

ESPACES FIBRÉS. QUANTA. GROUPES

Autor(en): **Buhl, M. A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28026>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ESPACES FIBRÉS. QUANTA. GROUPES

PAR

M. A. BUHL (Toulouse).

Je me permets d'extraire ici, de mes propres travaux, quelques pages élémentaires qui, je l'espère, aideront à étudier les magnifiques Conférences concernant la Topologie et publiées dans le dernier volume de *L'Enseignement mathématique*.

J'ai des prétentions limitées. Ce qui suit ne se rapporte pas à toutes ces Conférences mais plus particulièrement à celles de MM. Elie Cartan et W. Threlfall.

Des deux côtés, soit par les systèmes de Maurer-Cartan, soit par l'équation de Schrödinger, il y a *quantification*. Il ne faut pas toujours prendre ce mot au sens de la microphysique. L'Analyse considérera, de plus en plus, des équations ou des systèmes d'équations contenant des paramètres et qui n'ont de sens que pour certaines valeurs de ces paramètres ou pour certaines relations établies ou à établir entre eux. On dira alors que ces paramètres sont *quantifiés*. En d'autres termes, il y a des valeurs *qu'ils ne peuvent pas prendre* et les théorèmes d'exclusion, pour fonctions à valeurs interdites, théorèmes qui ont entraîné tant de travaux et glorifié si éloquemment le nom de M. Emile Picard, sont, eux-mêmes, des manifestations de quantification.

Le présent article doit être considéré comme très réduit. Voici quelques indications bibliographiques se rapportant à des développements. Elles correspondent aux numéros mis entre crochets dans le texte.

1. E. CARTAN. *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire* (Actualités scientifiques, fasc. 72, 1933).
2. A. BUHL. *Tourbillons, Corpuscules, Ondes* (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 3, XXIV, 1932).

3. A. BUHL. *Gravifiques, Groupes, Mécaniques* (Mém. des Sc. mathématiques, fasc. LXII, 1934).
4. A. BUHL. *Structures analytiques et Théories physiques* (Mém. des Sc. physiques, fasc. XXII, 1933).
5. F. G.-M. *Exercices de Géométrie* (J. de Gigord, Paris, 1912). Voir p. 940.
6. E. CARTAN. *Repère mobile, Groupes continus, Espaces généralisés* (Act. scientifiques, fasc. 194, 1935).
7. A. BUHL. *Groupes continus* (Mém. des Sc. mathématiques, fasc. XXXIII, 1928).

En outre, dans le Tome I de *Nouveaux Eléments d'Analyse* (Gauthier-Villars, 1937), actuellement publié, on retrouvera les questions ci-après sous forme didactique et avec tous les développements pédagogiques nécessaires. Ces *Nouveaux Eléments* sont d'ailleurs une extension du Cours que je professe à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. *Espaces à canaux*. — Ainsi que dans tous nos travaux de Géométrie et de Physique théorique, nous partons de l'identité

$$\int_C X dY = \int_A dX dY \quad (1)$$

qui exprime, de deux manières, l'aire A de frontière C. Le point de vue est analogue à celui de M. Elie Cartan fondant une Géométrie sur la notion d'aire [1].

Un changement de variables, dans (1), donne la formule de Green-Riemann

$$\int_C U dM + V dN = \int_A \left(\frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\partial U}{\partial N} \right) dM dN . \quad (2)$$

Si $M \equiv M(x, y, z)$, $N \equiv N(x, y, z)$, avec z appartenant à une surface σ , cette formule (2) se change en

$$\int_{\Sigma} U dM + V dN = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\partial U}{\partial N} \right) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} d\sigma , \quad (3)$$

les indices x, y, z indiquant des dérivations partielles.

Cette formule se rapporte à ce que j'ai appelé d'abord un *espace à canaux* [2], [3]. Un canal élémentaire a une section quadrilatérale. Sur ses faces latérales, M , N , dM , dN sont des constantes.

Il y a là, déjà, une analogie avec les *espaces fibrés* de M. W. Threlfall, les fibres n'étant pas toujours les canaux mais pouvant être les variétés (ici les surfaces) qui les constituent. Les canaux se réunissent en *faisceaux* à section transversale σ finie. Toutes les sections transversales relatives à un même faisceau sont dites *en projection canale* l'une par rapport à l'autre; pour toutes ces sections, l'intégrale double de (3) est invariante.

