

## 2. — Rappel de propriétés des faisceaux de CIRCONFÉRENCES.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tions et les rapprochements d'autant que, dans la question actuelle, le rôle mystérieux des foyers n'a été compris des mathématiciens eux-mêmes que lorsque le raisonnement de Dandelin, la définition de Plücker ont fait des foyers des cercles focaux particuliers.

Deux articles, l'un de M. Ch. BIOCHE, l'autre de M. H. MIRABEL, destinés à de jeunes élèves (*Les Sciences au Baccalauréat*, oct. 1937 — Paris, A. Hattier) montrent bien comment des maîtres avertis peuvent utiliser élémentairement la théorie des cercles focaux. Ces articles m'ont donné l'idée de présenter sous une forme moins concise et plus accessible une Note que j'avais publiée jadis (*Nouv. Ann. de Math.*; juin 1923); l'exposé qui en résulte est d'ailleurs en étroite parenté avec ceux constitués par les exercices cités ou avec la Note de M. Bioche.

## 2. — RAPPEL DE PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX DE CIRCONFÉRENCES.

L'étude de l'axe radical  $\Delta$  de deux circonférences  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  de centres  $\Omega$  et  $\Omega_1$  conduit à la relation

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) - \mathcal{P}(M, \Gamma_1) + 2\overline{\Omega\Omega_1} \cdot \overline{M\Delta} = 0, \quad (1)$$

dans laquelle le symbole  $\mathcal{P}(M, \Gamma)$ , par exemple, représente la puissance d'un point  $M$  par rapport à  $\Gamma$  et le symbole  $\overline{M\Delta}$  le vecteur perpendiculaire à  $\Delta$  dont l'origine est  $M$  et dont l'extrémité est sur  $\Delta$ .

Si  $\Gamma_2$  est une autre circonférence du faisceau  $\Gamma, \Gamma_1$ , et dont le centre est  $\Omega_2$ , on a :

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) - \mathcal{P}(M, \Gamma_2) + 2\overline{\Omega\Omega_2} \cdot \overline{M\Delta} = 0. \quad (2)$$

D'où, par l'élimination de  $\overline{M\Delta}$ ,

$$\overline{\Omega_1\Omega_2} \mathcal{P}(M, \Gamma) + \overline{\Omega_2\Omega} \mathcal{P}(M, \Gamma_1) + \overline{\Omega\Omega_1} \mathcal{P}(M, \Gamma_2) = 0; \quad (3)$$

*relation qui lie les trois puissances d'un point quelconque  $M$  par rapport à trois cercles d'un faisceau.*

Si  $M$  est tel que la somme des deux premiers termes soit nulle,

il en est de même du troisième et inversement; donc le lieu des points M tels que,  $\lambda$ , étant une constante donnée,

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) = \lambda \mathcal{P}(M, \Gamma_1), \quad (4)$$

lequel est la droite  $\Delta$  pour  $\lambda = 1$ , est, pour  $\lambda \neq 1$ , la circonférence  $\Gamma_2$  du faisceau  $\Gamma, \Gamma_1$  dont le centre  $\Omega_2$  est tel que

$$\frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega_1}} = \lambda. \quad (5)$$

Ce lieu n'existe donc que si cette circonférence existe. Plaçons-nous dans le cas où,  $\Gamma$  ayant le rayon R,  $\Gamma_1$  est un cercle point.  $\Delta$  est alors la parallèle à la polaire de  $\Omega_1$  par rapport à  $\Gamma$ , qui est équidistante de cette polaire et de  $\Omega_1$ , c'est-à-dire la médiatrice de  $\Omega_1 \Omega'_1$ ;  $\Omega'_1$  étant tel que

$$\overline{\Omega \Omega'_1} \cdot \overline{\Omega \Omega_1} = R^2;$$

$\Omega'_1$  est le second cercle point du faisceau. Le rayon  $R_2$  de  $\Gamma_2$  est donné de même par

$$\overline{\Omega_2 \Omega'_1} \cdot \overline{\Omega_2 \Omega_1} = R_2^2;$$

il n'est donc réel que pour  $\Omega_2$  en dehors de  $\Omega_1 \Omega'_1$ . Or, le rapport

$$\frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega_1}} = \frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega} + \overline{\Omega \Omega_1}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1}}{\overline{\Omega \Omega_2}}},$$

varie de l'infini à

$$\frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1}}{\overline{\Omega \Omega'_1}}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1^2}}{R^2}} = \frac{R^2}{R^2 - \overline{\Omega \Omega_1^2}},$$

sans passer par la valeur zéro, quand  $\Omega_2$  se déplace de  $\Omega_1$  à  $\Omega'_1$ .

Donc le lieu existe, sauf si l'on a:

$$\lambda(R^2 - \overline{\Omega \Omega_1^2}) > R^2. \quad (6)$$

Si les deux membres étaient égaux, le lieu se réduirait au point  $\Omega'_1$ .