

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES Les conditions définies en général. — Le cas hyperbolique

Autor(en): **Hadamard, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-27304>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CONFÉRENCES INTERNATIONALES SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ¹

Conditions propres à déterminer les solutions.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LES CONDITIONS DÉFINIES EN GÉNÉRAL. — LE CAS
HYPERBOLIQUE ²

PAR

J. HADAMARD, Membre de l'Institut (Paris).

On ne conçoit plus aujourd'hui l'intégration d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles comme consistant en la recherche de l'«intégrale générale». Il s'agit de trouver, non pas n'importe laquelle des solutions (en nombre infini) que comporte l'équation, mais *une* déterminée d'entre elles. A cet effet, on devra assujettir la quantité cherchée, non plus seulement à l'équation donnée — dite encore «équation indéfinie» — laquelle doit être vérifiée dans tout son domaine d'existence, mais aussi à des conditions supplémentaires — «conditions définies» —, à vérifier le long de certaines lignes ou surfaces particulières.

Il convient, à mon avis, de faire revivre cette dénomination de «conditions définies», employée par les anciens auteurs, de préférence à celle de «conditions aux limites». Cette dernière

¹ Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 17 au 20 juin 1935, sous la présidence de M. Jacques HADAMARD, Membre de l'Institut. La série comprenait en outre une conférence de M. R. FUETER, Professeur à l'Université de Zurich, intitulée: La Théorie des fonctions qui sont solutions de l'équation de Laplace à quatre variables réelles; elle a été reproduite dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 7, p. 307-330.

² Conférence faite le 17 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux *Équations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

doit, semble-t-il, s'appliquer spécialement à certaines des conditions définies, pendant que d'autres doivent être plutôt nommées « conditions initiales », les premières se comportant d'une façon très différente des secondes.

Avant même de résoudre des problèmes de cette espèce, on doit se demander quels sont ceux qu'il convient de se poser, autrement dit, de quelle nature sont les conditions définies propres à déterminer une solution. Ce premier aspect du sujet est le seul auquel seront consacrées les réunions qui vont suivre, et il suffira amplement à les occuper toutes.

I

Pour l'Analyse classique, la question était censée comporter une première réponse, simple et générale, donnée par le théorème de Cauchy pour lequel on possède la célèbre et belle démonstration de Sophie KOWALEWSKI. En se bornant, pour prendre le cas le plus intéressant, à une équation du second ordre, et en appelant x, x_1, \dots, x_n les variables indépendantes, ce théorème s'énonce de la manière suivante: *si l'équation aux dérivées partielles*

$$F\left(x, x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i, k = 0, 1, 2, \dots, n \\ x_0 = x \end{array}\right) \quad (1)$$

peut être résolue par rapport à la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\left(x, x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right), \quad (1')$$

la fonction f contenant ou pouvant contenir toutes les variables indépendantes, la fonction inconnue u, toutes ses dérivées du premier ou du second ordre à l'exception de celle qui figure au premier membre et étant fonction holomorphe de ces quantités, cette équation admet une solution et une seule holomorphe en x, x_1, \dots, x_n satisfaisant aux conditions

$$u = g(x_1, \dots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = h(x_1, \dots, x_n),$$

pour $x = 0$, g et h étant des fonctions holomorphes données de x_1, x_2, \dots, x_n .

Plus généralement, au lieu de l'hyperplan $x = 0$, on peut considérer une hypersurface

$$S(x, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (S)$$

et, en chaque point de cette hypersurface, se donner la valeur de l'inconnue u et d'une de ses dérivées premières (convenablement choisie, c'est-à-dire dans une direction non tangente à S). Telles seront les conditions définies que l'on adjoindra à l'équation aux dérivées partielles indéfinie (1) pour déterminer u ; le problème de Cauchy ainsi posé se ramène évidemment, par une transformation ponctuelle, au précédent, auquel il se réduit lorsque la surface qui porte les données, c'est-à-dire la surface S , est le plan $x = 0$.

La surface S étant elle-même supposée analytique et sans point régulier dans la région Ω que l'on considère, le problème admettra, en général, une solution et une seule. On sait en effet que les données de Cauchy permettent de calculer successivement, en chaque point de S , les valeurs numériques de toutes les dérivées partielles de u et d'en déduire, pour cette quantité, un développement de Taylor, lequel se trouve être convergent.

Il y a toutefois un cas d'exception, à savoir celui où la surface S est *caractéristique*, c'est-à-dire, physiquement parlant, représente la propagation d'une onde compatible avec l'équation (1). Si cette dernière est linéaire, ou, tout au moins, linéaire par rapport aux dérivées secondes, soit

$$\Sigma A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + H = 0, \quad \left(\begin{array}{l} i, k = 0, 1, 2, \dots, n \\ x_0 = x \end{array} \right) \quad (2)$$

la condition qui définit les caractéristiques s'obtient en remplaçant, dans les termes du second ordre, chacune des dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ par le produit correspondant de deux indéterminées $\gamma_i \gamma_k$, ce qui donne une forme quadratique, la *forme caractéristique*

$$A = \Sigma A_{ik} \gamma_i \gamma_k \quad (3)$$

et prenant pour $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ les dérivées partielles (du premier ordre) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$. Le résultat ainsi obtenu doit être nul pour que S soit caractéristique. S'il en est ainsi, on a bien une exception au théorème fondamental; mais cette exception confirme, en un sens, la règle; car le problème qui consiste à trouver u et, tout d'abord, à en calculer les dérivées successives en chaque point de S est, en général impossible et, s'il n'est pas impossible, est nécessairement indéterminé, absolument comme il arrive pour un système de n équations du premier degré à n inconnues dont le déterminant est nul.

Ce cas mis à part, il faut encore observer que, comme pour les équations différentielles ordinaires, la solution n'est ainsi formée et son existence établie que *localement*, c'est-à-dire, dans le premier cas envisagé tout à l'heure, pour x inférieur à un certain nombre positif α et, dans le second, pour les points suffisamment voisins de S. On pourra d'ailleurs habituellement faire, mais seulement jusqu'à une certaine limite, que l'on ne peut même pas assigner *a priori*, le prolongement analytique de ce premier élément de solution, ainsi qu'il arrive pour les équations différentielles ordinaires.