Soit un canal élémentaire contenant transversalement $d\sigma$ (en x, y, z) et dS (en X, Y, Z), les cloisons finies σ et S étant, comme leurs éléments $d\sigma$ et dS , en projection canale. En posant, pour abréger,

$$\Lambda(M, N) = \frac{\partial V}{\partial M} - \frac{\partial U}{\partial N},$$

on peut écrire, pour les deux valeurs égales de $\Lambda dM dN$, considérées en $d\sigma$ et en dS ,

$$\Lambda(M, N) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} d\sigma = \frac{\Lambda(M, N)}{\Theta(X, Y, Z)} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} \frac{\Theta(X, Y, Z) dS}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}}$$

La cloison S a pour équation $\Phi(X, Y, Z) = 0$. Posons

$$\frac{1}{\Theta \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}} \begin{vmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = \begin{cases} \Delta(X, Y, Z), \\ \Delta_1(\Phi, M, N), \\ \Delta_1(0, M, N) \text{ sur } S, \end{cases} \quad (4)$$

puis, pour déterminer $\Lambda(M, N)$,

$$\Lambda(M, N) \Delta_1(0, M, N) = 1. \quad (5)$$

C'est le moyen d'avoir définitivement

$$\iint_S \Theta dS = \iint_\sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{\Delta_1(0, M, N)}. \quad (6)$$

Mais, si ce résultat a été obtenu avec la cloison S, d'équation $\Phi = 0$, il le sera tout aussi bien avec une infinité d'autres surfaces $\Phi = 0$, la fonction $\Phi(X, Y, Z)$ satisfaisant à l'équation (4) construite avec $\Delta_1(\Phi, M, N)$ pour second membre. Il y a une infinité de *fronts d'ondes intégraux* situés transversalement dans le faisceau de canaux considéré et y propageant, *avec invariance*, l'intégrale double, en ΘdS , de (6). Le faisceau de canaux peut être décomposé en faisceaux partiels aussi filiformes qu'on le voudra et, dans chaque faisceau partiel, on peut considérer un front d'onde correspondant à une fonction Φ différente d'où, de canal à canal, un émiettement corpusculaire dont chaque corpuscule ne cesse d'être piloté par un front d'onde.

Voyons maintenant comment tout ceci peut être mis en relation avec l'équation de Schrödinger. Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} 2F = 2\Lambda(M, N)(M_y M_z - M_z N_y) = u\varphi_x - \varphi u_x, \\ 2G = 2\Lambda(M, N)(M_z M_x - M_x N_z) = u\varphi_y - \varphi u_y, \\ 2H = 2\Lambda(M, N)(M_x M_y - M_y N_x) = u\varphi_z - \varphi u_z. \end{array} \right. \quad (7)$$

Si l'on forme la divergence identiquement évanouissante

$$F_x + G_y + H_z = 0, \quad (8)$$

d'après les expressions en M et N données par les relations (7), on voit que c'est cet évanouissement qui permet la formule (3), dont l'intégrale double peut alors s'écrire

$$\iint_{\sigma} (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma,$$

et qui permet, de même, tous les raisonnements qui suivent. Essayons maintenant d'obtenir (8) avec les derniers membres des relations (7). On aura immédiatement

$$u \Delta \varphi - \varphi \Delta u = 0$$

si Δ est le laplacien à trois variables. Or ceci peut encore s'écrire

$$u(\Delta \varphi + \Omega \varphi) - \varphi(\Delta u + \Omega u) = 0$$

en désignant par Ω une fonction donnée $\Omega(x, y, z)$ qui est, pour u et v , un simple coefficient. Donc, si u et v sont deux solutions distinctes de l'équation de Schrödinger

$$\Delta \tau + \Omega \tau = 0, \quad (9)$$

on pourra former les derniers membres de (7), puis déterminer des fonctions M et N , toujours d'après (7), et l'on associera ainsi, à l'équation de Schrödinger (9), des canaux propagateurs pour les fronts d'ondes transversaux qui transportent des intégrales (6) invariantes. Cette détermination des fonctions M et N se présente très simplement; ce sont deux intégrales distinctes de l'équation

$$F \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \frac{\partial \theta}{\partial y} + H \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

et leur détermination laisse indéterminée la fonction $\Lambda(M, N)$ qui devra finalement être déterminée par (5).

Remarquons que les équations (8) et (10) peuvent s'écrire respectivement

$$\frac{\partial}{\partial x} F + \frac{\partial}{\partial y} G + \frac{\partial}{\partial z} H = 0, \quad F \frac{\partial}{\partial x} + G \frac{\partial}{\partial y} + H \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Elles sont constituées toutes deux avec *les mêmes* opérateurs non permutables et cependant permutés. Nouvelle raison de considérer qu'une détermination de canaux est un schème fatalement associé aux théories reposant sur l'évanouissement d'une divergence.

