FORMULES DU TÉTRAÈDRE

Autor(en): **Delens, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28593

FORMULES DU TÉTRAÈDRE

PAR

M. Paul DELENS (Le Havre).

Des recherches récentes, exposées en particulier dans *Mathesis* (*Sur la géométrie du tétraèdre*, LI, 1937, p. 119-127 et 444-456; LII, 1938, p. 62-79), m'ont conduit à l'introduction, pour le tétraèdre, d'un système fondamental (surabondant) de sept angles, liés par deux relations identiques. Ceci permet d'établir, à partir d'une grandeur de base, des formules *heptagonométriques* du tétraèdre, suffisamment analogues aux formules trigonométriques du triangle, qui semblent susceptibles de rendre les mêmes services — au moins quand il s'agit de propriétés en rapport avec la géométrie anallagmatique; mais les relations connues relatives aux propriétés projectives, affines et purement métriques du tétraèdre s'expriment simplement aussi avec les angles en question.

Les démonstrations nécessaires ayant déjà été publiées *(loc. cit.)*, je me contente ici — à part quelques rappels de relations intermédiaires et quelques adjonctions — de donner un tableau des formules explicites, relatives aux principaux éléments, qui en découlent; tableau qu'on prolongera sans peine en tenant compte de mes Notes précitées et des résultats classiques.

1. Définitions et notations. — Soient $\mathcal{T} \equiv$ ABCD le tétraèdre de base, V son volume, R le rayon de sa sphère circonscrite $\mathcal{O}$, l et sin $\mathcal{T}$ la *corde* et le *sinus du tétraèdre*. Les longueurs des arêtes sont $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$

et je pose $j = a, b, c,\ \ j' = a', b', c'$. Les angles dièdres de $\mathcal{T}$ sont $\mathcal{J} = \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C},\ \ \mathcal{J}' = \mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$, respectivement *opposés* aux arêtes j, j'.

Je désigne par $\mathrm{J} = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ les sommets de $\mathcal{T}$ *et les angles des faces opposées avec la sphère* $\mathcal{O}$. L'indice J est affecté aux éléments relatifs aux sommets et aux faces opposées; les angles des faces sont ainsi $\mathrm{B_A}, \mathrm{C_A}, \mathrm{D_A}$; $\mathrm{C_B}, \mathrm{D_B}, \mathrm{A_B}$; etc. De même $h_\mathrm{J}, s_\mathrm{J}, \mathrm{R_J}, \tau_\mathrm{J}$, hauteurs de $\mathcal{T}$, aires des faces, rayons des cercles circonscrits à ces faces, angles trièdres de $\mathcal{T}$; $\sin \tau_\mathrm{J}$, *sinus de l'angle trièdre* τ_J;

$$v_\mathrm{J} = 4\mathrm{R_J} s_\mathrm{J} = ab'c' ,\ bc'a' ,\ ca'b' ,\ abc \qquad (\mathrm{J} = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) .$$

L'indice $i = 1, 2, 3$ est relatif aux paires d'arêtes opposées DA et BC, DB et CA, DC et AB; associé aussi aux couples de lettres j, j' et $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$; h_i et η_i sont les bihauteurs de $\mathcal{T}$ et les angles des arêtes opposées

$$\eta_i = (\mathrm{DA}, \mathrm{BC}) ,\ \ (\mathrm{DB}, \mathrm{CA}) ,\ \ (\mathrm{DC}, \mathrm{AB}) \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Je désigne par Θ un triangle *associé* à $\mathcal{T}$, J_i ses angles, $\mathcal{S}$ sa surface, $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_i$ les rayons des cercles circonscrit, inscrit, exinscrits. Les éléments du triangle associé Θ_s de VON STAUDT, de côtés

$$j_i = aa', bb', cc' \qquad (i = 1, 2, 3)$$

reçoivent en général l'indice s ($\mathcal{S}_s, \mathcal{R}_s, \mathcal{R}_{0s}, \mathcal{R}_{is}$), et ceux du triangle associé *réduit* (de VON STAUDT) Θ_s^0 de côtés $j_i^0 = j_i/2\mathrm{R}$, l'indice *supérieur* 0; plus généralement cet indice affectera les éléments *réduits*, obtenus en divisant par 2R les quantités homogènes à des longueurs.

Le système d'angles fondamentaux est celui des J_i *et* J, en relation étroite avec celui des grandeurs j_i et v_J. La grandeur de base choisie dans la suite est 2R.

