'autre le long de deux droites L_1, L_2 qui se coupe en l_4, la corrélation A possède évidemment un unique couple involutif, à savoir: $(l_4; \lambda_4)$, où $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$. Nous obtenons le cas 5°.

Théorème 24. — Quand les quadriques fondamentales de la corrélation A ont le rang 3, c'est-à-dire que K_1 est l'ensemble des points du cône irréductible (au sommet v), et que K_2 est l'ensemble des plans qui ont pour enveloppée une conique irréductible K du plan α, les cas suivants vont se présenter:

6° Le plan α coupe le cône K_1 en les deux droites distinctes L_1, L_2, qui sont les tangentes de la conique K aux points l_1, l_2. La corrélation a trois couples involutifs: (v; α), (l_1; λ_1), (l_2; λ_2), où λ_1, λ_2 sont les plans tangents du cône K_1 le long de la droite L_1 respectivement L_2. (Voir fig. 11.)

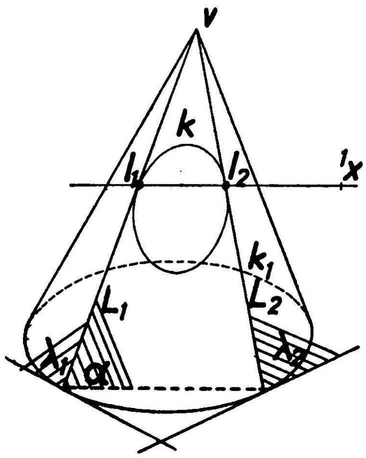

Fig. 11,

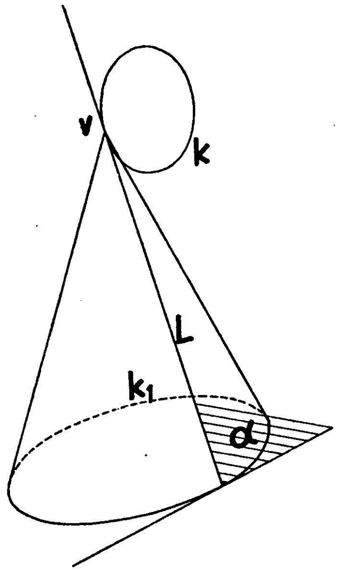

Fig. 12.

7° La position du cône K_1 et de la conique K est la même que dans le cas précédent (6°). La corrélation possède les couples involutifs: (v; α), (^1x; $^2\xi$), où le point ^1x parcourt la droite $l_1 l_2$. (Voir fig. 11.)

8° Le plan α est tangent au cône le long de la droite L. La conique K est tangente à cette droite au point v. La corrélation a un seul couple involutif, à savoir (v; α). (Voir fig. 12.)

Démonstration: Le couple (v; α) est le couple involutif — d'après le théorème 12 — et le plan α possède le point v.

a) Soit α le plan qui coupe le cône K_1 aux deux droites différentes L_1, L_2. Une droite au moins (par exemple L_1) coupe la conique K au point l_1 différent du sommet v. Par suite les plans, qui correspondent aux points de la droite L_1 (ils forment un faisceau de l'axe L_1) sont tangents à la conique K, la droite L_1 est aussi la tangente de la courbe K au point l_1. De la même manière nous déduirons que la droite L_2 est tangente à K en l_2.

Les plans qui correspondent aux points l_1, l_2 forment avec ces points les couples involutifs (d'après le théorème 11). Ce sont les plans λ_1, λ_2 qu'il y a lieu de considérer.

Si le cas 6° n'a pas lieu, la corrélation possède outre les couples $(\wp; \alpha)$, $(l_1; \lambda_1)$, $(l_2; \lambda_2)$ une autre paire involutive, à savoir $({}^1x; {}^2\xi)$. D'après le théorème 10 le point ${}^1x$ est situé sur la droite l_1l_2. Or, en raison du théorème 9, n'importe quel point de la droite l_1l_2 appartient à une paire involutive. C'est le cas 7° qui se produit.

b) Soit maintenant α le plan qui est tangent au cône K_1 le long de la droite L. La corrélation A transforme la figure géométrique formée par les éléments (K_1, α, L) en figure formée par $(K, \wp, L)$ c'est-à-dire que la droite L est tangente à K en $\wp$. Si $({}^1x; {}^2\xi)$ est un couple involutif et différent de $(\wp; \alpha)$, le point ${}^1x$ est situé sur L. On en déduit que le plan ${}^2\xi$ possède la droite L; mais ce n'est jamais possible d'après le théorème 10. Or, le cas 8° a lieu.