II

Les contemporains de Cauchy et leurs successeurs immédiats ont considéré le résultat ainsi obtenu comme donnant une première réponse définitive à la question. On avait d'autant moins de raisons d'en douter qu'on avait l'exemple tout analogue des équations différentielles ordinaires. Une équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (4)$$

admet en général une solution et une seule correspondant à des *conditions initiales* données, savoir que pour $x = a, y$ prenne une valeur numérique donnée b et $\frac{dy}{dx}$ une valeur numérique donnée b' (sauf pour certains systèmes exceptionnels de valeurs

de a, b, b'). Mais par un phénomène curieux de véritable cécité psychique, une différence importante était passée inaperçue. Le théorème fondamental que nous venons de rappeler et qui est relatif à l'équation (4) admet, comme on sait, deux sortes de démonstrations très différentes. L'une repose sur un développement en série entière et sur un « Calcul des limites », ou, comme on dit aujourd'hui, la formation de séries majorantes; l'autre sur des approximations successives de tout autre nature (méthode de Cauchy-Lipschitz et méthode de M. Picard). Les géomètres de la fin du XIX^e siècle ne remarquaient pas qu'il y avait là non seulement deux espèces de démonstrations différentes, mais deux théorèmes différents, puisque, dans un cas, on supposait essentiellement le second membre de l'équation (4) analytique et holomorphe, défini, par conséquent, dans le champ complexe, au lieu qu'aucune hypothèse de cette nature n'est postulée dans la seconde catégorie de méthodes, où l'on peut se borner aux valeurs réelles des variables.

La démonstration de Sophie Kowalewski est l'analogue de la *première* méthode dont nous venons de parler: elle procède par séries entières et suppose essentiellement les données analytiques tant en ce qui concerne le second membre f de l'équation (1') qu'en ce qui concerne les données initiales g et h .

On a parfois tenté d'établir le même théorème par des méthodes analogues à celles de Cauchy-Lipschitz ou de M. Picard; et même des méthodes de cette espèce se sont montrées fécondes sous certaines conditions convenablement spécifiées. Dans le cas général, elles ont toujours échoué et, comme on va le voir, sont nécessairement vouées à l'échec.

III

Pendant que l'Analyse envisageait ainsi les données de Cauchy comme propres à définir une solution d'une équation telle que (1), un autre chapitre de la Science, à savoir l'étude des potentiels, c'est-à-dire de l'équation

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

introduisait des données d'un type tout différent, à savoir celles de Dirichlet. Il est bien connu qu'une fonction harmonique et régulière à l'intérieur d'un volume donné V est connue dès qu'on se donne sa valeur numérique en chaque point de la surface frontière S de V . Entre cette donnée de Dirichlet et les données de Cauchy, on aperçoit immédiatement une sorte de contradiction: puisque la connaissance de la valeur de u en chaque point de S détermine complètement cette fonction du moment qu'elle doit être solution de (5), il apparaît évidemment qu'on n'a pas le droit de se donner, le long de S , la valeur de u ET celle d'une de ses dérivées.

La donnée de Dirichlet n'est pas la seule que la Physique mathématique puisse introduire pour déterminer une fonction harmonique: *au lieu* de se donner la valeur de u , on peut se donner celle de sa dérivée normale (problème de Neumann) ou (cas de la conductibilité) une de leurs combinaisons linéaires, ou [4] une dérivée oblique ¹, ou même [14] une combinaison analogue contenant des dérivées d'ordre supérieur. On peut aussi — et c'est le cas en Hydrodynamique, toutes les fois qu'il y a une surface libre — avoir affaire à des « problèmes mixtes », dans lesquels les données sont d'une espèce (par exemple, u lui-même) sur certaines régions de la frontière S et d'une autre (par exemple, la dérivée normale de u) sur le reste. Mais si variés que soient ces différents problèmes, ils ont tous un caractère commun: la donnée est toujours *unique* en chaque point de S , contrairement à ce que voudrait l'énoncé de Cauchy-Kowalewski.

Des circonstances tout analogues se présentent pour l'équation « biharmonique »

$$\Delta\Delta u = 0 \quad (6)$$

¹ Ce problème de la dérivée oblique présente une circonstance exceptionnelle dans la théorie qui nous occupe: il peut être à la fois possible et indéterminé. C'est du moins ce qui arrive lorsque la direction de dérivation est, en certains points, tangente à la surface S (cas d'ailleurs exclu par les auteurs cités). Si, par exemple, la quantité dont on se donne les valeurs le long de S est $\frac{\partial u}{\partial x}$, la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$, laquelle est elle-même harmonique, peut être obtenue par la résolution d'un problème de Dirichlet, et la détermination qui en résulte pour u (par quadrature relative à x), est elle-même harmonique si le terme additif, fonction de y et de z , que comporte la quadrature est convenablement choisi. Mais il reste un terme additif complètement arbitraire (une fonction harmonique quelconque de y et de z). La donnée, à la frontière, de $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$ donne lieu à des circonstances analogues (l'origine étant supposée extérieure à V).

qui se présente dans l'étude de l'équilibre élastique plan ou spatial. Une solution régulière de cette équation est déterminée, dans un volume de l'espace ou dans une aire plane, par *deux* données — par exemple u et sa dérivée normale — en chaque point de la frontière au lieu des quatre qu'imposerait, pour cette équation du quatrième ordre, le théorème de Cauchy-Kowalewski. On voit à nouveau apparaître la même discordance que pour l'équation des potentiels (5).

A cette discordance on voit, il est vrai, une première explication. Les deux questions ne se posent pas, par ailleurs, de manière analogue. La solution donnée par le théorème de Cauchy-Kowalewski ne l'est que *localement*: on ne prétend pas affirmer son existence et sa régularité en dehors d'un certain voisinage plus ou moins immédiat de la surface S ; au contraire, la solution au problème de Dirichlet doit être définie et régulière dans tout le volume V considéré, et il est même aisé de voir que si l'on renonce à cette condition, le problème devient largement indéterminé¹.

Confrontons donc les deux résultats en nous plaçant dans des conditions entièrement comparables. Considérons une *portion* de surface S — par exemple une portion du plan $x = 0$ — le long de laquelle nous choisirons arbitrairement (quoique, au besoin, avec certaines conditions de régularité) des données de Cauchy et voyons si aux données ainsi assignées correspondra, au moins dans le voisinage de S , une solution de l'équation (5).

Il faut d'ailleurs encore préciser. Dans les conférences qu'il a prononcées à l'Université de Paris, en 1913-14, un géomètre américain dont nous déplorons la perte, Maxime Bôcher, insistait à juste titre sur la nécessité de bien définir ce qu'on acceptera comme solutions d'un problème de cette espèce, définition qui n'a pas toujours été assez nettement spécifiée par les auteurs. Pour le moment, contentons-nous, à ce point de vue, d'observer que la région de l'espace voisine de S est divisée par cette surface en deux régions partielles 1 et 2, de sorte qu'on peut se proposer:

soit de trouver une solution valable dans l'une et dans l'autre de ces deux régions partielles;

¹ Il suffit, par exemple, pour le voir, d'imaginer que le domaine V soit creusé d'une cavité V' , dont la frontière S' servira également de frontière supplémentaire au domaine restant V_1 . Si la fonction harmonique cherchée ne doit être définie que dans V_1 , on peut se donner arbitrairement, non seulement ses valeurs sur S , mais ses valeurs sur S' .

soit (par analogie avec ce qui se passe dans le problème de Dirichlet) de définir une solution d'un côté seulement de S .

