

# SUR QUELQUES APPELS A L'INTUITION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Autor(en): **de Losada y Puga, Cristóbal**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28587>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR QUELQUES APPELS  
A L'INTUITION GÉOMÉTRIQUE  
DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

PAR

Cristóbal de LOSADA Y PUGA (Lima, Pérou).

---

Même les plus rigoristes des arithmétisants, qui n'accordent à l'intuition aucun droit comme élément de démonstration, et qui se méfient d'elle, seront prêts, je crois, à l'accepter au moins comme un élément auxiliaire d'explication, particulièrement saisissable et clair.

Je me propose d'exposer ici quelques ressources de ce genre que j'emploie volontiers dans mes cours de la Universidad Mayor de San Marcos de Lima (qui est l'Université d'Etat, la plus vieille de tout le continent américain), et de la Universidad Católica del Perú (qui est, au contraire, une des Universités les plus jeunes du monde).

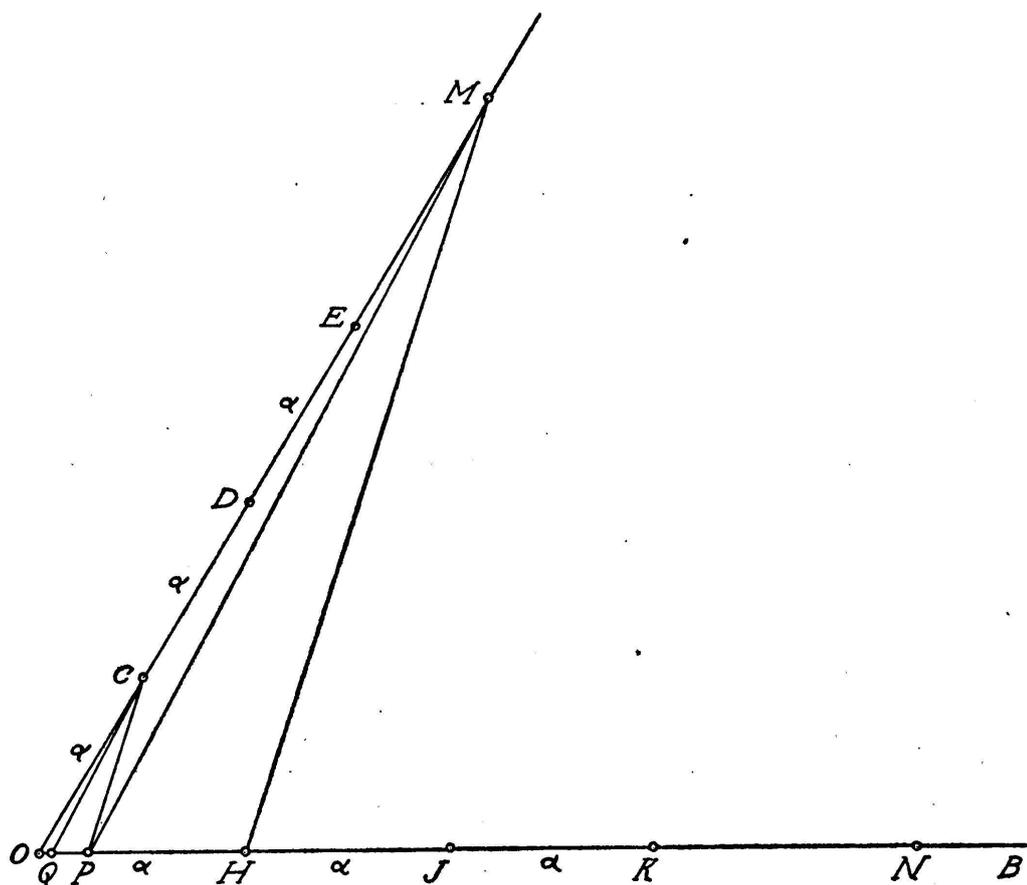
I. — INFINIMENT PETITS DES DIVERS ORDRES.

Quoique les infiniments petits soient un peu en disgrâce, je crois qu'ils rendent encore de bons services, peut-être faute de mieux, surtout dans l'enseignement. Aux exemples classiques, je désire ajouter le suivant :

Soit l'angle AOB (fig. 1). Prenons sur ses côtés les longueurs OM et ON égales à l'unité, et divisons-les en  $m$  parties égales  $\alpha = \frac{1}{m}$  par les points C, D, E, ...; H, J, K, ... Si nous faisons croître  $m$  indéfiniment, la longueur  $\alpha$  de chaque partie deviendra un infi-

niment petit (du premier ordre). Menons la droite MH qui passe par M et par le premier point de division H de ON. Tirons par C, premier point de division de OM, la parallèle CP à MH; nous aurons

$$\frac{OP}{OC} = \frac{OH}{OM},$$



*Fig 1*

d'où

$$OP = \frac{OC \cdot OH}{OM} = \frac{\alpha \cdot \alpha}{1} = \alpha^2,$$

c'est-à-dire un infiniment petit du second ordre.