Lorsque les canaux sont déterminés, la recherche des ondes intégrales transversales, dépendant jusqu'ici de l'équation (4), peut être considérablement généralisée. On peut, dans le second membre de (4), remplacer $\Delta_1(\Phi, M, N)$ par une fonction qui contiendrait les constructions les plus diverses en Φ , par exemple des dérivées partielles en Φ jusqu'à un ordre quelconque, sous la seule réserve que la nouvelle fonction Δ_1 , pour $\Phi = 0$, se réduirait encore à $\Delta_1(0, M, N)$.

Bref, il y a des propagations, à la fois ondulatoires et corpusculaires, qui peuvent notamment dépendre d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque; c'est dire combien il est vain d'imaginer quelque représentation physico-géométrique

qui, pour de telles propagations, aurait quelque chose d'unique et de définitif.

Il faut considérer aussi que l'équation de Schrödinger (9) n'est pas véritablement unique. La fonction Ω admet différentes formes dépendant de différentes valeurs d'une constante; en d'autres termes cette fonction Ω est quantifiée. Il y a évidemment des quantifications correspondantes dans l'espace à canaux et dans les ondes plus ou moins corpusculaires qui s'y transportent.

Tout ceci paraît appartenir à une science assez élevée. Mais il est précisément fort remarquable qu'on puisse, avec la théorie des espaces à canaux, descendre vers une science élémentaire et très ancienne. Celle-ci ne sera pas d'un secours négligeable pour remonter ensuite vers les cas modernes.

Ainsi soit une sphère S , un cylindre circonscrit C et un diamètre D de S parallèle aux génératrices de C . Tous les conoïdes droits, de directrice rectiligne D et de génératrices perpendiculaires à D , propagent l'aire sphérique jusqu'à son application invariante sur C . Que l'on fasse glisser la sphère S dans le cylindre C , les canaux conoïdaux restant invariables et immobiles, et l'on assistera à la propagation des aires sphériques dans ces canaux. Ces résultats étaient connus d'Archimède et donnent lieu, en particulier, à la figure qui fut gravée sur le tombeau de l'illustre géomètre.

On peut généraliser ce résultat pour une quadrique quelconque et établir notamment que *toutes les associations d'aires planes peuvent se transporter sur une quadrique par procédés algébrico-logarithmiques* [2], [4].

Voici encore un bel exemple de canaux fibrés *circulairement*, exemple qui m'a été signalé par M. P. Delens.

Toute surface sphérique ABC... se projette, en vraie grandeur A'B'C'..., sur un cône circonscrit à la sphère, lorsque chaque point A, B, C, ... est projeté, sur la surface conique, en A', B', C', ... par des arcs de cercle AA', BB', CC', ... ayant pour centre le sommet S du cône circonscrit [5].

De tels exemples doivent évidemment donner l'idée de toute une géométrie concernant la propagation des aires, géométrie déjà notablement développée dans les publications citées. On

passe immédiatement, de là, à la propagation de masses, de charges, etc., sur fronts d'ondes intégraux susceptibles de se corpusculariser dans des canaux aussi filiformes qu'on le voudra.

Certes, ceci est *trop géométrique* pour représenter les véritables propagations ondulatoires et corpusculaires du monde microcosmique. Mais c'est une théorie d'approche, très simplifiée et mise en relation, comme la théorie véritable, avec les groupes et l'équation de Schrödinger.

2. *Quantification.* — Les précédentes allusions à la quantification portent à revenir à cette question en commençant non pas par les cas difficiles envisagés en Mécanique ondulatoire mais en recherchant des formes mathématiques simples incluses dans quelque définition générale.

On peut dire que des équations, des systèmes, des formules, contenant des paramètres, présentent un phénomène de *quantification* quand ces équations, ces systèmes, ces formules ne sont vérifiées ou vérifiables que pour certaines valeurs (dites *valeurs quantiques*) des paramètres en question.

Ou encore lorsque la vérification ne peut avoir lieu que pour certaines relations, établies ou à établir, entre les paramètres considérés.

Ainsi ce serait un problème quantique que de rechercher une fonction égale à sa dérivée; la fonction e^x ne satisfait à la question que pour une valeur déterminée de e . Et ceci est peut-être très naturellement d'accord avec le rôle extrêmement important que joue jusqu'ici l'exponentielle dans les problèmes quantiques les plus élevés.