La solution peut-elle exister des deux côtés de S ? *Il n'en peut être ainsi* (la surface S étant elle-même analytique) *que si les deux données de Cauchy g et h sont analytiquement distribuées le long de cette surface.* En effet, d'après une remarque de Duhem [13], les deux solutions partielles définies respectivement dans 1 et dans 2 doivent nécessairement former, par leur ensemble, une fonction harmonique unique, laquelle est analytique.

L'existence de la solution même d'un côté de la surface exige, entre les deux fonctions g et h , une relation qui, lorsque l'une d'elles est donnée, définit l'autre à une fonction analytique près¹. C'est ce que l'on peut voir en traçant une surface auxiliaire Σ qui, avec S , délimite un volume V dans lequel une fonction harmonique peut être définie par des données de Dirichlet, coïncidant avec g le long de S et arbitraires le long de Σ . La fonction de Green $G(M, P)$ relative à V étant, d'autre part, analytique dès que les deux points dont elle dépend ne s'approchent pas l'un de l'autre, on aura, au voisinage de S ,

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_S \int \frac{dG(M, P)}{dn_M} u_M dS_M + \text{fonct. analyt.} = u_1 + \text{fonct. analyt.} \quad (7)$$

et, par conséquent, on devra avoir, pour la dérivée normale,

$$h = \frac{du_1}{dn} + \text{fonct. analyt.} \quad (7')$$

En l'absence d'une relation de cette espèce, le problème de Cauchy est impossible. Ce n'est pas lui, mais le problème de Dirichlet ou un problème analogue, qui est ce que nous appellerons « correctement posé », c'est-à-dire possible et déterminé.

Cette conclusion, lorsque nous l'avons formulée, a étonné autour de nous plusieurs géomètres. Peu importe, nous a-t-on

¹ Lorsque S est plan, ce second problème se ramène au premier, en supposant l'une des deux données g, h nulle et étendant la solution d'un côté à l'autre par réflexion à la manière de Schwartz. Mais la méthode indiquée dans le texte a l'avantage de s'étendre aux surfaces courbes et aussi à toutes les équations (linéaires analytiques) du type elliptique.

objecté, que les données g, h ne soient pas analytiques, puisque, d'après le théorème classique de Weierstrass, on peut les remplacer par des fonctions analytiques (et même des polynômes) avec des erreurs aussi petites qu'on le veut.

La réponse à cette objection met en évidence un aspect remarquable du problème. La question n'est évidemment pas de savoir si l'on commet une erreur très petite sur des données, mais si l'on commet une erreur très petite sur la solution. Or, ici, les deux sont loin de revenir au même, comme le montre l'exemple de l'équation à deux variables indépendantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5')$$

avec les données initiales

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= A \sin ny. \end{aligned} \quad (8)$$

La fonction h ainsi définie est nécessairement très petite en même temps que le coefficient A . Or la solution, savoir

$$\frac{A}{n} \sin ny \operatorname{Sh} nx, \quad (8')$$

prend, si petit que soit x (du moment qu'il n'est pas nul) et si petit que soit A , des valeurs énormes, du moment que n est très grand, c'est-à-dire du moment que la fonction h est oscillatoire à période très courte¹.

¹ La recherche des surfaces minima se ramène, comme on sait, à l'intégration de l'équation (5'), les coordonnées cartésiennes x, y, z étant fonctions harmoniques de deux paramètres ξ, η . Les formules de Schwarz qui déterminent la surface S passant par une ligne donnée L et inscrite le long de cette ligne à une développable donnée \mathcal{D} , sous la supposition que L et \mathcal{D} soient analytiques, résolvent un problème de Cauchy relatif à l'équation (5'). On voit que de très petites altérations sur la distribution des plans tangents à \mathcal{D} le long de la ligne L peuvent modifier du tout au tout la forme de la surface cherchée au voisinage, si immédiat qu'il soit, de L .

Le même problème avait, comme on sait [10] été résolu auparavant par O. BONNET et par BJÖRLING [3]. Ces travaux — particulièrement les deux Notes d'Ossian Bonnet — manifestent nettement le point de vue adopté, en la matière, pendant le siècle dernier. Il n'y est fait aucune distinction entre une fonction donnée pour des valeurs réelles de la variable et une fonction définie dans le champ complexe.

Avant de quitter le problème de Dirichlet, lequel sera repris dans les conférences suivantes, rappelons que son exemple est un de ceux qui illustrent le mieux le précepte rappelé par Bôcher. Il faut définir avec précision chacune des deux propriétés que l'on impose à la solution cherchée. C'est PAINLEVÉ qui, le premier [31], a précisé ce que l'on doit entendre en disant qu'une fonction « prend », sur une ligne ou une surface donnée, des valeurs données. P étant un point déterminé quelconque de la ligne ou de la surface S en question, M un point du domaine Ω qu'elle limite, il faut que u_M tende vers u_P lorsque M tend vers P le long d'un chemin quelconque intérieur à Ω .

D'autre part, u doit satisfaire aux équations aux dérivées partielles. Ceci implique, en principe, l'existence des dérivées secondes (au moins celles qui figurent dans l'équation) et, par conséquent, la continuité des dérivées premières. On a pu d'ailleurs remplacer ces conditions par d'autres moins restrictives dont l'énonciation ne rentre pas dans l'exposé actuel (sauf en un point dont il sera parlé plus loin). Mais une circonstance remarquable est l'apparente contradiction qui existe entre cette condition et la nature des données de Dirichlet, lesquelles ne sont nullement assujetties à être dérivables même une fois. Il en résulte que la surface S sur laquelle ont été prises les données de Dirichlet est en général, pour la solution, une surface singulière, la solution ainsi engendrée étant, au contraire, analytique et holomorphe dès qu'on s'éloigne de cette surface.

Si l'on renonce à cette précision, on peut changer complètement le caractère du problème, et celui-ci peut devenir indéterminé. Un exemple classique est celui de la fonction $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, harmonique et régulière dans tout l'intérieur de la sphère S ($x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$) et qui, sur toute la surface de cette sphère, prend la valeur constante $\frac{1}{2a}$, ceci cessant seulement d'avoir lieu au sens précisé par Painlevé pour l'origine des coordonnées, non sans qu'il n'y ait encore des chemins intérieurs à S et aboutissant en O (tous ceux qui ont un contact du second ordre avec S) avec la valeur limite $\frac{1}{2a}$ pour u .

IV

Doit-on conclure de ce qui précède que le théorème de Cauchy-Kowalewski cesse d'être valable dès qu'on ne suppose pas les données analytiques ?