Joignons P avec M par la droite MP et menons, par C, la parallèle CQ à MP; nous aurons

$$\frac{OQ}{OC} = \frac{OP}{OM},$$

d'où

$$OQ = \frac{OC \cdot OP}{OM} = \frac{\alpha \cdot \alpha^2}{1} = \alpha^3,$$

c'est-à-dire un infiniment petit du troisième ordre.

Nous pouvons tirer la droite MQ, mener la parallèle par C à cette droite et obtenir un infiniment petit du quatrième ordre, et ainsi de suite.

II. — RELATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LE TRIANGLE.

Soit le triangle ABC (fig. 2), dans lequel

$$b = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)}.$$

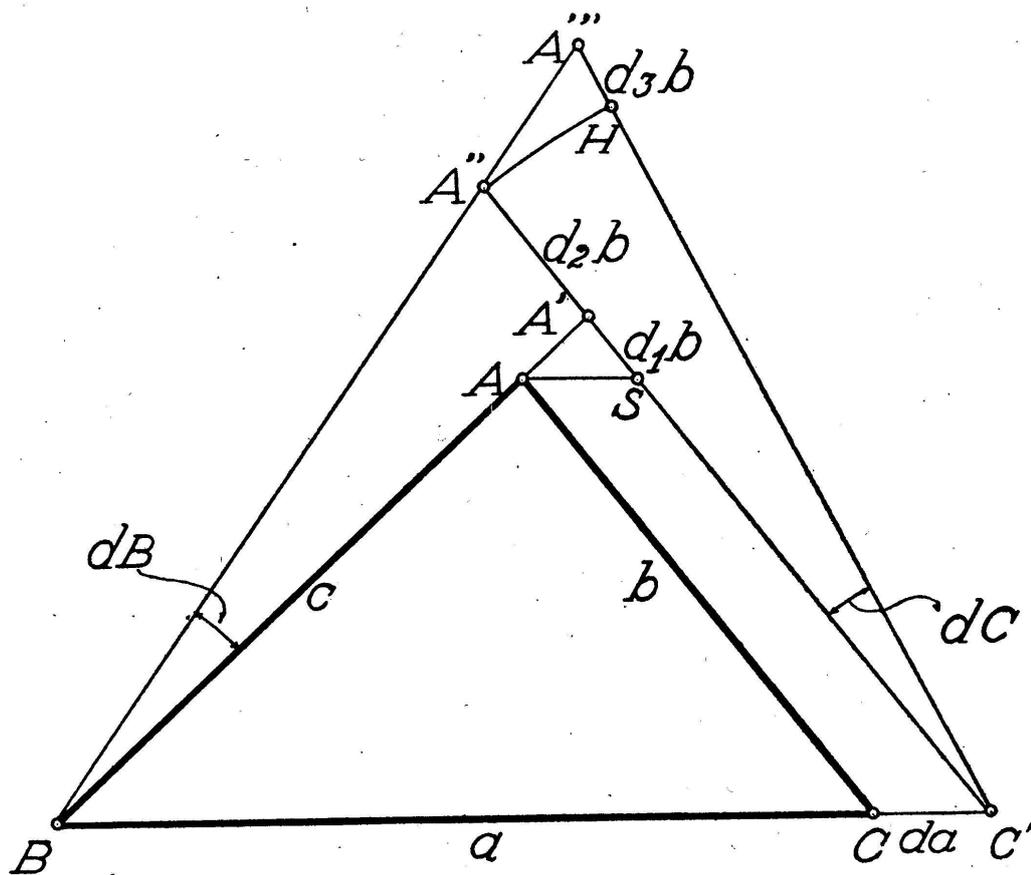


Fig 2

Si on donne aux éléments supposés connus de petites variations  $da, dB, dC$  que nous supposerons positives (c'est-à-dire qui font

augmenter la valeur de ces éléments), l'élément inconnu  $b$  recevra aussi une petite variation et au lieu de la longueur  $CA$ , nous obtiendrons la longueur  $C'A''$ , dont l'excès sur  $CA$  sera donné par la formule

$$\begin{aligned} db &= da \frac{\sin B}{\sin(B+C)} + a \frac{\sin(B+C) \cos B - \sin B \cdot \cos(B+C)}{\sin^2(B+C)} dB \\ &\quad - a \frac{\sin B \cdot \cos(B+C)}{\sin^2(B+C)} dC = \\ &= da \frac{\sin B}{\sin(B+C)} + a \frac{\sin C}{\sin^2(B+C)} dB - a \frac{\sin B \cdot \cos(B+C)}{\sin^2(B+C)} dC, \end{aligned}$$

qui s'obtient par différentiation de l'équation (1), et qui peut être retrouvée géométriquement comme nous allons le voir.