Revenons à (1) et à la formule de Stokes (2), étendue au cas de n variables, pour un système de n formes de Pfaff linéaires. C'est considérer l'identité

$$\int_C P_i^s dx_i = \int_S \left(\frac{\partial P_k^s}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j^s}{\partial x_k} \right) dx_j dx_k . \quad (11)$$

C'est une question immédiate, simple et absolument fondamentale, pour d'immenses théories (dont la Théorie des groupes de Lie) que de rechercher si la forme de Pfaff *du second ordre*, placée

sous l'intégrale double, est toujours absolument nécessaire, si elle ne pourrait pas être remplacée par des combinaisons linéaires, à coefficients constants, des formes placées sous l'intégrale simple. En d'autres termes, peut-on avoir

$$\int_{\mathfrak{C}} P_i^s dx_i = c_{nm}^s \int_{\mathfrak{S}} (P_j^m dx_j) (P_k^n dx_k) , \quad (12)$$

les c à trois indices étant des constantes. Il faut, pour cela, que

$$\frac{\partial P_k^s}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j^s}{\partial x_k} = c_{nm}^s P_j^m P_k^n . \quad (13)$$

Tel est le système de Maurer-Cartan [6], [7]. On voit combien il naît simplement, immédiatement avec la notion de forme différentielle elle-même.

Or ce système, tout comme l'égalité (12), sont à ranger dans les formules quantiques. On a d'abord évidemment

$$c_{mn}^s + c_{nm}^s = 0 . \quad (14)$$

D'autre part l'identité

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ P_i^s & P_j^s & P_k^s \end{vmatrix} = 0 ,$$

après quelques transformations appuyées sur (13) et quelques permutations d'indices de sommation, se résout en

$$c_{si}^m c_{jk}^s + c_{sj}^m c_{ki}^s + c_{sk}^m c_{ij}^s = 0 . \quad (15)$$

La question considérée, l'égalité (12), le système de Maurer-Cartan (13), n'ont de sens que si les constantes c_{mn}^s satisfont aux conditions (14) et (15).

Considérons maintenant des formes linéaires aux dérivées partielles telles que

$$X_i(f) = \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} , \quad (16)$$

les variables x_k étant les mêmes que précédemment. Les opérateurs X_i ne sont pas permutables mais on sait que l'expression

$$(X_i X_j) = X_i X_j - X_j X_i$$

ne contient que des dérivées partielles du premier ordre. On a aussi l'*identité de Jacobi*

$$\begin{vmatrix} X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \end{vmatrix} = 0 ,$$

à développer sous la forme

$$(X_i(X_j X_k)) + (X_j(X_k X_i)) + (X_k(X_i X_j)) = 0 .$$

Supposons maintenant des formes X_i , telles que

$$(X_i X_j) = c_{ij}^s X_s , \quad (17)$$

les c à trois indices étant des constantes. On voit immédiatement que ces relations (17) ne peuvent avoir lieu que si les relations (14) et (15) ont lieu, les égalités (15) se déduisant alors de l'identité de Jacobi.

Voici donc deux théories, celle des formes de Pfaff

$$\pi^s = P_i^s dx_i \quad (18)$$

et celle de certains opérateurs (16), théories qui, au premier abord, ne se ressemblent guère et qui cependant n'existent qu'avec les mêmes conditions quantiques. Il doit y avoir, de ce fait, un rapprochement possible entre elles, une synthèse qui les réunit. Cette synthèse est la Théorie des groupes de Lie. Il n'y a sans doute pas de manière plus brève d'imposer celle-ci à l'attention.

A la notion (18) joignons celle de la *dérivation extérieure* qui permet d'écrire (11)

$$\int_c \pi^s = \int_s \int_s [\pi^s]' = \int_s \int_s [dP_i^s dx_i] .$$

Alors le système de Maurer-Cartan (13) est à remplacer par

$$[\pi^s]' + c_{mn}^s [\pi^m \pi^n] = 0, \quad (19)$$

le produit des facteurs entre crochets devant être un produit *extérieur*, dans lequel

$$dx_j dx_k = - dx_k dx_j, \quad dx_i^2 = 0.$$

A remarquer que, dans (13), on a réuni, dans le premier membre, le coefficient de $dx_j dx_k$ au coefficient de $dx_k dx_j$. Il faut faire de même pour le second. Ce faisant, on conserve au complet le jeu des indices de sommation m et n ; il faut donc affecter le second membre de (13) du diviseur 2.