La réponse n'est pas aussi simple ni aussi absolue. Au lieu de l'équation des potentiels, considérons l'équation des ondes sphériques

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad (9)$$

qui gouverne les petites oscillations d'un milieu homogène remplissant tout l'espace. De telles oscillations seront parfaitement déterminées si l'on se donne les *conditions initiales*

$$u(x, y, z, 0) = g(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = h(x, y, z) \quad (10)$$

ce qui revient à se donner, à cet instant initial, les déplacements (infinitésimaux) et les vitesses des différentes molécules. On voit qu'on est précisément en présence des données de Cauchy. Or le problème ainsi posé admet une solution bien déterminée, donnée par la formule classique de Poisson. Etant donnée l'interprétation du problème, on ne saurait d'ailleurs concevoir qu'il en soit autrement et que l'existence de la solution soit subordonnée à l'analyticité des données initiales.

On ne saurait non plus concevoir, dans ce nouveau problème, l'intervention d'expressions analogues à celle que donne notre formule (8'), et qui se présenteraient forcément si les valeurs de la solution étaient profondément liées aux coefficients des développements de g et de h en séries entières. S'il en était ainsi, le phénomène de la propagation du son, qui est régi par l'équation (9), nous paraîtrait régi par le pur hasard et nous n'y pourrions reconnaître aucune loi, puisqu'il serait totalement bouleversé lorsque les données subiraient des altérations imperceptibles à nos moyens d'observation.

Ainsi, entre les équations (5) et (9), la différence apparaît totale sous le point de vue qui nous occupe ¹.

La signification physique de chacune de ces deux équations nous fait comprendre cette différence, puisqu'un problème physique relatif à un milieu régi par l'équation des ondes sphériques se traduit analytiquement par un problème de Cauchy tandis qu'aucun problème de Cauchy relatif à l'équation (5) n'est posé par l'application concrète. Celle-ci nous offre donc, et va continuer à nous offrir un guide sûr pour discerner la vérité au milieu de discordances aussi paradoxales, au premier abord, que celles qui précèdent.

Il nous importe cependant de savoir distinguer les unes des autres, par un critère d'ordre purement mathématique, les équations aux dérivées partielles qui se comportent de manière si différente, pour ne pas dire si opposée. C'est à quoi l'on arrive à l'aide de la forme caractéristique (3). L'examen de cette forme quadratique conduit à distinguer différents types d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre.

I. La forme quadratique (3) peut être *définie*, c'est-à-dire comprendre autant de carrés indépendants qu'il y a de variables indépendantes dans l'équation, ces carrés étant tous du même

¹ Il est même impossible de poser d'une manière analogue le problème de Cauchy actuel et le problème de Dirichlet pour l'équation (5). Dans ce dernier, nous avons vu que la fonction g , représentant les valeurs données de la fonction cherchée le long de S , pouvait, par exemple, avoir des dérivées premières discontinues, et que de telles singularités s'effacent, se noient en quelque sorte, dès qu'on s'écarte si peu que ce soit de S en entrant dans le domaine Ω . Rien de pareil ne se produit pour l'équation des ondes sphériques: si une solution u de cette équation était continue ainsi que ses dérivées premières pour $t = +\varepsilon$, elle le serait aussi pour $t = 0$. C'est ce que l'on peut voir en écrivant la formule de Poisson à partir de $t = +\varepsilon$. Les discontinuités, pour les équations du type hyperbolique, ne s'effacent pas comme pour l'équation des potentiels: elles se propagent par ondes.

On ne peut pas, d'autre part, introduire des discontinuités du premier ordre, c'est-à-dire portant sur les dérivées premières, se produisant sur des hypersurfaces situées dans la région $t \geq 0$. Si de pareilles discontinuités étaient admises, les problèmes perdraient tout sens. Soit, en effet, S une telle hypersurface, à orientation d'espace (voir plus loin): des deux côtés de cette surface, on pourrait se poser le problème de Cauchy, les valeurs de u étant les mêmes de part et d'autre, mais les valeurs de la dérivée normale étant choisies arbitrairement de chaque côté. Il n'y a évidemment aucun intérêt à considérer comme une solution unique de l'équation l'ensemble des deux fonctions différentes ainsi formées dans les deux régions.

Les phénomènes qui obéissent à des équations telles que (9) peuvent donner lieu à des « ondes de choc » ou discontinuités du premier ordre. Mais les lois qui régissent cette sorte de discontinuités ne peuvent plus se déduire des seules propriétés mathématiques de l'équation: un appel direct aux principes dynamiques ou physiques qui régissent le phénomène est nécessaire pour les établir.

signe. L'équation aux dérivées partielles est alors dite du type *elliptique*.

II. Si le discriminant de la forme caractéristique est nul¹, c'est-à-dire si celle-ci ne comprend pas son nombre normal de carrés indépendants, l'équation est du type *parabolique*.

III. Enfin, si, le discriminant étant différent de zéro, la forme caractéristique est *indéfinie*, autrement dit si elle est susceptible de valeurs tant positives que négatives, les carrés dont elle se compose n'étant pas tous de même signe, on a affaire au type *hyperbolique*.

Toutefois, eu égard à ce dernier, une distinction est nécessaire. Toutes les équations aux dérivées partielles hyperboliques introduites par des applications dynamiques ou physiques appartiennent au type hyperbolique que nous appellerons *normal*, dans lequel la forme caractéristique a tous ses carrés de même signe à l'exception d'un seul. Dans ce cas, le cône caractéristique (ainsi qu'il arrive pour un cône du second degré dans l'espace ordinaire) se compose de deux nappes distinctes et divise l'espace en trois régions, deux intérieures et une extérieure, au lieu que, pour une équation hyperbolique non normale [9], le cône caractéristique ne se compose que d'une seule nappe et divise l'espace en deux régions seulement, aucune des deux ne méritant d'ailleurs plus que l'autre d'être dénommée intérieure².

Pour une équation hyperbolique normale, il y a, en chaque point, indépendamment des plans caractéristiques (c'est-à-dire tangents au cône caractéristique) deux sortes d'orientation de plans: ceux que, en s'inspirant de la Théorie de la Relativité, on peut appeler « orientés dans l'espace », c'est-à-dire qui sont extérieurs au cône caractéristique (un plan parallèle infiniment voisin coupant ce cône suivant une ellipse ou une surface fermée du genre ellip-

¹ En fait, on n'a jamais eu à considérer d'autres équations paraboliques que celles pour lesquelles la forme caractéristique est semi-définie, et qui correspondent aux équations du type hyperbolique que nous appelons normal.

² Certaines équations du type hyperbolique non normal ont été étudiées par M. COULON [9] et la plus simple d'entre elles, savoir $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}$, par M. HAMEL [21], cette dernière à propos d'un problème de Géométrie. Pour aucune d'entre elles, on ne connaît de problème correctement posé, au sens adopté dans ce qui précède.

soïde) et ceux qui sont « orientés dans le temps », c'est-à-dire qui coupent le cône caractéristique suivant deux génératrices. Une surface ou hypersurface S non caractéristique peut donc être elle-même, suivant la situation de son plan tangent en un quelconque de ses points, orientée dans l'espace ou orientée dans le temps.

