SUR UNE APPLICATION DU DERNIER THÉORÈME DE FERMAT

Autor(en): **Thébault, V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28037

SUR UNE APPLICATION DU DERNIER THÉORÈME DE FERMAT

PAR

V. Thébault, Le Mans (Sarthe).

La question de Mathématiques élémentaires posée au *Concours d'Agrégation des Sciences mathématiques* (Paris 1923), consistait en l'étude de certaines propriétés d'un triangle ABC dans lequel les centres des carrés construits *intérieurement* sur les côtés sont trois points en ligne droite.

La dernière partie de l'énoncé comportait la relation

$$5\,(a^4 + b^4 + c^4) = 6\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\,, \tag{1}$$

entre les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, afin de démontrer que, *dans un tel triangle, les longueurs* a, b, c *ne sont jamais simultanément exprimées par des nombres entiers.*

1. — Posons

$$a^2 = x\,,\ b^2 = y\,,\ c^2 = z;\ y + z - x = 2X^2\,,\ z + x - y = 2Y^2\,,$$
$$x + y - z = 2Z^2\,,\ (0 \leqq X \leqq Y \leqq Z)\,. \tag{2}$$

La condition (1) s'écrit aussi

$$f(a^2, b^2, c^2) = 5\,(a^4 + b^4 + c^4) - 6\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0\,, \tag{3}$$

ou, employant les notations (2),

$$f(x, y, z) = 8\,(x^2 + y^2 + z^2) - 3\,(x + y + z)^2 = 0\,, \tag{4}$$

ou encore, après des calculs simples,

$$X^4 + Y^4 + Z^4 - 2Y^2Z^2 - 2Z^2X^2 - 2X^2Y^2 = 0\,, \tag{5}$$

ou enfin

$$(X + Y + Z)(X + Y - Z)(X - Y + Z)(-X + Y + Z) = 0 . \quad (6)$$

Des relations (39) contenues dans un article précédent [1], il résulte que

$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 > \overline{AB}^2 , \ \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 > \overline{BC}^2 , \ \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 > \overline{CA}^2 ,$$

ce qui prouve que *les angles* A, B, C *du triangle sont aigus.* Par suite, les valeurs de X^2, Y^2, Z^2, en fonction de x, y, z, sont bien positives, et si $a \geqq b \geqq c$, on a

$$X \leqq Y \leqq Z .$$

X, Y, Z étant réels et positifs, la relation précédente exige que

$$Z = X + Y . \quad (7)$$

Les nombres a, b, c *qui vérifient la condition* (3) *ne peuvent être simultanément entiers.*

S'ils l'étaient en effet, on pourrait, en divisant par leur plus grand commun diviseur, ce qui revient à remplacer le triangle ABC par un triangle semblable, les supposer premiers entre eux dans leur ensemble, et alors il y aurait lieu de considérer trois cas:

1° *les trois nombres* a, b, c *sont impairs:* $5\,(a^4 + b^4 + c^4)$ l'est aussi, et (3) est impossible.

2° *deux d'entre eux sont impairs, un pair:* par exemple,

$$a = 2a' + 1 , \ b = 2b' + 1 , \ c = 2c' ; \ (a', b', c' \text{ entiers})$$

alors

$$x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 = 2\,(2\lambda + 1) , \qquad (\lambda \text{ entier})$$
$$(x + y + z)^2 = 4\,(2\lambda + 1)^2 ;$$

et, (4) étant impossible, (1) l'est également.

3° *un nombre impair, deux pairs:* $5\,(a^4 + b^4 + c^4)$ étant impair, (1) est encore impossible.

---

[1] *L'Enseignement mathématique*, 1934, p. 323.

2. — Voici un autre procédé qui, d'une manière indirecte, conduit à la même conclusion.

L'équation (1) devient

$$8\,(a^4 + b^4 + c^4) = 3\,(a^2 + b^2 + c^2)^2, \tag{8}$$

en complétant le carré du second membre.

Elle devient en outre

$$8\,(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) = 3\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2\,, \tag{9}$$

dans laquelle α, β, γ sont les quotients de a, b, c par leur plus grand commun diviseur.