Remarque analogue pour (19). Si, de plus, on change le signe de toutes les constantes c_{mn}^s , le système de Maurer-Cartan (19) prend bien la forme (6) donnée, dans le volume précédent (p. 193), par M. Cartan. Ce léger désaccord de notations provient de ce qu'ici, nous nous sommes permis de conserver celles de notre fascicule [7]. On trouvera aussi, dans ce fascicule, tous les développements nécessaires quant à la recherche des formes de Pfaff satisfaisant à un système de Maurer-Cartan de structure donnée.

3. *Transformations pfaffiennes.* — Reprenons la notation (18) et un système d'égalités, entre formes différentielles, tel que

$$\varpi^s(x) = \omega^s(y). \quad (20)$$

Il y a autant d'équations que de variables x et de variables y . Dans ces conditions, les équations (20) peuvent-elles être *intégrables*, de manière à équivaloir à des relations finies entre les x et les y , relations qui seraient celles d'un véritable changement de variables ?

Si l'on pouvait transformer ainsi

$$\int_G \varpi^s \quad \text{en} \quad \int_T \omega^s,$$

on devrait pouvoir transformer de même

$$\iint_S [\varpi^s]' \quad \text{en} \quad \iint_\Sigma [\omega^s]'$$

et rien n'indique, en général, qu'on puisse le faire, à moins que, précisément, les formes ϖ^s et ω^s ne soient solutions du système de Maurer-Cartan (19), car alors nos deux dernières intégrales doubles pourraient s'écrire respectivement

$$c_{nm}^s \int_s \int [\varpi^m \varpi^n] \quad \text{et} \quad c_{nm}^s \int_s \int [\omega^m \omega^n] ,$$

ce qui permettrait de les transformer immédiatement l'une en l'autre d'après (20). Bref le système de Maurer-Cartan (19) est condition d'intégrabilité pour un système (20); il doit être vérifié lorsqu'on y remplace π par ϖ et par ω . A remarquer cette intervention de *deux* solutions du système de Maurer-Cartan (20); elle est à rapprocher de l'intervention de *deux* solutions de l'équation de Schrödinger (9) dans la construction d'espaces à canaux dépendant d'une telle équation.

Mais, ceci dit, considérons un système

$$\varpi^s(x) = \varpi^s(z) , \quad (20 a)$$

avec ϖ dans les deux membres. Si l'on y remplace les z par de nouvelles et quelconques variables y , il prend la forme (20) et cette transformation des z en les y fait écrire

$$\varpi^s(z) = \omega^s(y)$$

ce qui, au nom des variables près, est précisément (20). Donc, à des changements de variables près, (20) et (20 a) sont équivalents.

4. *Groupes de Lie.* — La notion de groupe correspond à la coexistence des systèmes

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_r) , \quad (21)$$

$$x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n; b_1, b_2, \dots, b_r) , \quad (22)$$

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; c_1, c_2, \dots, c_r) \quad (23)$$

et

$$c_i = \varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r) . \quad (24)$$

Egalons les seconds membres de (22) et (23). De

$$f_v(x', b) = f_v(x, c),$$

en traitant les x , les a et les c comme des variables indépendantes, on déduit

$$\frac{\partial f_v}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial a_l} + \frac{\partial f_v}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial a_l} = 0.$$

De même (24) donne

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial a_l} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_l} = 0.$$

On peut tirer de là les dérivées des b par rapport aux a et les porter dans le système précédent, d'où

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl} \xi_{ji}(x'). \quad (25)$$

Le calcul brut semble donner des α^{jl} fonctions des a et des b et des ξ_{ji} fonctions des x' et des b mais (21) doit donner une vérification de (25) sans b . Aussi, finalement, les α^{jl} peuvent-ils s'exprimer rien qu'avec des a et les $\xi_{ji}(x')$ rien qu'avec des x' . Il faudrait maintenant, en s'appuyant sur

$$\frac{\partial x'_i}{\partial b_m} = \frac{\partial x'_i}{\partial a_l} \frac{\partial a_l}{\partial b_m} = \alpha^{jl} \frac{\partial a_l}{\partial b_m} \xi_{ji}(x'),$$

établir aussi que

$$\frac{\partial x'_i}{\partial b_m} = \beta^{jm} \xi_{ji}(x'), \quad (26)$$

les β^{jm} ne s'exprimant qu'avec des b . Dès lors, on aurait

$$\alpha^{jl}(a) da_l = \beta^{jm}(b) db_m$$

d'ou, avec la notation employée en (20),

$$\omega^j(a) = \omega^j(b). \quad (27)$$

On est ici forcément conduit à considérer un changement de variables, entre les a et les b , défini par un système différentiel (27) du type (20), système qui doit être intégrable du fait que les formes $\bar{\omega}^j$ et ω^j satisfont à un système de Maurer-Cartan (19) qui, lui, n'existera qu'avec des relations de structure (14) et (15) entre les constantes c_{mn}^s .