Toutes les équations linéaires du type elliptique donnent lieu aux mêmes conclusions que l'équation des potentiels. Tout au moins, c'est ce que l'on peut démontrer par les mêmes méthodes lorsque l'équation est à coefficients analytiques, en formant d'abord une « solution élémentaire » analytique et holomorphe tant que les deux points dont elle dépend ne s'approchent pas l'un de l'autre. Il en sera de même pour la fonction de Green correspondant à un domaine quelconque, par exemple à celui qui est formé par la surface S et une portion de surface auxiliaire Σ , de sorte que le raisonnement présenté plus haut s'appliquera de nouveau. Il permettra encore de montrer que, la surface S qui porte les données étant analytique et la première donnée g étant choisie, la condition que le problème de Cauchy soit possible détermine la seconde donnée h à une fonction analytique près, c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$h = h_1 + H, \quad .$$

h_1 pouvant être calculé à l'aide de g et H étant nécessairement analytique. En particulier, si g est identiquement nul (ou analytique), h devra lui-même être analytique pour que le problème soit possible.

Il en est tout autrement pour les équations hyperboliques ou, plus exactement, du type hyperbolique normal. Pour toute équation de cette nature, une surface S à orientation d'espace en chacun de ses points permet de se poser un problème de Cauchy dans lequel les données ne sont assujetties à aucune condition d'analyticité.

Une circonstance curieuse se présente toutefois lorsque le nombre $n + 1$ des variables indépendantes augmente. Les formules de résolution du problème de Cauchy introduisent en effet les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $\frac{n + 1}{2}$ (si n est impair)

pour g et jusqu'à l'ordre $\frac{n-1}{2}$ pour h . Ceci, en toute rigueur, ne suffit pas pour démontrer que les fonctions g , h doivent être dérivables jusqu'à l'ordre en question pour que le problème soit possible; mais on peut démontrer en toute rigueur une conclusion très voisine de celle-là: par exemple, pour l'équation, à $n+1 = 2n_1$ variables, analogue à celle des ondes sphériques, la fonction g étant supposée identiquement nulle, si l'on prend la moyenne des valeurs de h sur une sphère quelconque de l'espace à n dimensions défini par $x = 0$, il faudra, pour la possibilité du problème, que cette quantité soit dérivable jusqu'à l'ordre n_1 par rapport au rayon de la sphère. Cette condition de possibilité assez inattendue établit une sorte de passage entre une équation de type hyperbolique normal, dont la forme caractéristique comprend un grand nombre de carrés d'un même signe contre un seul du signe contraire, et une équation du type elliptique dont la forme caractéristique a tous ses carrés du même signe et pour laquelle, l'une des données étant nulle, nous savons que l'autre doit être analytique.

Mais un autre correctif beaucoup plus important doit être apporté à notre constatation précédente. Comme nous l'avons dit, le problème de Cauchy relatif à l'équation (9) et à la multiplicité $t = 0$ permet de déterminer, en fonction des conditions initiales, les oscillations d'un milieu homogène *remplissant l'espace entier*. Si ce milieu — un gaz, pour fixer les idées — est au contraire limité par des parois solides — soit, par exemple, qu'il soit contenu dans un récipient soit, au contraire [13], que l'espace renferme une sphère solide pulsante —, le problème est autre. A la paroi solide considérée dans l'espace ordinaire correspond, dans l'espace-temps, un hypercylindre S_2 , et nous avons à déterminer l'inconnue u dans une région Ω de l'espace-temps limitée d'une part par S_2 , de l'autre par notre portion S_1 d'espace ordinaire considérée pour $t = 0$. Les conditions propres à déterminer u seront alors:

les données de Cauchy sur la portion d'espace ordinaire S_1 ;
sur S_2 , des données analogues à celle de Dirichlet, nous voulons dire une seule donnée (la valeur de u ou celle de sa dérivée normale ou une de leurs combinaisons linéaires, etc.) en chaque point.

Autrement dit, nous sommes ici en présence d'un *problème mixte*¹. Il en sera ainsi toutes les fois que, parmi les frontières limitant la région de définition de l'inconnue u , il y en aura d'orientées dans le temps, comme c'est le cas pour S_2 .

Les équations du type elliptique gouvernent les phénomènes d'équilibre (équilibre électrique, élastique, calorifique, etc.). Les équations du type hyperbolique normal gouvernent les phénomènes du mouvement ou, plus généralement, d'état variable avec intervention d'inertie ou de phénomène équivalent (inertie électro-magnétique), inertie grâce à laquelle les perturbations introduites dans le mouvement se propagent en général par ondes, c'est-à-dire, en langage mathématique, par caractéristiques.

Une seule exception à cet égard: les liquides parfaits. Dans ce cas, entièrement théorique d'ailleurs, le mouvement obéit à l'équation des potentiels (5), l'absence de caractéristiques réelles correspondant au fait que toute perturbation se propage de manière instantanée dans toute la masse, et non par ondes.

Mais, même dans ce cas du liquide incompressible parfait, l'influence de l'inertie sur le caractère du phénomène se manifeste dès qu'il y a une surface libre, surface dont on a à étudier le mouvement. Un beau et important Mémoire de M. Volterra [42] montre (du moins en ce qui concerne les petites oscillations) qu'on a alors affaire à un problème mixte: les parois mouillées introduisent des conditions aux limites analogues à celles de Dirichlet — d'une manière précise, des conditions de Neumann —, mais, à la surface libre, on a des conditions initiales (relatives à l'origine des temps) qui sont du type de Cauchy².

V

Le cas parabolique est celui qui se présente pour l'état variable de la propagation de la chaleur, laquelle se fait sans inertie, et

¹ Cette catégorie de « problèmes mixtes » est complètement différente de celle dont nous avons vu l'intervention dans le cas elliptique. Il serait utile d'introduire, pour deux idées aussi nettement distinctes, deux dénominations différentes.

² L'équation des potentiels s'applique au mouvement considéré dans toute la masse du liquide. Mais si, comme il est naturel de le faire en l'espèce, on porte son attention sur ce qui se passe à la surface libre, en prenant pour inconnue par conséquent l'altitude z de cette surface en fonction de x , y , t , on est conduit, comme nous l'avons fait voir précédemment [20e], à une équation intégral-différentielle, que ses propriétés rapprochent visiblement du type hyperbolique.

aussi dans l'étude des phénomènes (mouvement des fluides visqueux) où des résistances passives masquent en quelque sorte l'inertie (et à la limite, pourraient en annuler complètement l'effet).

Ce cas sera traité dans un exposé suivant. Sans entrer, par conséquent, dans son examen, disons que le rôle qui, pour le cas elliptique, était dévolu aux fonctions analytiques, appartient ici (au moins en ce qui concerne les conditions de possibilité du problème de Cauchy) aux fonctions que MM. GOURSAT et GEVREY [18a, 17] ont appelées fonctions de classe 2, en appelant, d'une manière générale, « fonctions de classes α » ($\alpha > 1$) celles dont les dérivées existent pour tous les ordres et satisfont aux inégalités ¹

$$|h^{(p)}(x)| < \frac{M \Gamma(\alpha p)}{\rho^p}$$

où M et ρ sont deux nombres positifs indépendants de l'indice p de dérivation (mais pouvant varier d'une fonction de la classe considérée à l'autre).