Abréviations:

$$\sigma_i, \gamma_i, \theta_i, \chi_i \quad \text{pour} \quad \sin \mathrm{J}_i, \cos \mathrm{J}_i, \mathrm{tg}\, \mathrm{J}_i, \mathrm{cotg}\, \mathrm{J}_i ,$$

$$\sigma_\mathrm{J}, \gamma_\mathrm{J}, \theta_\mathrm{J}, \chi_\mathrm{J} \quad \text{pour} \quad \sin \mathrm{J} , \cos \mathrm{J} , \mathrm{tg}\, \mathrm{J} , \mathrm{cotg}\, \mathrm{J} ,$$

$$\mathrm{P} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 , \qquad \mathrm{S} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 ;$$

$$\mathrm{Q}_i(x_\mathrm{J}) = x_\mathrm{B}x_\mathrm{C} + x_\mathrm{D}x_\mathrm{A} ,\ x_\mathrm{C}x_\mathrm{A} + x_\mathrm{D}x_\mathrm{B} ,\ x_\mathrm{A}x_\mathrm{B} + x_\mathrm{D}x_\mathrm{C}$$

pour quatre quantités arbitraires x_J, et

$$2\Sigma\sigma_i Q_i(x_J) \equiv 2P(x_J) \equiv \Sigma x_J P_J(x_J) \, .$$

Pour les χ_J, je pose

$$Q_i(\chi_J) = Q_i \, , \quad P(\chi_J) = P \quad \text{(identité fondamentale)}, \quad P_J(\chi_J) = P_J \, .$$

Remarques. — Dans les formules qui suivent, les mesures d'angles sont prises en valeur absolue (de 0 à 2π); je ne reviens pas sur les conventions d'orientation que nécessite en particulier la comparaison de divers tétraèdres. Comme en trigonométrie, les formules introduiront pour certaines quantités des évaluations algébriques. Enfin ces formules seront, suivant les cas, écrites avec des lettres ou indices courants (J, i, j, $\mathcal{J}$, ...) ou particularisés — les formules semblables à celle donnée s'obtenant alors par permutation circulaire.

2. Relations préliminaires. — Les identités angulaires fondamentales sont

$$\Sigma J_i = \pi \, , \qquad \Sigma\sigma_i Q_i = P \qquad \left(2P = \Sigma\chi_J P_J \, , \quad P_J = \frac{\partial P}{\partial \chi_J}\right) . \tag{1}$$

La première entraîne de nombreuses identités trigonométriques connues du triangle Θ. Je détaille pour la seconde les deux systèmes de relations inverses.

$$\left\{\begin{aligned} P_A &= \cdot \qquad\quad \sigma_3\chi_B + \sigma_2\chi_C + \sigma_1\chi_D \, , \\ P_B &= \sigma_3\chi_A \qquad \cdot \qquad + \sigma_1\chi_C + \sigma_2\chi_D \, , \\ P_C &= \sigma_2\chi_A + \sigma_1\chi_B \qquad \cdot \qquad + \sigma_3\chi_D \, , \\ P_D &= \sigma_1\chi_A + \sigma_2\chi_B + \sigma_3\chi_C \qquad \cdot \quad , \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} 2P\chi_A &= -P_A + \gamma_3 P_B + \gamma_2 P_C + \gamma_1 P_D \, , \\ 2P\chi_B &= \gamma_3 P_A - P_B + \gamma_1 P_C + \gamma_2 P_D \, , \\ 2P\chi_C &= \gamma_2 P_A + \gamma_1 P_B - P_C + \gamma_3 P_D \, , \\ 2P\chi_D &= \gamma_1 P_A + \gamma_2 P_B + \gamma_3 P_C - P_D \, , \end{aligned}\right. \tag{2}$$

D'après l'identité $\Sigma\sigma_i\gamma_i = 2P$ de Θ, on peut encore donner à $(1)_2$ une des formes

$$\Sigma\sigma_i(\gamma_i - Q_i) = P \quad \text{ou} \quad \Sigma\sigma_i(2Q_i - \gamma_i) = 0\,. \tag{1'}$$