Les nombres α, β, γ étant premiers entre eux, on peut toujours supposer, en vertu de (9), que α, par exemple, est pair, β et γ étant impairs.

De plus, 4 divise $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et par suite $\beta^2 + \gamma^2 - 3\,\alpha^2$.

Posons

$$x^2 = \frac{1}{2}\,\alpha^2\,, \qquad y^2 = \frac{1}{4}\,(\beta^2 + \gamma^2 - 3\,\alpha^2)\,, \qquad z^2 = \frac{1}{2}\,(\beta^2 + \gamma^2)$$

ou

$$\alpha^2 = 2x^2\,, \qquad \beta^2 = 3x^2 + 2y^2 + z^2\,, \qquad \gamma^2 = 3x^2 + 2y^2 - z^2\,.$$

x, y, z sont premiers entre eux, autrement α, β, γ admettraient un diviseur commun.

L'équation (9) devient alors

$$x^4 = y^4 + z^4\,. \tag{10}$$

Cette équation de Fermat est impossible en nombres entiers. Comme elle entraîne les équations (9) et (8), et réciproquement, dans l'hypothèse (1) envisagée, *les nombres* a, b, c *ne peuvent être entiers simultanément.*

Remarque. Le raisonnement direct du premier paragraphe constitue donc une preuve, peut-être nouvelle, de l'impossibilité de l'équation

$$x^4 = y^4 + z^4$$

en nombres entiers.

3. — Ces développements suggèrent des remarques plus générales.

Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés BC, CA, AB sont exprimées par des nombres a, b, c.

1° Si l'on pose

$$2(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n) = p , \qquad a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} = q ,$$

n étant un entier quelconque, puis

$$k = \frac{2(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n) + a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{2(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n) - (a^{2n} + b^{2n} + c^{2n})} , \tag{11}$$

on a

$$k = \frac{p+q}{p-q} = 1 + \frac{2q}{p-q} .$$

k est un nombre entier lorsque

$$2q = m(p - q) ,$$

m étant entier. Il en résulte d'abord que

$$(m + 2) q = mp ,$$

puis, que les côtés du triangle ABC satisfont à la relation

$$(m + 2)(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}) = 2m(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n) . \tag{12}$$

Cette condition qui s'écrit aussi

$$2(m + 1)(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}) = m(a^n + b^n + c^n)^2 \tag{13}$$

devient en outre

$$2(m + 1)(\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n}) = m(\alpha^n + \beta^n + \gamma^n)^2 , \tag{14}$$

dans laquelle α, β, γ sont les quotients de a, b, c par leur plus grand commun diviseur d.

Les nombres α, β, γ étant premiers entre eux, on peut toujours supposer, en vertu de la relation (14), que α, par exemple, est pair, β et γ étant impairs.

En effet, quand m est impair, $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ est pair. Si m est pair, $(m = 2m')$,

$$(2m' + 1)(\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n}) = m'(\alpha^n + \beta^n + \gamma^n)^2 ;$$

dès lors, $\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n}$ ou $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ est pair, selon que m' est pair ou impair.

2° Admettons, par hypothèse, que $m + 1$ divise $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ et par suite $\beta^n + \gamma^n - m\alpha^n$, puis posons

$$x^n = \frac{1}{2}\alpha^n , \quad y^n = \frac{1}{m+1} \cdot (\beta^n + \gamma^n - m\alpha^n) , \quad z^n = \frac{1}{2}(\beta^n - \gamma^n)$$

ou

$$\alpha^n = 2x^n , \quad \beta^n = mx^n + \left(\frac{m+1}{2}\right) y^n + z^n ,$$

$$\gamma^n = mx^n + \left(\frac{m+1}{2}\right) y^n - z^n . \tag{15}$$

x, y, z sont premiers entre eux, autrement α, β, γ admettraient un diviseur commun.

Introduisant les expressions (15) dans la relation (14), on obtient l'équation

$$4(m-2)x^{2n} = (m+1)y^{2n} + 4z^{2n} . \tag{16}$$

3° Il est évident que pour $m = 3$, $m + 1 = 4$ divise $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$; car $2(m + 1) = 8$, et par suite $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n =$ M. 4.