Théorème 25. — Si les surfaces K_1, K_2 ont le rang 2, c'est-à-dire si K_1 est une paire de plans α, β et K_2 est un couple des points a, b, nous avons trois cas:

9° Le point a est situé dans le plan α, le point b en β; les droites ab, $(\alpha \times \beta)$, sont les droites formant système gauche. (Voir fig. 13.) La corrélation A, prise en considération, possède les couples involutifs suivants:

$$(a\,;\,\alpha)\ ,\qquad (b\,;\,\beta)\ ,\qquad ({}^1x\,;\,{}^2\xi)\ ,$$

où ${}^1x$ parcourt la droite $(\alpha \times \beta)$ et ${}^2\xi$ est le plan du faisceau (ab), à savoir ${}^2\xi \equiv ({}^1xab)$.

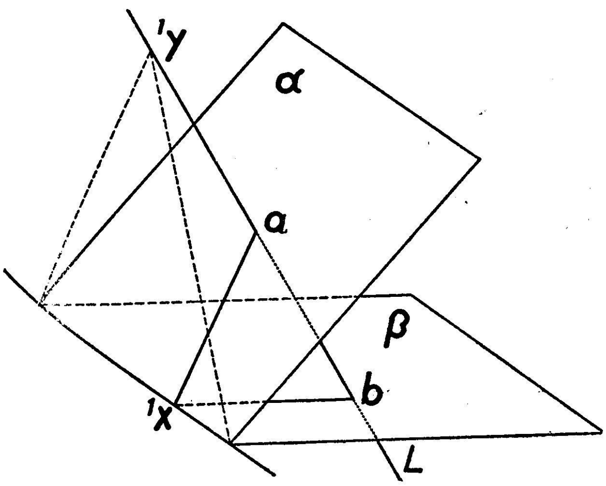

Fig. 13.

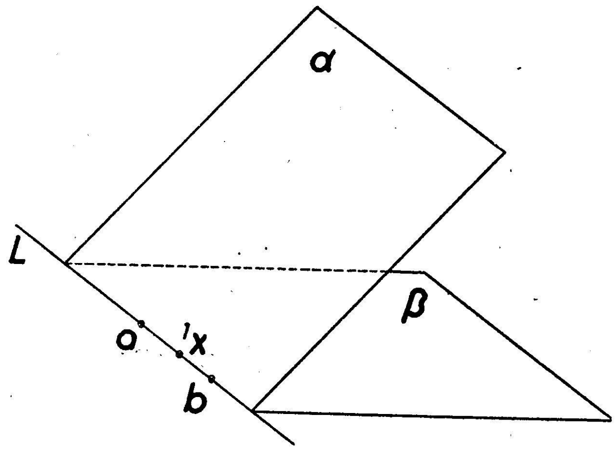

Fig. 14.

10° La position des K_1, K_2 est la même que dans le cas précédent. La corrélation possède les couples involutifs $({}^1x;\ {}^2\xi)$, $({}^1y;\ {}^2\eta)$, où ${}^1x$ parcourt la droite d'intersection $(\alpha \times \beta)$, ${}^1y$ parcourt la droite qui joint les points a, b et les plans ${}^2\xi$, ${}^2\eta$ sont déterminés de la manière suivante: (Voir fig. 13.)

$${}^2\xi \equiv ({}^1x\,a\,b)\ , \qquad {}^2\eta \equiv \left[{}^1y\,,\ (\alpha \times \beta)\right]\ .$$

11° La droite qui joint les points a, b coïncide avec la droite d'intersection des plans α, β. La corrélation possède les paires involutives $({}^1x;\ {}^2\xi)$, où ${}^1x$ parcourt la droite ab et où ${}^2\xi$ possède la droite $(\alpha \times \beta)$. (Voir fig. 14.)

Démonstration: Soit L l'axe du faisceau des plans qui correspondent aux points de la droite $(\alpha \times \beta)$ en corrélation A. L'axe L est formé avec $(\alpha \times \beta)$ dans une paire gauche de droites, ou coïncide avec $(\alpha \times \beta)$.

a) Soient L, $(\alpha \times \beta)$ les droites formant système gauche. Les points ${}^1x$, ${}^2x$ qui correspondent au plan $\alpha \equiv {}^1\alpha \equiv {}^2\alpha$, sont situés dans le plan α.

Dans le cas contraire les plans qui correspondent aux points du plan α coupent α aux droites qui correspondent aux mêmes points en corrélation B (Dét. $|B| \neq 0$). Mais cette corrélation possède uniquement les paires dont les éléments coïncident — ce qui n'a jamais lieu. Par conséquent les points ${}^1x$, ${}^2x$ sont situés sur L; on a ${}^1x \equiv {}^2x \equiv (L \times \alpha)$. Ce point est aussi un des points a, b (de la conique K_2).

Soit par exemple ${}^1x \equiv a$; ensuite il y a $b \equiv (L \times \beta)$.