En posant

$$\Pi_i = Q_i(P_J) = P_B P_C + P_D P_A\,, \quad P_C P_A + P_D P_B\,, \quad P_A P_B + P_D P_C\,,$$

on déduit de (2) les relations des types

$$\left\{\begin{aligned} \Pi_1 &= \left(\Sigma\sigma_i^2\right)Q_i + 2\sigma_1\sigma_2 Q_2 + 2\sigma_1\sigma_3 Q_3 + \sigma_2\sigma_3\left(\Sigma\chi_J^2\right)\,,\\ 4P^2Q_1 &= \left(1 + \Sigma\gamma_i^2\right)\Pi_1 + 2(\gamma_1\gamma_2 - \gamma_3)\Pi_2\\ &\qquad + 2(\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2)\Pi_3 + (\gamma_2\gamma_3 - \gamma_1)\left(\Sigma P_J^2\right)\,; \end{aligned}\right.$$

d'où, en tenant compte de $\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1^2 = 2\sigma_2\sigma_3\gamma_1 = 2P\chi_1$,

$$\sigma_1\Pi_1 = P\left\{\Sigma\sigma_i^2 + \Sigma\chi_J^2 - 2(\sigma_2 Q_2 + \sigma_3 Q_3)\chi_1\right\}\,,$$

$$\frac{\sigma_3\Pi_3 - \sigma_2\Pi_2}{2P} = \gamma_3 Q_3 - \gamma_2 Q_2 - P(\chi_3 - \chi_2)\,.$$

Finalement, d'après l'identité $P(\chi_3 - \chi_2) = \gamma_3^2 - \gamma_2^2$ de Θ, on obtient

$$\frac{\sigma_3\Pi_3 - \sigma_2\Pi_2}{2P} = \gamma_3(Q_3 - \gamma_3) - \gamma_2(Q_2 - \gamma_2)\,. \tag{3}$$

3. Formules usuelles. — Les relations essentielles utilisées ici étant

$$\left\{\begin{aligned} \rho_J &= 2s_J\cdot 2R_J\,, \qquad 6V = 2s_J h_J\,,\\ \frac{\rho_J}{6V} &= \frac{2R_J}{h_J} = \frac{P_J}{P}\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$l = \frac{h_A h_B h_C h_D}{6V}\,, \tag{5}$$

$$2\mathcal{S}_s = 6V\cdot 2R \quad \text{ou} \quad 6V = 2\mathcal{S}_s^0\cdot 2R\,, \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} j_1 &= aa' = 2\mathcal{R}_s\sigma_1\,, \qquad j_1 j_2 j_3 = (2\mathcal{R}_s)^3 P = \sqrt{\rho_A\rho_B\rho_C\rho_D}\,,\\ a^2 &= \frac{\rho_D\rho_A}{j_2 j_3}\,, \qquad a'^2 = \frac{\rho_B\rho_C}{j_2 j_3}\,, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

on obtient

$$
\left\{
\begin{aligned}
&2R_J = 2R\sigma_J\,, \qquad h_J = 2RP\frac{\sigma_J}{P_J}\,,\\
&6V = \frac{(2RP)^3}{P_A P_B P_C P_D}\,,\\
&2s_A = \frac{(2RP)^2}{\sigma_A P_B P_C P_D}\,, \qquad \rho_A = 2R\frac{(2RP)^2}{P_B P_C P_D}\,,\\
&a = 2R\sqrt{\frac{P\sigma_1}{P_B P_C}}\,, \quad a' = 2R\sqrt{\frac{P\sigma_1}{P_D P_A}}\,, \quad j_i = (2R)^2\frac{P\sigma_i}{\sqrt{P_A P_B P_C P_D}}\,,\\
&2\mathcal{R}_S = (2R)^2\frac{P}{\sqrt{P_A P_B P_C P_D}}\,, \qquad 2\mathcal{S}_S = 2R\frac{(2RP)^3}{P_A P_B P_C P_D}\,,\\
&l = 2RP\,\sigma_A\sigma_B\sigma_C\sigma_D\,.
\end{aligned}
\right. \tag{I}
$$

Ajoutons encore à ces formules

$$
\left\{
\begin{aligned}
&a^2 + a'^2 = (2R)^2\frac{P\sigma_1\Pi_1}{P_A P_B P_C P_D}\,,\\
&\frac{c^2 + c'^2 - (b^2 + b'^2)}{2aa'} = \frac{\sigma_3\Pi_3 - \sigma_2\Pi_2}{2\sigma_1\sqrt{P_A P_B P_C P_D}}\,, \qquad h_i \sin\eta_i = \frac{2RP^2}{\sigma_i\sqrt{P_A P_B P_C P_D}}\,;
\end{aligned}
\right. \tag{II}
$$

le deuxième est l'expression de cos η_1, tandis que les quantités h_i sin η_i sont les hauteurs du triangle Θ_S^0.