Et l'intégration de (27) donnera (24), les r paramètres c_i étant introduits par cette intégration.

Voilà les deux phrases essentielles. Les bien comprendre, c'est être à même de comprendre toute la suite. Ces deux phrases contiennent les *trois théorèmes fondamentaux* de Lie dans un ordre qui n'est pas celui où l'illustre créateur les a placés.

Le point de vue moderne, celui de M. Elie Cartan, qui semble être de beaucoup le plus profond, consiste à partir d'une *structure* déterminée. Il y a des *constantes de structure* satisfaisant aux relations (14) et (15); c'est le *troisième théorème* de Lie, à base purement algébrique.

Quand on possède un système de constantes structurales déterminées, on peut écrire le système de Maurer-Cartan (19) et chercher à en tirer *les deux solutions particulières* qui permettent les *équations de définition* (27) lesquelles permettent (25) et (26), ces dernières exprimant le *premier théorème* de Lie. L'intégration de (27) conduira à (24), c'est-à-dire aux *deux groupes paramétriques* ou à l'*espace groupal à double connexion*.

En outre, on n'oubliera pas que, les relations structurales étant satisfaites, il existe aussi, entre opérateurs X_i à déterminer, des relations du type (17). C'est le *deuxième théorème*.

Insistons encore sur l'éventualité d'avoir deux solutions particulières du système de Maurer-Cartan (19) pour pouvoir écrire le système (27); elle est analogue à l'éventualité, rencontrée plus haut, d'avoir deux solutions de l'équation de Schrödinger (9) pour construire certains espaces fibrés. Dans les deux cas, il y a quantification des équations en litige, l'équation (9) n'étant à considérer généralement que pour des formes quantiques de Ω tout comme le système (19) qui exige des valeurs spéciales pour les constantes de structure c_{mn}^s .

Naturellement, on doit pouvoir remplacer le système (27) par un système

$$\bar{\omega}^j(a) = \bar{\omega}^j(b) , \quad (27 a)$$

tout comme on a remplacé (20) par (20 a). C'est aboutir aux *équations de définition* réindiquées, par M. Elie Cartan, à l'endroit précité.

Cette construction des groupes de Lie, par des intégrations évidemment de nature analytique, leur donne tout naturellement un caractère *analytique* ayant même un substratum *algébrique* puisque le système structural (14) et (15) est purement algébrique. Toute cette analyticité est-elle indispensable à la coexistence d'équations telles que (21), (22), (23), (24) ? Peut-être pas. Et c'est ainsi que l'on arrive à se demander si tous les groupes continus sont bien des groupes de Lie.

Les conférences topologiques qui précédent répondent d'elles-mêmes à une telle question. Elles généralisent formidablement les notions différentielles, ce qui est évident maintenant et ce que M. Vessiot écrivait à M. Bouligand en 1930. Voir, plus haut, page 10 du présent volume.

Or Sophus Lie ne s'est guère servi que des notions différentielles classiques à la fin du siècle dernier. La topologie groupale doit donc recouvrir son œuvre et aussi la déborder. C'est un nouveau titre de gloire à ajouter à ceux, déjà si nombreux, de l'illustre géomètre norvégien; car s'il ne nous avait point donné une œuvre extensible, celle-ci n'aurait point été étendue.

Plus généralement les précédentes Conférences de Genève semblent être d'une utilité de premier ordre. Elles ont rapproché des géomètres du plus grand talent qui avaient cependant le léger tort de ne point se connaître suffisamment. Lorsque nous avons rendu compte, ici-même (31, 1932, p. 297), de la belle *Kurventheorie* de M. Karl Menger, nous disions regretter de ne point trouver dans ce livre le nom de M. Georges Bouligand. Mais, depuis, M. Menger a bien réparé les choses. Voir, par exemple, notre précédent volume, pp. 362 et 371.

Dans le présent volume (p. 5), M. Bouligand commence par citer M. Menger. La conjugaison de telles productions est l'une des formes les plus grandioses des progrès analytico-géométriques de l'époque actuelle.