Si la corrélation A n'a d'autre paire involutive, le cas 9° se produit. Dans le cas contraire nous aurons un autre couple $({}^1x;\ {}^2\xi)$. D'après le théorème 13 le point ${}^1x$ doit être situé sur ab et n'importe quel point de cette droite correspond involutivement à un plan et forme avec lui une paire involutive. Le cas 10° a lieu.

b) Si $L \equiv (\alpha \times \beta)$, les points a, b, sont situés aussi sur $(\alpha \times \beta)$. D'après le théorème 13 il n'est point d'autres points des couples involutifs en dehors de la droite ab. Le cas 11° va se présenter.

THÉORÈME 26. — Si les quadriques fondamentales ont le rang 1, c'est-à-dire si K_1 est le plan double α et si K_2 est le point double a, une seule possibilité se produit.

12° Le point a est situé dans le plan α et forme avec ce plan une paire involutive de la corrélation A. La corrélation possède les couples involutifs $({}^1x;\ {}^2\xi)$, où ${}^1x$ parcourt le plan α, ${}^2\xi$ passe par le point a.

Preuve: Les points ${}^1a$, ${}^2a$ qui correspondent au plan α sont situés dans le plan α. D'après le théorème 12 (et par analogie avec la démonstration du théorème 25 a) nous avons ${}^1a \equiv {}^2a \equiv a$. Enfin il n'existe pas d'autre couple involutif $({}^1x;\ {}^2\xi)$ pour lequel ${}^1x$ ne soit pas situé dans α. Dans le cas contraire on a ${}^2\xi \equiv \alpha$ (d'après le théorème 13); mais ce n'est jamais possible.

Dans ce qui suit, nous divisons les cas 1° à 12°, que nous avons pris en considération, en les quatre groupes suivants:

En I^er^ groupe sont les cas: 1°, 2°, 9°, 10°;
en II^e^ groupe sont les cas: 5°, 6°, 7°, 12°;
en III^e^ groupe sont les cas: 3°, 4°, 11°;
en IV^e^ groupe est le cas: 8°.

THÉORÈME 27. — Les corrélations du premier groupe peuvent être écrites de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les cas particuliers aient lieu sont dans:

le cas 1°: $a_{41} \neq a_{14}$, $a_{32} \neq \pm a_{23}$;
le cas 2°: $a_{41} = a_{14}$, $a_{32} \neq \pm a_{23}$;
le cas 9°: $a_{41} = - a_{14}$, $a_{32} \neq \pm a_{23}$;
le cas 10°: $a_{41} = - a_{14}$, $a_{32} = - a_{23}$.

Démonstration: Le choix du système des coordonnées dans les cas 1° et 2° est le suivant: Le tétraèdre fondamental est donné par les points $o_1 \equiv l_1$, $o_2 \equiv l_2$, $o_3 \equiv l_3$, $o_4 \equiv l_4$.

Dans les cas 9° et 10° nous choisissons $o_1 \equiv a$, $o_4 \equiv b$; les points o_2 et o_3 sont arbitraires sur la droite $(\alpha \times \beta)$. Les plans ${}^2\eta \equiv (a_{14}y_4 : 0 : 0 : a_{41}y_1)$, ${}^1\eta \equiv (a_{41}y_1 : 0 : 0 : a_{14}y_1)$ qui correspondent au point arbitraire $(y_1 : 0 : 0 : y_4)$ situé sur $o_1 o_4 \equiv (\alpha \times \beta)$ doivent coïncider. (Voir le cas 9°.) On en déduit la relation: $a_{14}^2 = a_{41}^2$.

Appendice à la démonstration du théorème 23*:* Il n'est pas possible, dans le cas général, que tous les points des droites $o_1 o_4$, $o_2 o_3$ appartiennent aux couples involutifs. Si ce cas se présentait nous pourrions en déduire: $a_{14} = a_{41}$, $a_{23} = a_{32}$.[10] D'après le théorème 7 la polarité a lieu.

THÉORÈME 28. — La matrice des corrélations du deuxième groupe est la suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \quad a_{11} \neq 0 .$$

Le cas 5° se présente quand et uniquement quand

$$a_{41} \neq \pm a_{14} , \qquad a_{23} \neq \pm a_{32} ;$$

pour le cas 6° il est nécessaire et il suffit que:

$$a_{41} = - a_{14} , \qquad a_{32} \neq \pm a_{23} ;$$

pour le cas 7° que:

$$a_{41} = - a_{14} , \qquad a_{32} = a_{23} ;$$

pour le cas 12° que:

$$a_{41} = - a_{14} , \qquad a_{32} = - a_{23} .$$

Démonstration: Le choix du système de coordonnées est le suivant: Dans le cas 5°: $o_4 \equiv l_4$, le plan $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$ a l'équation $x_1 = 0$; o_2 est un point sur L_2, $(o_2 \not\equiv o_4)$, o_3 est un point sur L_1, $(o_3 \not\equiv o_4)$. Le plan $x_3 = 0$ correspond au point o_2 en A et $x_2 = 0$ correspond au point o_3. Enfin o_1 est le point d'intersection des droites de la surface K_2 qui sont situées dans les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

---

[10] Nous obtenons, en tenant compte de la caractéristique de la corrélation A, $a_{14} \neq - a_{41}$, $a_{23} \neq - a_{32}$.