La petite variation  $da$  ou  $CC'$  subie par la longueur du côté  $a$ , change le triangle  $ABC$  en  $A'BC'$ . Menons par  $A$  la parallèle  $AS$  à  $BC$ , et nous aurons  $SC' = AC$ , de sorte que  $A'S = d_1 b$  est l'excès de  $AC'$  sur  $AC$ . Mais le triangle  $A'S$ , semblable au triangle  $ABC$ , nous donne

$$d_1 b = da \frac{\sin B}{\sin(B+C)}.$$

La petite variation  $dB$  dans la valeur de l'angle  $B$  change le triangle, transformé déjà en  $A'BC'$  par la petite variation de la longueur de la base, en  $A''BC'$ , ce qui ajoute à la longueur de  $b = A'C$  le petit accroissement  $A''A' = d_2 b$ . Le triangle  $A''A'B$  nous donne

$$\frac{A''A'}{dB} = \frac{A'B}{\sin BA''C'} = \frac{A'B}{\sin(B+C)}, \quad (2)$$

parce que

$$BA''C' = \pi - B - dB - C,$$

où nous pouvons négliger le terme  $dB$ .

De même, le triangle  $A'BC'$  nous donne, en négligeant les infiniment petits,

$$\frac{A'B}{\sin C} = \frac{a}{\sin(B+C)}. \quad (3)$$

En multipliant membre à membre les équations (2) et (3), et en supprimant le facteur  $A'B$  dans les deux membres, on obtient

$$d_2 b = A''A' = a \frac{\sin C}{\sin^2 (B + C)} dB .$$

Si maintenant nous considérons la petite variation  $dC$  qui modifie la valeur de l'angle  $C$ , le triangle  $ABC$ , premièrement changé en  $A'BC'$  par la variation  $da$ , et après en  $A''BC'$  par la variation  $dB$ , sera finalement changé en  $A'''BC'$ . Calculons l'excès  $d_3 b$  de la valeur finale,  $A'''C'$ , du côté  $b$  sur sa deuxième valeur intermédiaire  $A''C'$ . Du point  $C'$  comme centre, avec  $A''C'$  comme rayon, décrivons l'arc de circonférence  $A''H$ , dont la longueur est, à d'infiniment petits près,

$$A''H = b \cdot dC = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)} dC .$$

Mais, l'arc  $A''H$  étant infiniment petit, le triangle  $A'''A''H$  peut être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en  $H$ , et on aura, à d'infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$d_3 b = A'''H = A''H \cotang A''A'''H = - a \frac{\sin B \cdot \cos (B + C)}{\sin^2 (B + C)} dC ,$$

car on a

$$\cotang A''A'''H = - \cotang (B + dB + C + dC) .$$

La somme des trois valeurs  $d_1 b$ ,  $d_2 b$ ,  $d_3 b$ , nous donne finalement l'expression cherchée de  $db$ .

### III. — DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Il s'agit de faire voir par des considérations géométriques (ceci étant déjà démontré analytiquement), que dans le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Soit une fonction de deux variables

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

et A un point quelconque de la surface représentative de cette fonction, dont l'ordonnée  $z$  est AP (fig. 3). Si nous donnons à  $x$  un accroissement  $dx = PQ$ , nous aurons un nouveau point B de la surface et une nouvelle ordonnée BQ. Or, BB', différence des deux ordonnées, provenant d'avoir donné un accroissement à  $x$  seulement, sera

$$BB' = z' - z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z . \quad (2)$$