Le problème que nous envisageons ici enrichit ainsi la Théorie des fonctions de variables réelles, délimitant, parmi ces fonctions, des catégories nouvelles et intéressantes. En particulier, on est ainsi conduit à la notion de *fonction quasi-analytique*, si remarquablement élucidée par les célèbres travaux de MM. BOREL, DENJOY, CARLEMAN et, à un point de vue un peu différent, de M. SERGE BERNSTEIN: les classes α , pour $\alpha > 1$, se distinguent, en effet, complètement, à ce point de vue, de celle qui correspond à $\alpha = 1$, c'est-à-dire de celle des fonctions analytiques; elles ne sont que quasi-analytiques, le prolongement analytique n'étant pas déterminé.

Ce n'est pas le seul problème relatif aux fonctions de variables réelles qui se pose à propos de la théorie qui nous occupe. Indiquons en un qui n'est pas encore résolu ou, du moins, qui demanderait à être « plus résolu » suivant la parole célèbre de Poincaré. Nous avons dit que pour l'équation des ondes sphériques le

¹ Il est remarquable que des inégalités du même type, mais avec $\alpha < 1$, se soient également introduites en Analyse: ce sont elles qui caractérisent les fonctions entières de genre fini.

problème de Cauchy, lorsque les données en sont portées par l'hyperplan $t = 0$, est correctement posé, ainsi que le fait prévoir son interprétation physique. Mais il en est tout autrement lorsque, l'équation aux dérivées partielles restant la même, on prend les données de Cauchy le long d'une multiplicité orientée dans le temps, par exemple de l'hyperplan $x = 0$, soit

$$u(0, y, z, t) = g(y, z, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z, t) = h(y, z, t).$$

Pour montrer que le problème de Cauchy ainsi posé ne l'est pas en général correctement, il suffit de considérer le cas où les fonctions g, h sont indépendantes de t . Il devra alors en être de même pour la solution si elle existe (en vertu du théorème d'unicité sur lequel nous reviendrons plus loin), de sorte que celle-ci devra satisfaire à l'équation (5), pour laquelle nous avons vu que le problème est, en général, impossible. Mais, comme dans les cas précédents, il est intéressant d'aller plus loin et, supposant, par exemple, la première donnée g nulle, de chercher comment il faudra choisir la seconde. Nous avons obtenu [20g] un système de conditions nécessaires et suffisantes que doit remplir cette dernière pour que le problème admette une solution: en particulier, la fonction cherchée, quoique n'étant pas forcément dérivable, admet nécessairement, et un nombre infini de fois, une série d'opérations dans lesquelles les différentiations par rapport à y et à z alternent avec des quadratures par rapport à t . Mais la réponse est donnée sous une forme qui laisse beaucoup à désirer sous le rapport de la simplicité et qui, de plus, manque d'un caractère essentiel, à savoir l'invariance par rapport aux transformations linéaires (transformations de Lorentz) qui conservent l'équation aux dérivées partielles.

Il y a donc là un problème nouveau de théorie des fonctions de variables réelles; et ce problème se distingue de tous ceux qui ont été posés jusqu'ici dans cet ordre d'idées par le fait de ne prendre naissance que pour les fonctions de deux variables au moins. Si, en effet, les données de Cauchy n'avaient à dépendre que d'une variable, c'est que l'équation aux dérivées partielles n'en mettrait en jeu que deux et, dans ce cas, la distinction entre

variétés d'espace et variétés de temps tombe : dans l'équation des cordes vibrantes ou des tuyaux sonores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (9')$$

les variables x et t jouent un rôle entièrement analogue.

VI

Ce cas de deux variables indépendantes dans lequel l'équation, supposée linéaire et hyperbolique, peut s'écrire sous la forme connue de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = \varphi(x, y) \quad (11)$$

a été serré de plus près au point de vue qui nous occupe ¹. La remarque initiale est celle de M. Picard [33c], d'après laquelle les données de Cauchy ne sont pas admissibles sur un arc de courbe le long duquel les deux coordonnées x, y ne sont pas toutes deux monotones. Si, par exemple, x est monotone, mais que y ait un maximum, on a une figure telle que celle qui est représentée fig. 1 et, dans ce cas, conformément à ce qui précède, les problèmes correctement posés sont des problèmes mixtes (données de Cauchy sur un des arcs partiels, une seule donnée en chaque point sur l'autre).

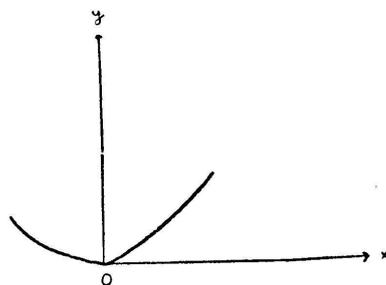


Fig. 1.

Un cas limite de la figure précédente est celui dans lequel, l'un des arcs partiels étant quelconque (quoique sans extremum de

¹ Certains des résultats dont nous allons parler ont été d'ailleurs étendus à des équations à plus de deux variables [25, 37a, 37b].

La récente théorie unitaire du champ de gravitation et d'électromagnétisme de M. Einstein [15] pose une question relative à la compatibilité de certains systèmes aux dérivées partielles. Cette question a été complètement élucidée par M. Cartan [8], mais dans l'hypothèse analytique. Il serait intéressant de se débarrasser de cette hypothèse, ainsi qu'on en doit présumer la possibilité, étant donné que les caractéristiques du système sont réelles.

x ou de y), l'autre serait remplacé par un segment de caractéristique issu d'une de ses extrémités et n'ayant pas d'autre point commun avec lui (fig.): ce cas, qui a fait tout particulièrement l'objet des études de M. PICARD [33*b*] et aussi de M. GOURSAT [18*b*], n'est pas, au fond, distinct de celui dont nous venons de parler ¹.

Mais ceci a conduit M. Goursat à envisager tous les cas de figure auxquels peuvent donner lieu deux arcs de lignes qui partent d'un même point A, chacun d'eux étant assujéti, pour son compte, à la condition de monotonie posée ci-dessus. Tout dépend des relations de position qui existent entre les deux arcs dont il s'agit et les caractéristiques issues du point A.

Si les deux arcs sont dans des angles opposés formés par les caractéristiques, la condition de monotonie est remplie sur la courbe entière formée par leur réunion, et on a le droit de se donner les données de Cauchy.

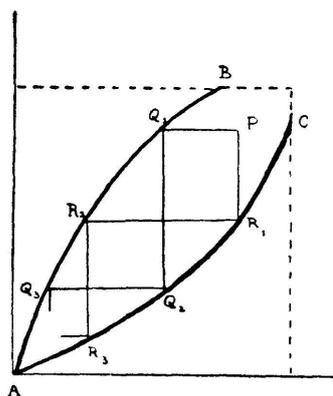


Fig. 2.