Les cas 6°, 7°: $o_4 \equiv v$, $o_2 \equiv l_1$, $o_1 \equiv l_2$, les plans λ_1, λ_2 ont les équations $x_3 = 0$ respectivement $x_2 = 0$.

Le cas 12°: $o_4 \equiv a$, le plan α a l'équation $x_1 = 0$. Les points o_2, o_3 sont les points arbitraires dans le plan α, mais ils ne sont pas situés sur une droite qui passe par a. Les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ correspondent respectivement aux points choisis o_3, o_2. Le coefficient a_{11} est différent de zéro afin que les cas du premier groupe n'aient pas lieu. Nous ferons la distinction des cas 5°, 6°, 7°, par analogie avec celle que nous avons faite dans les cas 1° et 2°.

Théorème 29. — La matrice des corrélations du troisième groupe peut être écrite de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \quad a_{21} \neq 0 .$$

Le cas 3° va se présenter quand et uniquement quand

$$a_{41} \neq -a_{14}, \qquad a_{32} \neq -a_{23}$$
$$a_{14}a_{23} - a_{41}a_{32} \neq 0 .$$

Le cas 4°:

$$a_{41} \neq -a_{14}, \qquad a_{32} \neq -a_{23}$$
$$a_{14}a_{23} - a_{41}a_{32} = 0 ;$$

Le cas 11°:

$$a_{41} = -a_{14}, \qquad a_{32} = -a_{23} .$$

Démonstration: Dans les cas 3° et 4° nous choisissons le système des coordonnées suivant: $o_3 \equiv l_3$, $o_4 \equiv l_4$, le point o_2 est situé sur L_2 et correspond au plan $x_3 = 0$. Le point o_1 est le point d'intersection du plan $x_3 = 0$ avec la droite L_1. Le choix du tétraèdre fondamental dans le dernier cas 11° du troisième groupe est le suivant: $o_4 \equiv a$, $o_3 \equiv b$; les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sont les plans α (resp. β). Enfin le point o_1 se trouve sur la droite d'intersection des plans $x_3 = 0$, β. Nous déduirons la relation $a_{21} \neq 0$ en exprimant que la droite $o_4 o_2$ ne contient que le point o_4, considéré comme l'élément d'un couple involutif.

Enfin nous allons différencier les cas 3° et 4° (l'un et l'autre) à l'aide de la méthode mentionnée dans les cas 1° et 2°.

Théorème 30. — Les corrélations du quatrième groupe sont:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & -a_{23} & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad a_{22} \neq 0 \,, \quad a_{31} \neq 0 \,.$$

Démonstration: Le choix du système fondamental des coordonnées est le suivant: $o_4 \equiv v$; le plan α a l'équation $x_1 = 0$; o_3 est situé sur L, le plan $x_3 = 0$ correspond à o_3 dans A. Le plan $x_4 = 0$ contient la seconde tangente (par o_3) de la conique K et le point o_1 correspond à $x_4 = 0$ dans A. Enfin o_2 est le point commun aux plans $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ et au plan qui correspond à o_1 dans $\bar{A}$. Le cône K_1 a le sommet $v \equiv o_4$ et il est tangent au plan $x_1 = 0$ le long de la droite $\overline{o_4 o_3}$. On en déduit $a_{23} = - a_{32}$, $a_{41} = - a_{14}$. Le cône K_1 n'est pas irréductible. Or, $a_{22} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$.

Théorème 31. — La matrice de la corrélation polaire (de la polarité) peut être écrite des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Ces formules correspondent aux deux équations bien connues des quadriques irréductibles.

Théorème 32. — La matrice de la corrélation nulle (du système nul) peut être écrite:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{23} & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le choix du tétraèdre fondamental des coordonnées y est suivant: Un point de l'espace soit o_4; le plan qui lui correspond dans A soit $x_1 = 0$. Soient o_2, o_3 deux points arbitraires de ce plan. Que les plans correspondants à ces points dans A soient $x_3 = 0$ respectivement $x_2 = 0$ et enfin soit o_1 un point de la droite d'intersection des plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Or, le tétraèdre fondamental est choisi.