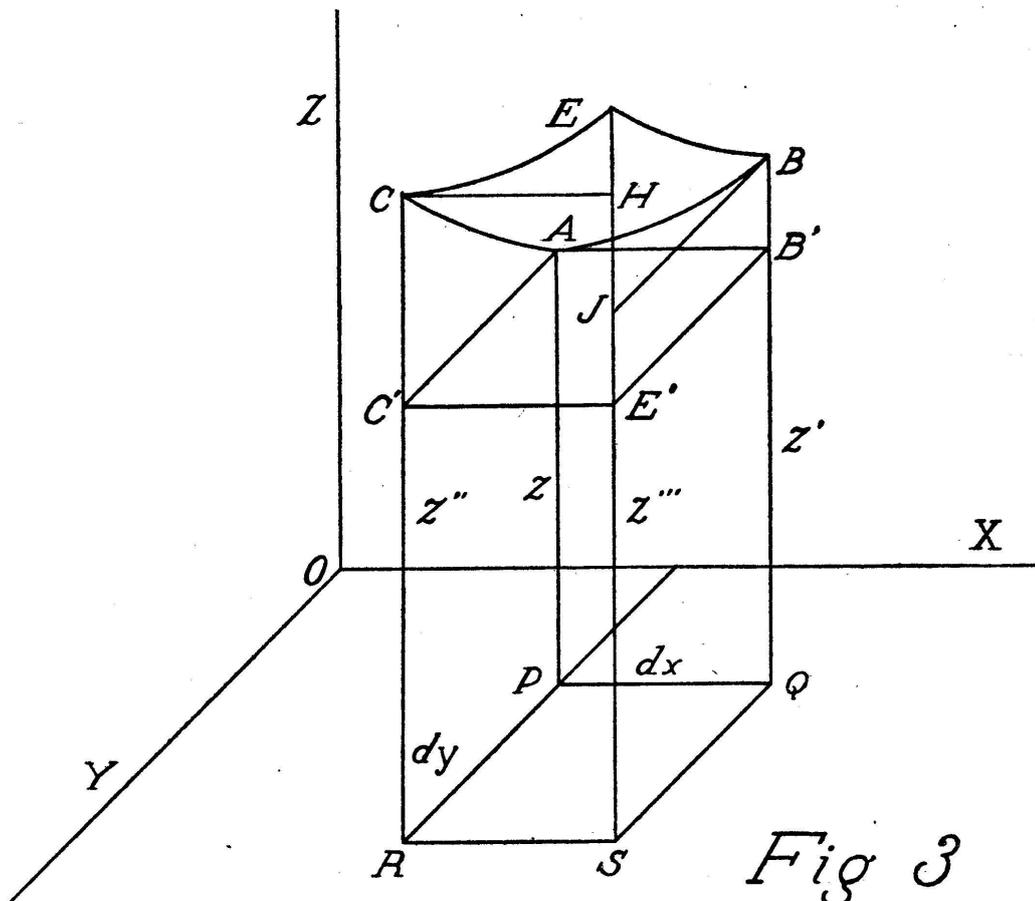


Fig 3

Partons encore une fois du point P, donnons seulement à  $y$  un accroissement infiniment petit  $dy = PR$ , et nous aurons un nouveau point C de la surface, auquel correspondra une ordonnée  $z'' = CR$ . La différence des ordonnées  $z$  et  $z''$  sera de manière analogue

$$CC' = z'' - z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z . \quad (3)$$

Finalement, à partir du point R ( $x, y + dy$ ), donnons à  $x$  un accroissement  $dx$ ; nous obtiendrons ainsi un nouveau point E

de la surface, avec une ordonnée  $ES = z'''$ . Comparons  $z'''$  avec  $z'$  et avec  $z''$ :

$$EJ = ES - BQ = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z . \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) montrent que  $CC'$  et  $EJ$  sont deux valeurs consécutives de  $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ , correspondantes à des valeurs de  $x$  qui diffèrent entre elles de  $dx$ ; donc leur différence sera:

$$EJ - CC' = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy dx = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx . \quad (5)$$

De même,

$$EH = ES - CR = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z . \quad (6)$$

Les équations (2) et (6) font voir que  $BB'$  et  $EH$  sont deux valeurs consécutives de  $\frac{\partial z}{\partial x} dx$  correspondantes à des valeurs de  $y$  qui diffèrent de  $dy$ ; ainsi leur différence sera

$$EH - BB' = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy . \quad (7)$$

Donc, l'ordre des différentiations successives sera indifférent si

$$EJ - CC' = EH - BB' ,$$

égalité qui devient une identité évidente si nous y remplaçons  $EJ$  par son égal  $EE' - BB'$ , et  $EH$  par son égal  $EE' - CC'$ .