Cette hypothèse conduit, avec (16), à l'équation de FERMAT

$$x^{2n} = y^{2n} + z^{2n} , \tag{17}$$

qui entraîne la relation

$$5(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}) = 6(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n) , \tag{18}$$

entre les côtés du triangle ABC et réciproquement.

Observons également que dans tous les triangles de cette forme, où n est un entier quelconque, *le rapport* k *est constant et égal à* 4.

4. — Lorsque $n = 1$, les équations (17), (18) deviennent

$$x^2 = y^2 + z^2$$
$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(bc + ca + ab) \ . \qquad (19)$$

Cette dernière, qui lie les côtés d'un triangle ABC, est vérifiée par des nombres entiers dont les formes sont connues [1]. Si l'on pose

$$x = u^2 + v^2 \ , \qquad y = u^2 - v^2 \ , \qquad z = 2uv \ ,$$
$$a = 2\lambda(u^2 + v^2) \ , \qquad b = \lambda(5u^2 + 2uv + v^2) \qquad (20)$$
$$c = \lambda(5u^2 - 2uv + v^2) \ ,$$

u, v étant des nombres premiers entre eux et de parités différentes et λ un nombre entier quelconque.

Aux propriétés déjà signalées [2], ajoutons les relations suivantes entre les rayons r, r_a, r_b, r_c des cercles tritangents, le rayon R du cercle circonscrit et le demi-périmètre p de ce triangle spécial ABC, qui résultent de ce que

$$(2\Sigma bc + \Sigma a^2) : (2\Sigma bc - \Sigma a^2) = k = 4 \ , \qquad (21)$$

$$p^2 = r(4\mathrm{R} + r) \ , \qquad r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = 4r(r_a + r_b + r_c) \ . \qquad (22)$$

En outre, G et I étant le barycentre et le centre du cercle inscrit du triangle ABC, la formule classique

$$\overline{\mathrm{GI}}^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16\mathrm{R}r)$$

se réduit à

$$\mathrm{GI} = r \ .$$

Dans ce triangle particulier, *le cercle inscrit passe par le centre de gravité.* Cette propriété connue découle ici très simplement de l'expression du rapport k.

5. — Quand $n = 2$, on retrouve la relation (1) entre les côtés d'un triangle ABC et les conséquences que nous en avons déduites.

[1] A. Errera, *Mathesis*, 1924, p. 408.
[2] *Mathesis*, 1924, p. 314.

De plus, S étant l'aire du triangle, de la formule classique

$$16\,S^2 = 2\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4 \ ,$$

il résulte que

$$4 = k = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,S}\right)^2 = (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \ ; \quad (23)$$

d'où

$$\cot A + \cot B + \cot C = 2 \ . \quad (24)$$

En outre,

$$a^4 + b^4 + c^4 = 24\,S^2 \ , \qquad b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = 20\,S^2 \ ,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8\,S \ . \quad (25)$$

Remarque. La relation (7) équivaut à celle-ci,

$$\sqrt{\cot A} + \sqrt{\cot B} = \sqrt{\cot C} \ ,$$

que nous avons déjà donnée (*Mathesis*, 1931, p. 284), et qui est aussi une conséquence des relations (24) et (25).

ERRATUM. — Dans la formule (22), *E. M.*, 34e année, il faut lire $\left(1 + \dfrac{nd}{2\,R}\right)$.

SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

PAR

D. Mirimanoff (Genève).

En relisant une Note sur le quotient de Fermat et les nombres de Bernoulli, que j'ai publiée en 1895 [1], je viens d'y découvrir deux erreurs dans l'énoncé et la démonstration des formules du paragraphe 2. La première est une faute d'impression, la seconde, plus importante, un *lapsus calami.* Je tiens à les corriger; je crois utile de compléter en même temps la démonstration de mes formules, que je m'étais borné à esquisser.

[1] Sur la congruence $(r^{p-1} - 1) : p \equiv q_r$ (mod. p). *Journ. für die reine und angew. Math.*, t. 115, p. 295-300.