4. Autres formules. — On utilisera ici en particulier les relations

$$\frac{\sin\mathfrak{A}}{a'} = \frac{6V}{2s_B\cdot 2s_C}\,, \qquad \frac{\sin\mathfrak{A}}{a} = \frac{\sigma_B\sigma_C}{2\mathcal{R}_S^0}\,, \tag{8}$$

$$l = 2R\sin\mathcal{C} = h_J\sin\tau_J\,, \tag{9}$$

$$\sin D_A = \frac{\sin\tau_D}{\sin\mathcal{B}\sin\mathcal{C}} = \frac{a}{2R_A}\,. \tag{10}$$

Les principales formules relatives aux angles sont

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\sin \mathcal{A} = \sqrt{\frac{P_D P_A \sigma_1}{P}} \cdot \sigma_B \sigma_C , \qquad \sin \mathcal{A}' = \sqrt{\frac{P_B P_C \sigma_1}{P}} \cdot \sigma_D \sigma_A , \\
&\sin \mathcal{A} \sin \mathcal{A}' = \frac{\sqrt{P_A P_B P_C P_D}}{P} \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D \sigma_1 , \\
&\sin \mathcal{B} \sin \mathcal{C} = \frac{\sqrt{P_B P_C \sigma_2 \sigma_3}}{P} \sigma_A^2 \sigma_B \sigma_C P_D , \\
&\cos \mathcal{A} = -\gamma_B \gamma_C + \sigma_B \sigma_C \gamma_1 , \qquad \cos \mathcal{A}' = -\gamma_D \gamma_A + \sigma_D \sigma_A \gamma_1 , \\
&\cos \mathcal{A} \cos \mathcal{A}' = \gamma_A \gamma_B \gamma_C \gamma_D + \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D \gamma_1 (\gamma_1 - Q_1) , \\
&\sin \mathcal{T} = P \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D , \\
&\sin \tau_D = \sigma_A \sigma_B \sigma_C P_D , \qquad \sin D_A = \frac{P}{\sigma_A \sqrt{P_B P_C \sigma_2 \sigma_3}} , \\
&\cos \eta_1 = \frac{\sigma_3 \Pi_3 - \sigma_2 \Pi_2}{2 \sigma_1 \sqrt{P_A P_B P_C P_D}} .
\end{aligned}
\right. \tag{III}
$$

On trouvera, en tenant compte de $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_1 \theta_2 \theta_3$, une expression symétrique simple

$$\Sigma \theta_i \cos \mathcal{J} \cos \mathcal{J}' = \gamma_A \gamma_B \gamma_C \gamma_D \, \theta_1 \theta_2 \theta_3 + \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D P . \tag{11}$$

Pour les angles η_i on a l'identité connue $\Sigma j_i \cos \eta_i = 0$ ou $\Sigma \sigma_i \cos \eta_i = 0$, résultant encore d'une autre identité intéressante; en effet, d'après (III) et (3),

$$\cos \mathcal{C} \cos \mathcal{C}' - \cos \mathcal{B} \cos \mathcal{B}' = \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D \left\{ \gamma_3 (\gamma_3 - Q_3) - \gamma_2 (\gamma_2 - Q_2) \right\}$$

$$= - \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D \frac{\sigma_3 \Pi_3 - \sigma_2 \Pi_2}{2P} = - \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D \frac{\sqrt{P_A P_B P_C P_D}}{P} \sigma_1 \cos \eta_1 ,$$

$$\cos \mathcal{C} \cos \mathcal{C}' - \cos \mathcal{B} \cos \mathcal{B}' = - \sin \mathcal{A} \sin \mathcal{A}' \cos \eta_1 . \tag{12}$$

5. Coordonnées tétraédriques. Angles de Brocard. — Rappelons, au risque d'une banalité, que la recherche des relations de position doit précéder l'établissement des formules numériques, qui les traduisent de façon fragmentaire. A l'origine de nos formules sont les relations du tétraèdre $\mathcal{T}$ avec son tétraèdre tangentiel et des systèmes desmiques de tétraèdres reposant sur un point remarquable, le *deuxième* point de LEMOINE L, et ses points associés. Nous devrions compléter nos tableaux de formules par des tableaux de coordonnées de points et autres éléments. Les relations en cause nous ont en particulier conduit à l'introduction, à côté des coordonnées tétraédriques barycentriques et normales, d'un nouveau système de coordonnées, dites *principales*, dont L est le point-unité. Les coordonnées barycentriques, normales et principales *absolues* d'un point, désignées par μ_J, d_J, ϖ_J, sont liées par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} \varpi_J = \dfrac{d_J}{\sigma_J} = \dfrac{h_J}{\sigma_J}\mu_J = \dfrac{2R \cdot 6V}{\rho_J}\mu_J , \\ \text{avec} \quad \Sigma\mu_J = \Sigma\dfrac{d_J}{h_J} = 1 , \qquad \Sigma\rho_J\varpi_J = 2R \cdot 6V = 2\mathcal{S}_s \cdot \end{array}\right. \tag{13}$$