#### IV. — EXPLICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉTHODE D'INTÉGRATION PAR PARTIES.

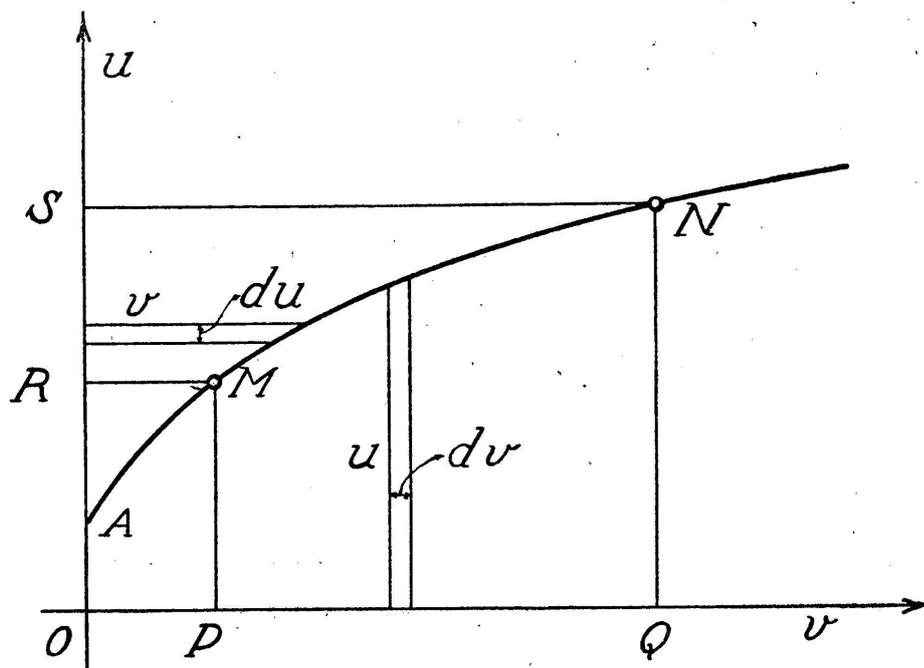
Il s'agit de la formule classique

$$\int_M^N u dv = (uv)_M^N - \int_M^N v du . \quad (1)$$

Considérons une fonction de deux variables

$$f(u, v) = 0 \quad (2)$$

qui peut être représentée graphiquement par une courbe telle que AB (fig. 4). Soient deux points,  $M(u_0, v_0)$  et  $N(u_1, v_1)$ , sur cette courbe. Nous voulons calculer l'aire comprise entre la portion MN de la courbe, les ordonnées MP et NQ correspondantes aux points extrêmes et la portion PQ de l'axe des abscisses.



*Fig 4*

dantes aux points extrêmes et la portion PQ de l'axe des abscisses. Pour cela, il faut résoudre l'équation (2) par rapport à  $u$ , exprimant sa valeur en fonction de  $v$ , et trouver la valeur de l'intégrale

$$\int u dv$$

entre les limites M et N. Mais il y a des cas dans lesquels il n'est pas facile de réaliser cette intégration, et en revanche il serait facile d'intégrer l'expression

$$\int v du,$$

où il faudra exprimer  $v$  en fonction de  $u$ , en tirant sa valeur de l'équation (2). Dans ces cas, il ne sera pas facile de calculer l'aire MNPQ, qui est

$$\text{aire MNPQ} = \int_M^N u dv$$

(intégrale que nous supposons difficile) mais il sera aisé de trouver l'aire MNRS, parce que

$$\text{aire MNRS} = \int_M^N v du$$

(intégrale que nous supposons facile).

D'autre part, les aires des rectangles SNOQ et RMOP se déterminent facilement: elles sont égales respectivement à  $u_0 v_0$  et à  $u_1 v_1$ .

Or, connaissant les aires SNOQ, RMOP et MNRS, nous pouvons en déduire l'aire MNPQ, car

$$\text{aire MNPQ} = \text{aire SNOQ} - \text{aire RMOP} - \text{aire MNRS}$$

c'est-à-dire

$$\int_M^N u dv = u_1 v_1 - u_0 v_0 - \int_M^N v du ,$$

qui est précisément la formule (1).

## V. — SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA CONSTANTE D'EULER.

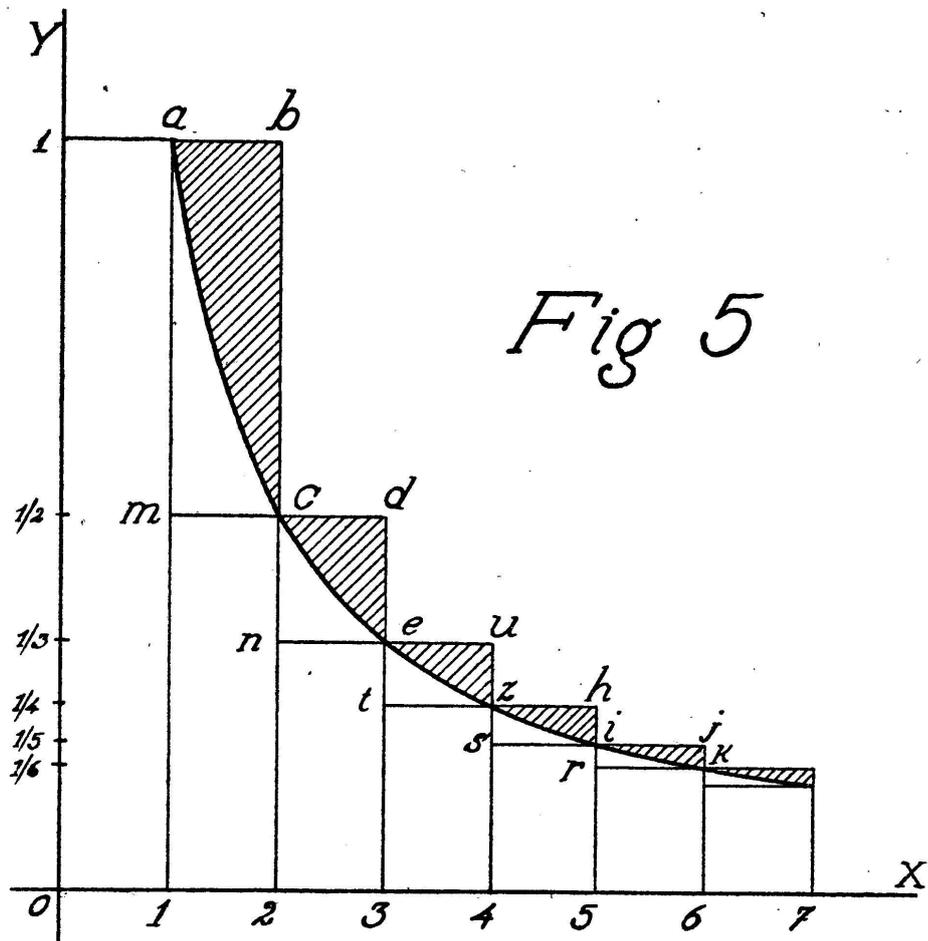
La constante d'Euler,

$$C = \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \log \text{ nép } n \right]_{n \rightarrow \infty}$$

