

# I. – DOMAINES VECTORIELS.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LES DOMAINES VECTORIELS ET LA THÉORIE DES CORPS CONVEXES

PAR

M. Paul VINCENSINI (Marseille).

## I. — DOMAINES VECTORIELS.

On sait qu'on appelle domaine vectoriel d'un corps convexe  $C$  de l'espace euclidien  $E_n$  à  $n$  dimensions, le domaine  $V$  rempli par les extrémités des vecteurs issus d'un point fixe  $O$  et équipollents aux différents vecteurs ayant pour origines et pour extrémités deux points quelconques de  $C$ <sup>1</sup>.

$V$  est convexe et admet le point  $O$  pour centre de symétrie. J'ai indiqué<sup>2</sup> une démonstration géométrique générale de la convexité de  $V$ , en me basant sur la génération suivante du domaine vectoriel d'un corps convexe quelconque  $C$ .

Déplaçons  $C$  par les différentes translations qui amènent un point quelconque de sa frontière à passer par le point fixe  $O$ . Nous obtenons ainsi un ensemble de  $\infty^{n-1}$  corps convexes congruents à  $C$ . La région de l'espace remplie par ces  $\infty^{n-1}$  corps est précisément  $V$ .

Les corps convexes que nous envisagerons dans la suite seront supposés doués, en chaque point frontière, d'un hyperplan tangent déterminé, variant continuellement avec le point de

---

<sup>1</sup> Pour la notion de domaine vectoriel et quelques-unes de ses applications, voir : RADEMACHER: *Jahresbericht der D.M.V.*, t. XXXIV, 1925, p. 64. T. ESTERMANN: Sur le domaine vectoriel d'un corps convexe, *Math. Zeitschrift*, t. 28, 1928. GANAPATHI: Sur les domaines vectoriels, *Math. Zeitschrift*, t. 38, 1934.

<sup>2</sup> P. VINCENSINI: Sur les domaines vectoriels des corps convexes, *Journal de Math. pures et appliquées* t. XV, 1936.

contact. Autrement dit, il y aura une correspondance biunivoque et bicontinue, entre l'hypersurface frontière du corps et sa représentation hypersphérique. Dans ces conditions, chacun des  $\infty^{n-1}$  corps précédemment définis touche la frontière de V en un certain point, et les hyperplans tangents à un même corps, en O et au point A où il touche la frontière de V, sont *parallèles*.

Il résulte immédiatement de là que, si deux corps convexes C et C' ont même domaine vectoriel, deux diamètres parallèles quelconques des deux corps *sont égaux et font le même angle avec les hyperplans tangents en leurs extrémités* <sup>1</sup>.

On peut en effet, par des translations, amener les deux diamètres parallèles envisagés à coïncider avec un même rayon vecteur OA du domaine vectoriel.

Il est clair d'ailleurs que deux corps convexes de même domaine vectoriel ont même largeur <sup>2</sup> dans toutes les directions.

On peut dire si l'on veut que, C et C' étant deux corps convexes ayant même domaine vectoriel, si  $\pi$  et  $\pi'$  sont deux hyperplans tangents parallèles et également situés touchant respectivement C et C' en A et A', la translation  $\overrightarrow{AA'}$  amène les frontières des deux corps à être bitangentes en deux points diamétralement opposés.

L'hypersurface frontière de chacun des deux corps peut donc être regardée comme l'enveloppe complète de l'hypersurface frontière de l'autre, lorsque celle-ci se déplace par translation en restant constamment tangente à la première hypersurface.

Eu égard aux corps convexes du plan, il convient d'ajouter les propriétés suivantes. Soient M et M' deux points diamétralement opposés d'un corps convexe C (du contour qui le limite), A le point correspondant du domaine vectoriel V [ $\overrightarrow{OA}$  est équipollent à  $\overrightarrow{M'M}$ ]. Lorsque les tangentes T et T' à C en M et M' tournent d'un angle  $d\alpha$ , M et M' décrivent deux arcs  $ds$  et  $ds'$ . La tangente en A à V tourne du même angle  $d\alpha$ , et le point A décrit l'arc  $d\sigma$  tel que

$$d\sigma = ds + ds' .$$

<sup>1</sup> Nous appelons *diamètre* d'un corps convexe, le segment déterminé par les points de contact de sa frontière avec deux hyperplans tangents parallèles.

<sup>2</sup> Une *largeur* d'un corps convexe est la distance de deux hyperplans tangents parallèles.

Il résulte de là que

- 1° la longueur de  $V$  est le double de celle de  $C$ ;
- 2° le rayon de courbure de  $V$  en  $A$  est la somme des rayons de courbure de  $C$  en  $M$  et  $M'$ .

On déduit immédiatement de la deuxième propriété que si deux corps convexes plans ont même domaine vectoriel, et si leurs frontières ont même rayon de courbure en deux points (respectivement situés sur les deux frontières) où les tangentes sont parallèles, ces frontières *ont aussi même rayon de courbure aux points diamétralement opposés des précédents*.

Les courbes *orbiformes* [de largeur constante] limitent des corps convexes admettant des cercles pour domaines vectoriels. Toutes les orbiformes de même largeur  $d$  ont même longueur  $\pi d$  [la moitié de la longueur du domaine vectoriel commun]. En outre, une orbiforme et un cercle de même largeur peuvent toujours être amenés, d'une infinité de façons, à être bitangents en deux points diamétralement opposés.

## II. — LES DOMAINES VECTORIELS. ET LA THÉORIE DES CORPS CONVEXES.

Indépendamment de son intérêt propre, dû surtout à l'existence de relations extrémales fort remarquables établies par MM. RADEMACHER, ESTERMANN et GANAPATHI (*articles cités*) entre les volumes d'un corps convexe quelconque et de son domaine vectoriel, la notion de domaine vectoriel d'un corps convexe se prête à une étude remarquablement intuitive de nombreuses questions relatives aux corps convexes.

On sait à quelles difficultés on se heurte lorsqu'on essaye d'aborder, par l'analyse, les problèmes même les plus simples qui se présentent dans la théorie des corps convexes. Ces difficultés sont dans l'ordre logique des choses.

Il est incontestable que, depuis que GAUSS a systématiquement employé les coordonnées curvilignes pour l'étude des propriétés des surfaces, créant ainsi la géométrie différentielle, des progrès considérables ont été réalisés en matière géomé-