3. — Enoncé du problème; conditions d'existence DU LIEU.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. — Enoncé du problème; conditions d'existence du lieu.

Etant données une circonférence γ, une droite d, une constante non nulle k, étudions *le lieu* $\mathcal{C}$ *des points* M *tels que l'on ait:*

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k\,\overline{Md}^2 . \qquad (7)$$

La famille des courbes $\mathcal{C}$ contient les coniques.

Si ce lieu existe, il admettra pour axe de symétrie la perpendiculaire ωx abaissée du centre ω de γ sur d.

Soit Λ une droite faisant l'angle φ avec ωx et rencontrant d au point K; pour M sur Λ, Md, c'est-à-dire la longueur de $\overline{Md}$, égale MK cos φ, donc les points d'intersection de Λ et de $\mathcal{C}$ sont ceux où Λ coupe la courbe définie par la relation

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k\cos^2\varphi\,\overline{MK}^2 . \qquad (8)$$

Cette courbe est un cercle Z du faisceau γ, K, ou exceptionnellement l'axe de ce faisceau.

Les points cherchés existeront si cette circonférence auxiliaire Z existe et coupe Λ. Pour le cas où Λ passe par ω l'existence de Z est seule en question.

Or, d'après (6), elle existe sauf si l'on a:

$$k(r^2\cos^2\varphi - \overline{\omega d}^2) > r^2 ,$$

r étant le rayon de γ.

Quant à $\mathcal{C}$, elle existera sauf si l'inégalité précédente était vérifiée quel que soit φ. Or, la parenthèse devenant négative pour φ assez voisin de $\frac{\pi}{2}$ il faudrait $k < 0$ et ceci exigerait alors que la parenthèse soit toujours négative, d'où

$$\omega d = \text{longueur de } \overline{\omega d} > r .$$

Enfin, comme la plus petite valeur du premier membre est atteinte pour $\varphi = 0$, *le lieu* $\mathcal{C}$ *existe sauf si l'on a à la fois:*

$$\omega d > r \qquad k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 < 0 . \qquad (9)$$

Pour $\omega d = r$ la seconde inégalité ne peut être vérifiée; pour $\omega d > r$ et $k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 = 0$, $\mathcal{C}$ se réduirait à un point, au pôle H de d par rapport à γ. Il était donc légitime d'écarter comme nous l'avons fait le cas où les inégalités se transformeraient en égalités.

4. — Construction par points et par tangentes.

Pour construire $\mathcal{C}$ on prendra une droite Λ que l'on fera varier continûment. Choisissons $\varphi = 0$, donc prenons une droite D parallèle à ωx et dont nous ferons varier le pied H sur d. La relation (8) devient:

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k\,\overline{MH}^2 . \qquad (10)$$

Pour $k = 1$, cette relation définit une droite Γ, d'où un point M sur D. Ainsi, *pour* k = 1, $\mathcal{C}$ *admet un point et un seul sur toute droite* D *parallèle à* ωx; nous dirons que $\mathcal{C}$ est *parabolique.*

Pour $k \neq 1$, la relation (10) définit une circonférence Γ dont le centre est le point Ω de Hω tel que

$$\frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{\Omega H}} = k . \qquad (11)$$

Donc, quand H varie sur d, Ω décrit la perpendiculaire Oy à Oωx qui est l'homothétique de d par rapport à ω et dans le rapport

$$\frac{\overline{\omega\Omega}}{\overline{\omega H}} = \frac{-k}{1-k} . \qquad (12)$$

Les deux points M et M′ de $\mathcal{C}$ situés sur D sont, quand ils existent, symétriques l'un de l'autre par rapport à Oy; ainsi, *pour* k $\neq$ 1, *la courbe* $\mathcal{C}$ *a un centre* O *et deux axes de symétrie rectangulaires* Oωx, Oy.

Reprenons une droite Λ quelconque; ses points de rencontre avec $\mathcal{C}$ sont sur la circonférence Z définie par (8). Mais tous les points communs à $\mathcal{C}$ et à Z, vérifiant (7) et (8), sont tels que