qui établit une relation simple entre  $\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$  et  $\log \text{ nép } n$  quand  $n \rightarrow \infty$ , a sa raison d'être dans cette circonstance que le terme général de la série est  $1/m$  tandis que la dérivée de  $\log \text{ nép } x$  est  $1/x$ . Construisons, comme le montre la figure 5, une succession de rectangles de base égale à l'unité, et de hauteurs égales à  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ . Ces rectangles seront compris entre les ordonnées successives tirées par les points d'abscisses égales à 1, 2, 3,

4, ... L'ensemble de ces rectangles formera la figure *abcdeuzhijk...* et son aire aura pour valeur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$$



Pour plus de commodité, on a pris dans la figure l'échelle des abscisses beaucoup moindre que celle des ordonnées, de manière que l'unité d'aire soit la surface du rectangle *1ab2*. Construisons aussi l'hyperbole équilatère

$$y = \frac{1}{x} .$$

Cette hyperbole enferme, avec l'axe des abscisses et deux ordonnées extrêmes correspondantes aux abscisses 1 et *n*, une aire

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \log \text{ nép } n .$$

Si nous considérons que tant les rectangles définis ci-dessus que l'hyperbole équilatère se prolongent indéfiniment vers les abscisses croissantes, nous verrons que l'aire de la partie hachurée de la figure est

$$\lim_{n \leftarrow \infty} \left[ \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} - \log \text{nép } n \right] = C .$$

La constante d'Euler est égale, donc, à la somme des aires des triangles mixtilignes (employons encore cet adjectif démodé) *abc, cde, euz, zhi, ...*: telle est sa signification géométrique extrêmement simple.

Considérons maintenant l'ensemble des triangles non hachurés qui restent au-dessous de l'hyperbole: les triangles *amc, cne, etz, zsi, ...* et appelons  $C'$  la somme de ses aires. Nous aurons

$$C' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_1^n \frac{dx}{x} - \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m+1} \right] .$$

La somme de ces grandeurs, qui est l'aire de l'ensemble des rectangles *abmc, cdne, eutz, zhsi, ...* sera

$$C + C' = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[ \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right] = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} .$$

Leur différence, soit la somme des aires des triangles hachurés moins les aires des triangles non hachurés, vaudra:

$$\begin{aligned} C - C' &= \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[ \frac{1}{m} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} + \frac{1}{m+1} \right] = \\ &= -1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[ 2 \cdot \frac{1}{m} - 2 \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \right] = -1 + 2C . \end{aligned}$$

En conséquence,

$$C' = 1 - C \quad \text{et} \quad C + C' = 1$$

et, en comparant avec l'équation (1), on voit que

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 1 .$$

On vérifie immédiatement sur la figure l'exactitude de la formule (2), parce que la somme des rectangles  $abmc$ ,  $cdne$ ,  $eutz$ , ... est équivalente au rectangle  $1ab2$ .

Faisons encore une remarque. L'hyperbole équilatère divise chacun des rectangles  $abmc$ ,  $cdne$ ,  $eutz$ , ... en deux parties qui, en raison de la convexité de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, sont inégales. La partie qui reste au-dessous de la courbe (triangles non hachurés) est moindre que celle qui reste au-dessus (triangles hachurés). Et ainsi, la constante d'Euler est plus grande que  $\frac{1}{2}$  ( $C = 0.57721\dots$ ) tandis que la constante  $C'$  est moindre que  $\frac{1}{2}$  ( $C' = 0.42278\dots$ ).

Mais les rectangles seront divisés par leurs diagonales  $ac$ ,  $ce$ ,  $ez$ , ... en deux triangles égaux, dont les sommes vaudront  $\frac{1}{2}$ . En conséquence, entre l'hyperbole équilatère et ces diagonales, qui sont des cordes de la courbe, seront compris un ensemble de segments ou lunules, dont les aires auront pour somme  $C - \frac{1}{2}$ , soit  $0.07721\dots$ . En calculant analytiquement la somme des aires de ces segments ou lunules, on obtient identiquement  $C - \frac{1}{2}$ : leur considération ne présente, donc, aucune utilité pour le calcul de  $C$ .

## VI. — SÉRIE DOUBLE DONT LA SOMME EST ÉGALE A LA CONSTANTE D'EULER.

A propos de la constante d'Euler, je vais mentionner une série double dont la somme est égale à la valeur de la constante; quoique ce sujet ne représente pas « un appel à l'intuition géométrique », je crois qu'il n'est pas trop déplacé ici.