S'ils sont dans deux angles adjacents, on a la figure considérée il y a un instant, et qui donne lieu à un problème mixte.

Mais il reste le cas (fig. 2) où les deux arcs sont dans un seul et même angle formé par les caractéristiques: on constate alors que la donnée admissible est unique sur chacun des arcs. Un tel problème ne correspond pas à une application physique, mais il se présente comme cas limite de problèmes physiquement posés (milieux à une dimension limités dans les deux sens). Il est déterminé [18*c*, 20*d*] si on impose ² la continuité au point A.

En combinant ces divers résultats on peut, comme l'a indiqué M. Picard dans son enseignement à la Sorbonne (1907) et dans

¹ Le cas d'une caractéristique se trouve participer des deux entre lesquels il est intermédiaire (lignes inclinées dans un sens ou dans l'autre par rapport à la caractéristique), grâce au fait que la donnée de u le long d'une caractéristique revient, pratiquement, à l'ensemble des deux données de Cauchy: la dérivée de u qui intervient dans les calculs est, en effet, celle qui est prise le long de la caractéristique elle-même.

² Si on renonce à cette condition, ainsi que l'ont fait quelques auteurs [35, 30], il est aisé de voir que le problème devient largement indéterminé.

ses *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles* [33d], assigner les données que l'on peut choisir le long de contours plus compliqués, où chacune des deux coordonnées peut présenter un nombre arbitraire de maxima ou de minima.

VII

Un cas particulièrement intéressant est celui d'un contour fermé. Pour ne pas multiplier à l'excès les hypothèses possibles, bornons-nous au cas d'un contour convexe, ou tout au moins le long duquel chacune des coordonnées caractéristiques n'admet

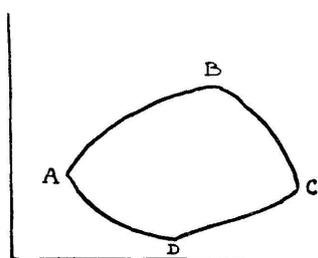


Fig. 3.

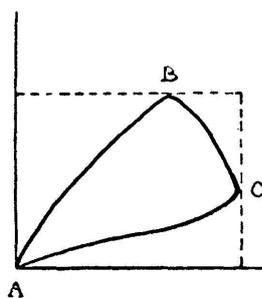


Fig. 3 bis.

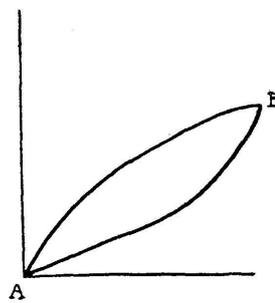


Fig. 3 ter.

qu'un seul maximum et un seul minimum. Avec M. HUBER [24], employons le mot *angle*, en le détournant de son sens habituel, pour désigner l'un des points qui correspondent à de tels maxima ou minima. Notre contour sera donc en général un quadrangle ABCD (fig. 3), mais pourra aussi se réduire à un triangle ABC (fig. 3bis) ou même à un biangle AB (fig. 3ter). Dans le premier cas, les résultats généraux montrent qu'une solution de l'équation est déterminée si on se donne :

- les données de Cauchy sur l'un des arcs partiels, BC, par exemple;
- une seule donnée sur les deux arcs adjacents AB, CD;
- rien sur le quatrième arc AD.

Une question se pose alors d'elle-même. Peut-on, le long d'un tel contour fermé, se poser pour l'équation (11) le problème qui intervient dans le cas elliptique, à savoir le problème de Dirichlet ?

Comme l'a remarqué M. Sommerfeld [39a], ce point a attiré l'attention de DU BOIS REYMOND lui-même dans le travail fondamental [12] où, comme on sait [10, t. II], il reprend et généralise la méthode d'intégration de Riemann. Les deux auteurs dont nous venons de parler considèrent d'ailleurs comme probable qu'en effet, de telles données de Dirichlet peuvent être encore choisies dans le cas de l'équation hyperbolique (11).

Or la réponse est toute contraire. Pas plus que le problème de Cauchy ne convient au type elliptique, le problème de Dirichlet ne peut se poser pour le cas hyperbolique.

La manière la plus immédiate de le constater est de prendre pour contour portant les données un rectangle parallèle aux axes, c'est-à-dire à côtés caractéristiques. Ainsi qu'il est classique [10, t. II], une inconnue u , solution de l'équation (11), est déterminée dans tout ce rectangle si l'on donne ses valeurs le long de deux côtés adjacents: aucune donnée relative aux deux autres côtés ne peut donc être jointe à celles-là.

Considérons les autres formes possibles du contour. La réponse peut encore être donnée aisément en ce qui regarde un biangle ou un triangle. Dans ce dernier cas (fig. 3bis), nous savons que la connaissance des valeurs de u sur les deux côtés AB, AC suffit à déterminer cette fonction dans tout le rectangle circonscrit, donc aussi sur le troisième côté BC.

Le cas du biangle demande un peu plus d'attention. Reprenons, pour un instant, la figure 2. Les valeurs de u étant données le long de AB, AC, le calcul de cette fonction en un point P conduit [20d] à tracer deux lignes brisées $PQ_1 Q_2 \dots$, $PR_1 R_2 \dots$ à côtés caractéristiques (et tous dirigés dans le sens des x ou des y décroissants, si les arcs donnés AB, AC sont dans l'angle positif des parallèles aux axes menées par A), inscrites à l'angle formé par les deux arcs donnés, lignes polygonales qui tendent évidemment toutes deux vers le point A. La valeur de u en P, cette fonction étant assujettie à être continue en A, s'exprime par une somme de termes dont les uns sont proportionnels aux valeurs données aux sommets des lignes polygonales et les autres sont des intégrales définies le long des arcs partiels en lesquels ces sommets décomposent AB ou AC. Tout ceci reste valable lorsque les extrémités B, C des deux arcs issus de A coïncident, c'est-à-dire

lorsque la figure devient le triangle AB de la figure 3^{ter}. Mais s'il en est ainsi, l'expression ainsi formée est discontinue en B: il est clair, en effet, qu'à deux points P, P' très voisins l'un de l'autre et de B correspondent, par le tracé qui vient d'être indiqué, deux lignes polygonales très différentes entre elles.

On pourrait, de même, former, pour le même problème, une solution continue en B; mais elle serait alors discontinue en A.

Reste le cas du quadrangle. Nous en avons précédemment [20^f] traité un exemple simple, celui d'une ellipse quelconque, l'équation aux dérivées partielles étant simplement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 . \quad (11')$$

Cette équation, en raison de la forme bien connue de son intégrale générale, possède cette propriété que tout rectangle ABCD parallèle aux axes donne lieu, pour l'une quelconque u de ses solutions, à la relation

$$u_A + u_C = u_B + u_D . \quad (12)$$

Plus généralement, toute ligne polygonale fermée à côtés parallèles aux axes donne lieu à une relation de même forme entre les sommes de valeurs de u prises l'une aux sommets de rangs pairs, l'autre aux sommets de rangs impairs.