La comparaison avec (13) donne aussi

$$\varpi_J = \frac{2RP}{P_J}\mu_J , \qquad \Sigma P_J\varpi_J = 2RP , \tag{13'}$$

donc *on passe d'un système de coordonnées barycentriques ou normales* HOMOGÈNES *à un système de coordonnées principales* HOMOGÈNES *en divisant respectivement les premières par les quantités* σ_J, *les secondes par les quantités* P_J. Aux divers systèmes de coordonnées tétraédriques se rattachent, comme on sait, les transformations dites inversions tétraédriques (barycentrique, normale, principale [1], ...). Tirons-en quelques conséquences. Les χ_J sont des coordonnées principales homogènes du centre O de la sphère $\mathcal{O}$; quels sont les points ayant pour coordonnées principales homogènes les σ_J, ou les P_J ? L'inverse tétraédrique *principal* du premier a ses coordonnées normales égales, donc est le centre I de la sphère inscrite à $\mathcal{T}$; celui du second a ses coordonnées barycentriques égales, donc est le centre de gravité G. Ce qui définit bien ces deux points I* et G*.

Je rappelle que la correspondance entre coordonnées barycentriques et principales *absolues* donne

$$\Sigma\sigma_i Q_i(\varpi_J) \equiv P\Sigma(a^2\mu_B\mu_C + a'^2\mu_D\mu_A) ;$$

[1] L'inversion principale conserve la sphère $\mathcal{O}$.

la forme polaire de cette forme quadratique est construite avec les quantités

$$Q_1(\varpi_J, \varpi'_J) = \frac{1}{2}(\varpi_B\varpi'_C + \varpi_C\varpi'_B + \varpi_D\varpi'_A + \varpi_A\varpi'_D) , \ldots, \ldots,$$

et aux coordonnées barycentriques $\nu_J = \mu_J - \mu^*_J$ d'un vecteur $\vec{v}$ correspondent les coordonnées principales (absolues)

$$\lambda_J = \frac{2\,RP}{P_J}(\varpi_J - \varpi^*_J) .$$

Ceci étant, le produit scalaire de deux vecteurs et la puissance d'un point pour la sphère $\mathcal{O}$ sont, en coordonnées principales absolues, traduits par

$$\vec{v}\cdot\vec{v}' = -\frac{1}{P}\Sigma\sigma_i Q_i(\lambda_J, \lambda'_J) , \qquad p = -\frac{1}{P}\Sigma\sigma_i Q_i(\varpi_J) , \tag{14}$$

d'où le calcul facile de nombreuses expressions métriques.

Je reviens enfin sur l'introduction des angles de Brocard, U *principal*, ψ *auxiliaire* ou *normal* (ainsi que leurs associés U_i, U_J, ψ_i, ψ_J), conduisant au cercle et à l'ellipsoïde de Brocard, à la sphère de Lemoine, aux sphères équibrocardiennes, etc. *(loc. cit.)*

$$\Sigma\chi_J = \operatorname{cotg} U , \qquad \Sigma v_J = 12\,V \operatorname{cotg}\psi . \tag{15}$$

La relation $(15)_2$ s'écrit encore, par (4),

$$\Sigma P_J = 2\,P \operatorname{cotg}\psi , \tag{15'}$$

et la comparaison des angles U et ψ, soit

$$\frac{\operatorname{cotg} U}{\operatorname{cotg}\psi} = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}} = \frac{2\,P}{S}$$

revient à $\Sigma P_J = S\,\Sigma\chi_J$, comme cela résulte de (2); je rappelle les inégalités

$$\operatorname{cotg}\psi \geqq 2 \operatorname{cotg} U , \qquad \operatorname{cotg} U \cot\psi \geqq 4 . \tag{16}$$

(Pour les angles U_i et ψ_i, on a $\operatorname{cotg} U_i/\operatorname{cotg}\psi_i = -\mathcal{R}_i/\mathcal{R}$.)