Posons le développement de  $\log \text{nép } n$  en série de Taylor à partir du développement de  $\log \text{nép } (n - 1)$

$$\log \text{nép } n = \log \text{nép } (n - 1) + \\ + \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{2(n - 1)^2} + \frac{1}{3(n - 1)^3} - \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s(n - 1)^s}.$$

Cette formule générale nous donne successivement :

$$\log \text{ nép } 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\log \text{ nép } 3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

$$\log \text{ nép } 4 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \dots$$

.....

Nous pouvons exprimer ainsi  $\log \text{ nép } n$  par la somme de  $n - 1$  séries, dont la première est convergente et les  $n - 2$  autres sont absolument convergentes. Nous aurons, donc, l'expression générale

$$\log \text{ nép } k = \sum_{n=1}^{n=k-1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m \cdot n^m}.$$

Si nous faisons tendre  $n$  vers l'infini, cette somme de séries devient une série double que nous appellerons  $\Delta$ .

$$\Delta = \frac{1}{1 \cdot 1^1} - \frac{1}{2 \cdot 1^2} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} - \frac{1}{4 \cdot 1^4} + \frac{1}{5 \cdot 1^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2^1} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 3^1} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 4^1} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 5^1} - \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} - \frac{1}{4 \cdot 5^4} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots$$

+ ...

Mais cette série double n'est pas convergente, car si nous faisons la somme par colonnes, nous aurons

$$\Delta = \sum \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{m^3} - \frac{1}{4} \sum \frac{1}{m^4} + \dots$$

La première de ces sommes correspond à une série divergente et les autres à des séries convergentes; donc, la série double est divergente, ce qu'on pouvait attendre, car

$$\log \text{nép } n \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty .$$

Mais si nous formons la différence  $\sum \frac{1}{m} - \Delta$  nous aurons

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} - \log \text{nép } n \right]_{n \rightarrow \infty} = \\ & = C = \frac{1}{2 \cdot 1^2} - \frac{1}{3 \cdot 1^3} + \frac{1}{4 \cdot 1^4} - \frac{1}{5 \cdot 1^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} - \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{4 \cdot 4^4} - \frac{1}{5 \cdot 4^5} + \dots \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

Nous avons ainsi la constante d'Euler et de Mascheroni exprimée par une série double

$$C = \sum_{p=2}^{p=\infty} \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{(-1)^p}{p \cdot q^p} .$$

Les séries obtenues en sommant par colonnes sont convergentes, et leur sommes, dont la valeur diminue progressivement, sont alternativement positives et négatives; la série double est donc convergente.

## VII. — DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DE LA FORMULE DE STIRLING.

On connaît la déduction analytique, assez pénible, de la formule asymptotique de Stirling, d'un emploi fréquent dans le Calcul des Probabilités, formule qui s'écrit sous forme logarithmique :

$$\log \text{ nép } n! = n \log \text{ nép } n - n + \frac{1}{2} \log \text{ nép } 2\pi + \frac{1}{2} \log \text{ nép } n .$$

Mais, dans beaucoup d'applications, surtout dans la Mécanique statistique, on emploie la formule, moins approchée mais plus simple,

$$\log \text{ nép } n! = n \log \text{ nép } n - n . \quad (1)$$

Un physicien autrichien bien connu, M. Arthur HAAS, donne une démonstration géométrique très intéressante de cette formule raccourcie dans son *Einführung in die theoretische Physik*. Je crois avoir amélioré et précisé la démonstration de M. Haas, dans l'article *Mecánica Estadística* que j'ai écrit pour la *Enciclopedia Universal Ilustrada* ou *Enciclopedia Espasa*, qui est la meilleure encyclopédie parue en espagnol, et peut-être la plus complète et la plus monumentale du monde. Je prends la liberté d'insérer ici un extrait de cette démonstration.

Sur l'axe des abscisses d'un système cartésien (fig. 6), prenons les points dont les abscisses sont les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ...,  $n$  et construisons un ensemble de rectangles de base 1 et dont les hauteurs soient égales aux logarithmes népériens des nombres naturels. Nous aurons ainsi le rectangle  $ab$  dont la hauteur est  $\log \text{ nép } 1 = 0$ ; le rectangle  $2cd3$  dont la hauteur est  $\log \text{ nép } 2$ ; le rectangle  $3ef4$  dont la hauteur est  $\log \text{ nép } 3$ ; et ainsi de suite jusqu'au rectangle dont la hauteur est  $\log \text{ nép } n$ . Ces rectangles ayant leur base égale à 1, leurs aires s'expriment par les mêmes nombres que leurs hauteurs, soit par les logarithmes népériens des nombres naturels, de sorte

que l'aire de la figure  $b2cdefghijkmopqrsnb$  formé par l'ensemble des  $n$  premiers rectangles aura pour expression

$$\begin{aligned} & \log \text{ nép } 1 + \log \text{ nép } 2 + \log \text{ nép } 3 + \dots + \\ & + \log \text{ nép } n = \log \text{ nép } 1.2.3.4 \dots n = \log \text{ nép } n! . \end{aligned}$$

