VII. DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DE LA FORMULE DE STIRLING.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

VII. — Déduction géométrique de la formule de Stirling.

On connaît la déduction analytique, assez pénible, de la formule asymptotique de Stirling, d'un emploi fréquent dans le Calcul des Probabilités, formule qui s'écrit sous forme logarithmique:

$$\log \text{nép}\, n! = n \log \text{nép}\, n - n + \frac{1}{2} \log \text{nép}\, 2\pi + \frac{1}{2} \log \text{nép}\, n .$$

Mais, dans beaucoup d'applications, surtout dans la Mécanique statistique, on emploie la formule, moins approchée mais plus simple,

$$\log \text{nép}\, n! = n \log \text{nép}\, n - n . \tag{1}$$

Un physicien autrichien bien connu, M. Arthur Haas, donne une démonstration géométrique très intéressante de cette formule raccourcie dans son *Einführung in die theoretische Physik*. Je crois avoir amélioré et précisé la démonstration de M. Haas, dans l'article *Mecánica Estadística* que j'ai écrit pour la *Enciclopedia Universal Ilustrada* ou *Enciclopedia Espasa*, qui est la meilleure encyclopédie parue en espagnol, et peut-être la plus complète et la plus monumentale du monde. Je prends la liberté d'insérer ici un extrait de cette démonstration.

Sur l'axe des abscisses d'un système cartésien (fig. 6), prenons les points dont les abscisses sont les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ..., n et construisons un ensemble de rectangles de base 1 et dont les hauteurs soient égales aux logarithmes népériens des nombres naturels. Nous aurons ainsi le rectangle $b2$ dont la hauteur est log nép $1 = 0$; le rectangle $2cd3$ dont la hauteur est log nép 2; le rectangle $3ef4$ dont la hauteur est log nép 3; et ainsi de suite jusqu'au rectangle dont la hauteur est log nép n. Ces rectangles ayant leur base égale à 1, leurs aires s'expriment par les mêmes nombres que leurs hauteurs, soit par les logarithmes népériens des nombres naturels, de sorte que l'aire de la figure *b2cdefghijkmopqrsnb* formé par l'ensemble des n premiers rectangles aura pour expression

$$\log \text{nép}\, 1 + \log \text{nép}\, 2 + \log \text{nép}\, 3 + \ldots + \\ + \log \text{nép}\, n = \log \text{nép}\, 1.2.3.4 \ldots n = \log \text{nép}\, n\,! \,.$$

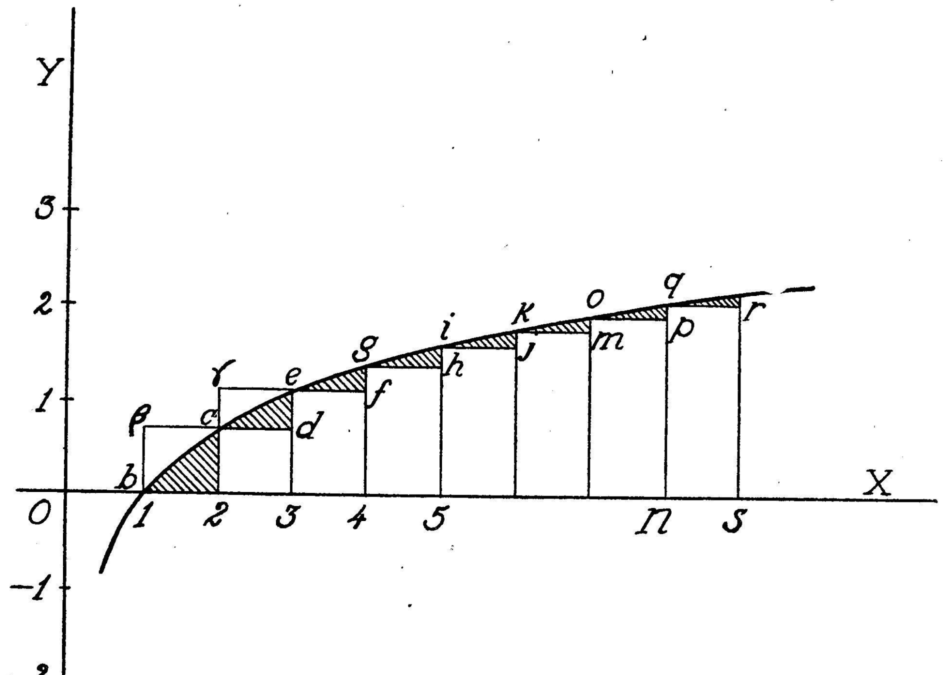

Fig 6

Mais remarquons que la courbe

$$y = \log \text{nép}\, x \,, \qquad (2)$$

qui passe par les sommets supérieurs gauches des rectangles enferme une aire

$$A = \int_1^n \log \text{nép}\, x\, dx \qquad (3)$$

égale à la somme des aires des rectangles, plus la somme τ des aires des triangles hachurés *bc*2, *ced*, *egf*, *gih*, ... Ainsi,

$$\log \text{nép}\, n\,! = \log \text{nép}\, n - \tau + \int_1^n \log \text{nép}\, x\, dx \,, \qquad (4)$$

où figure le terme log nép n, valeur de l'aire du rectangle *nqrs*, car celui-ci est compris dans l'ensemble des rectangles, tandis que l'intégrale s'étend seulement jusqu'à l'ordonnée qn. Or, remarquons que si nous menons des parallèles aux côtés des triangles hachurés pour former des rectangles, comme on l'a fait en $b\beta c$ et en $c\gamma e$, chaque triangle hachuré sera un peu plus grand que la moitié de son rectangle correspondant, par la concavité de la courbe. D'autre part, il est aisé à voir que la somme des rectangles tels que $b\beta c2$, $c\gamma ed$, ... (les autres n'apparaissent pas dans la figure, pour ne pas la surcharger de lignes), est égale à l'aire du rectangle $nqrs$ ou à log nép n; c'est ainsi que nous commettrons une petite erreur en remplaçant dans l'équation (4) τ par 1/2 log nép n, avec lequel nous aurons la formule approchée

$$\log \text{nép}\, n\,! = \frac{1}{2} \log \text{nép}\, n + \int_1^n \log \text{nép}\, x\, dx\ . \qquad (5)$$

En effectuant l'intégration, nous aurons

$$\log \text{nép}\, n\,! = \frac{1}{2} \log \text{nép}\, n + n \log \text{nép}\, n - n + 1\ . \qquad (6)$$

Si dans cette formule nous négligeons l'unité à l'égard de n, et $\frac{1}{2}$ log nép n à l'égard de n log nép n, nous obtiendrons finalement la formule (1) qu'il fallait établir.