6. Tétraèdres particuliers. — J'indique brièvement les simplifications apportées dans les formules pour un tétraèdre isodynamique, ou équifacial, ou régulier (isodynamique et équifacial), ou orthocentrique.

$\mathcal{T}$ *isodynamique.* — On sait que les triangles associés Θ sont équilatéraux, ou $aa' = bb' = cc'$. On a donc

$$\left\{\begin{aligned} & J_i = \frac{\pi}{3}, \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \gamma_i = \frac{1}{2}, \quad \theta_i = \sqrt{3}, \quad \chi_i = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ & P = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad S = 4P = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{cotg}\psi = 2\operatorname{cotg} U, \\ & P_J = \frac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{cotg} U - \chi_J), \quad \Sigma P_J = \frac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{cotg} U. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

$\mathcal{T}$ *équifacial.* — Les trois égalités $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ correspondent à $A = B = C = D$ et les symétries de ce tétraèdre entraînent de nombreuses simplifications, basées sur

$$\chi_J = \sqrt{\frac{P}{2S}}, \quad \operatorname{cotg} U = \sqrt{\frac{8P}{S}}, \quad \operatorname{cotg}\psi = \theta_J,$$

$$\text{donc} \quad \psi = \frac{\pi}{2} - J \quad \left(\text{aussi} \quad \psi_i = \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\left\{\begin{aligned} & \gamma_J = \sqrt{\frac{P}{P+2S}}, \quad \sigma_J = \sqrt{\frac{2S}{P+2S}}, \quad \cos\mathcal{J} = \cos\mathcal{J}' = \frac{-P+2S\gamma_i}{P+2S}, \\ & \sin\mathcal{J} = \sin\mathcal{J}' = \sqrt{\frac{S\sigma_i}{2}\cdot\frac{2S}{P+2S}}, \\ & P_J = \sqrt{\frac{PS}{2}}, \quad \sqrt{P_A P_B P_C P_D} = \frac{PS}{2}, \\ & Q_i = 2\chi_J^2 = \frac{P}{S}, \quad \Pi_i = 2P_J^2 = PS. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

$\mathcal{T}$ *régulier.* — D'après (17) et (18), en particulier

$$\left\{\begin{aligned} & \chi_J = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{cotg} U = \sqrt{2}, \quad \operatorname{cotg}\psi = 2\sqrt{2}, \\ & \gamma_J = \frac{1}{3}, \quad \sigma_J = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos\mathcal{J} = \cos\mathcal{J}' = \frac{1}{3}, \quad \sin\mathcal{J} = \sin\mathcal{J}' = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \\ & P_J = \frac{3\sqrt{6}}{8}, \quad Q_i = \frac{1}{4}, \quad \Pi_i = \frac{27}{16}. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

$\mathscr{T}$ *orthocentrique.* — Ce tétraèdre est caractérisé par les relations équivalentes

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2 ,$$
$$\cos \eta_1 = \cos \eta_2 = \cos \eta_3 = 0 ,$$
$$\cos \mathcal{A} \cos \mathcal{A}' = \cos \mathcal{B} \cos \mathcal{B}' = \cos \mathcal{C} \cos \mathcal{C}' ,$$

comme cela résulte de (II), (III) et (12). Il s'ensuit encore l'équivalence de ces relations et de

$$\sigma_1 \Pi_1 = \sigma_2 \Pi_2 = \sigma_3 \Pi_3 \quad \text{ou} \quad \gamma_1(\gamma_1 - Q_1) = \gamma_2(\gamma_2 - Q_2) = \gamma_3(\gamma_3 - Q_3) . \tag{20}$$

On en tire facilement

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1 = \gamma_1 - \gamma_2\gamma_3 , \qquad Q_2 = \gamma_2 - \gamma_3\gamma_1 , \qquad Q_3 = \gamma_3 - \gamma_1\gamma_2 , \\ \cos \mathscr{J} \cos \mathscr{J}' = \gamma_A \gamma_B \gamma_C \gamma_D + \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D \, \gamma_1\gamma_2\gamma_3 , \\ \sigma_i \Pi_i = P\left(4 + \Sigma \chi_J^2 - \Sigma \sigma_i^2\right) = P\left(\Sigma \dfrac{1}{\sigma_J^2} - \Sigma \sigma_i^2\right) , \end{array}\right. \tag{21}$$

sans qu'il en résulte des simplifications pour l'ensemble des formules données, moins intéressantes pour les propriétés ici en jeu. Mais cet exemple même suffit à marquer la distinction des divers groupes de propriétés du tétraèdre.