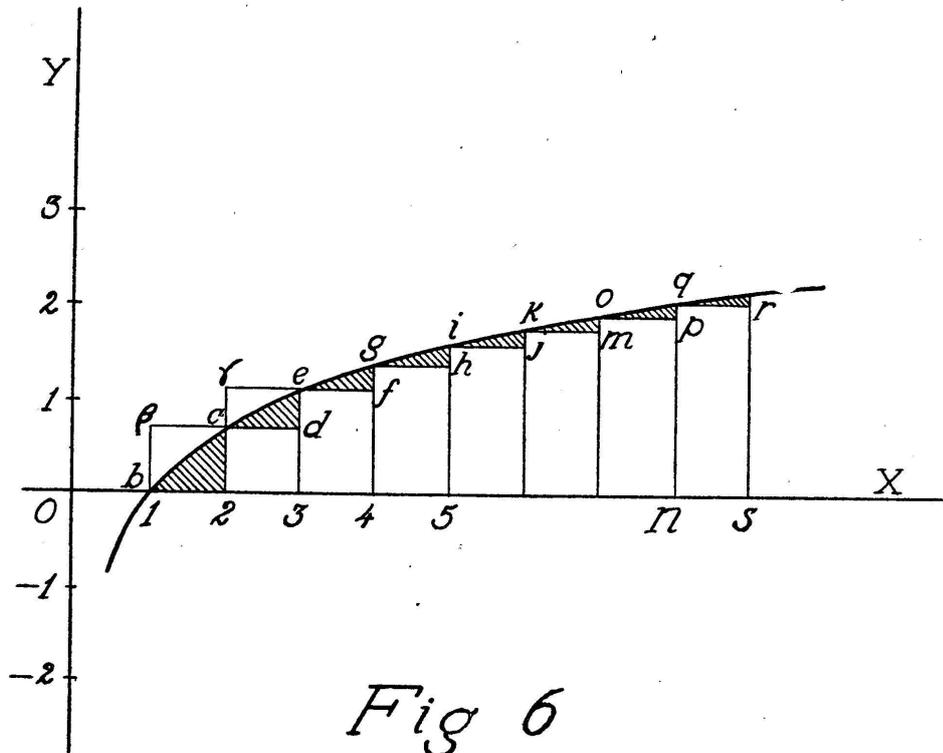


Fig 6

Mais remarquons que la courbe

$$y = \log \text{ nép } x , \quad (2)$$

qui passe par les sommets supérieurs gauches des rectangles enferme une aire

$$A = \int_1^n \log \text{ nép } x \, dx \quad (3)$$

égale à la somme des aires des rectangles, plus la somme  $\tau$  des aires des triangles hachurés  $bc2$ ,  $ced$ ,  $egf$ ,  $gih$ , ... Ainsi,

$$\log \text{ nép } n! = \log \text{ nép } n - \tau + \int_1^n \log \text{ nép } x \, dx , \quad (4)$$

où figure le terme  $\log \text{ nép } n$ , valeur de l'aire du rectangle  $nqrs$ , car celui-ci est compris dans l'ensemble des rectangles, tandis

que l'intégrale s'étend seulement jusqu'à l'ordonnée  $qn$ . Or, remarquons que si nous menons des parallèles aux côtés des triangles hachurés pour former des rectangles, comme on l'a fait en  $b\beta c$  et en  $c\gamma e$ , chaque triangle hachuré sera un peu plus grand que la moitié de son rectangle correspondant, par la concavité de la courbe. D'autre part, il est aisé à voir que la somme des rectangles tels que  $b\beta c2$ ,  $c\gamma ed$ , ... (les autres n'apparaissent pas dans la figure, pour ne pas la surcharger de lignes), est égale à l'aire du rectangle  $nqrs$  ou à  $\log \text{ nép } n$ ; c'est ainsi que nous commettrons une petite erreur en remplaçant dans l'équation (4)  $\tau$  par  $1/2 \log \text{ nép } n$ , avec lequel nous aurons la formule approchée

$$\log \text{ nép } n! = \frac{1}{2} \log \text{ nép } n + \int_1^n \log \text{ nép } x \, dx . \quad (5)$$

En effectuant l'intégration, nous aurons

$$\log \text{ nép } n! = \frac{1}{2} \log \text{ nép } n + n \log \text{ nép } n - n + 1 . \quad (6)$$

Si dans cette formule nous négligeons l'unité à l'égard de  $n$ , et  $\frac{1}{2} \log \text{ nép } n$  à l'égard de  $n \log \text{ nép } n$ , nous obtiendrons finalement la formule (1) qu'il fallait établir.

---