Dès lors, si l'ellipse E a ses axes parallèles aux axes de coordonnées, en particulier si elle est un cercle, on peut y inscrire une infinité de rectangles donnant lieu chacun à la relation (12), ce qui fait apparaître immédiatement l'impossibilité de se donner les valeurs de u en tous les points d'une telle ellipse. Plus généralement, si l'ellipse E est telle qu'on peut y inscrire une ligne polygonale fermée à côtés parallèles aux axes, on peut lui en inscrire une infinité d'autres, d'où encore une infinité de conditions de possibilité du problème. Il en sera ainsi si un certain argument h est commensurable avec π .

Si l'argument h est incommensurable avec π , les impossibilités apparaissent sous une autre forme, à savoir par la divergence de séries trigonométriques susceptibles de représenter la fonction de x et la fonction de y qui figurent dans l'intégrale générale (ou,

plus rigoureusement, par le fait que les constantes de Fourier correspondantes ne sont plus nécessairement bornées).

Certaines de ces considérations ont été notablement généralisées dans le travail de M. Huber. Ce que nous avons noté dans le cas du cercle s'étend de soi-même à un « deltoïde » quelconque, c'est-à-dire à tout quadrangle dans lequel on peut inscrire une infinité de rectangles parallèles aux axes.

On peut évidemment construire un tel deltoïde si l'on s'en donne trois côtés (sans fixer les extrémités libres des côtés extrêmes). La ligne qui fermera le deltoïde (fig. 4) sera alors le lieu du quatrième sommet d'un rectangle inscrit s'appuyant sur les trois côtés donnés.

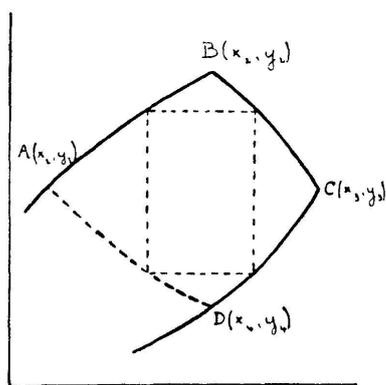


Fig. 4.

Pour tout deltoïde, il est clair que les valeurs de u ne peuvent être choisies que sur trois côtés seulement, celles qui sont relatives au quatrième s'en déduisant par l'égalité rectangulaire (12). Par contre, les données étant ainsi choisies, le problème de Dirichlet, qui

devient ainsi possible, devient indéterminé. Ce fait, qui apparaît aisément sur le cercle [20g], [24], se constate pour un deltoïde quelconque en remarquant qu'aux valeurs de u sur trois côtés on peut adjoindre celles de sa dérivée transversale sur le côté médian ¹.

Soit maintenant un quadrangle ABCD qui ne soit pas un deltoïde: on peut, avec M. Huber, transformer le problème de plusieurs façons, en formant (fig. 5), par la construction précédente, un deltoïde BCEF ayant trois côtés communs avec le quadrangle donné. Les valeurs de u le long de EF étant connues d'après ce que nous venons de dire, on est

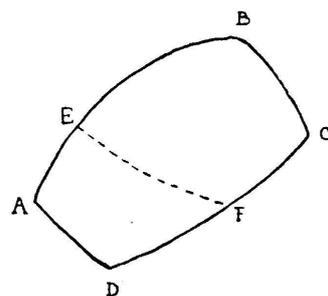


Fig. 5.

¹ On peut encore aisément former une solution de (11') s'annulant sur tout le périmètre du deltoïde de la figure 4 sans être identiquement nulle, de la manière suivante. Désignant par A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2) , C (x_3, y_3) , D (x_4, y_4) les quatre sommets, on choisira arbitrairement, dans l'intervalle (x_1, x_2) , le premier terme $\varphi(x)$ de la valeur de u , après quoi le second terme $\psi(y)$ sera défini, dans l'intervalle (y_1, y_2) , par la condition que

ramené à un problème de Dirichlet relatif, suivant la disposition de la figure, à un biangle, à un triangle ou à un quadrangle. Dans les deux premiers cas, l'impossibilité du problème (pour des données arbitraires) est démontrée¹.

Si ADEF est à nouveau un quadrangle, l'opération pourra être recommencée. Mais la discussion devient alors difficile en raison de la multiplicité des cas de figure possibles et il peut arriver que les opérations se continuent indéfiniment sans aboutir².

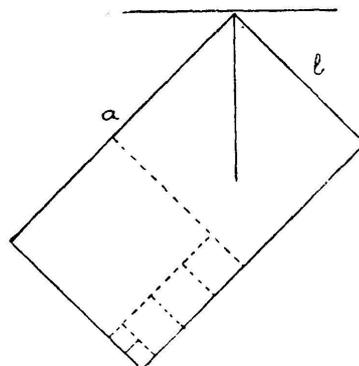


Fig. 6.

La question n'est donc pas complètement élucidée, en toute rigueur, pour le cas d'un quadrangle. De plus, tout ce que nous avons dit concernant ce cas ne vaut que pour l'équation (11'), la seule qui donne lieu à une égalité rectangulaire de la forme (12).

VIII

Les principes précédents ont déjà [25a, 37a, 23b, c, 43] reçu des généralisations étendues relatives aux équations d'ordre supérieur *totale*ment hyperboliques, c'est-à-dire, pour le cas des deux variables indépendantes, telles que l'équation aux coefficients angulaires des caractéristiques ait toutes ses racines réelles

$\varphi(x) + \psi(y)$ s'annule sur le côté AB; puis les conditions analogues relatives aux côtés BC, CD détermineront $\varphi(x)$ dans l'intervalle (x_2, x_3) , puis $\psi(y)$ dans l'intervalle (y_4, y_1) . La somme $\varphi(x) + \psi(y)$ ainsi formée, nulle, sur AB, BC, CD, le sera aussi sur DA, en vertu de l'identité rectangulaire.

¹ M. Huber conclut à la possibilité du problème dans le cas du biangle et dans ceux qui s'en déduisent par la transformation indiquée dans le texte. Nous avons dit plus haut la raison qui nous fournit une conclusion contraire.

² Prenons, par exemple, pour notre quadrangle, un parallélogramme ayant ses côtés a, b symétriquement inclinés sur les axes (fig. 6). Un tel parallélogramme est un deltoïde s'il est un losange. Dans le cas contraire, soit $a > b$, la construction de M. Huber revient à tracer, autant de fois que possible, à l'intérieur du parallélogramme donné, des losanges successifs adjacents les uns aux autres, jusqu'à ce que la bande parallélogramme restante, s'il y en a une, ait son côté parallèle à a plus petit que celui qui est parallèle à b . Opérant de même (mais avec interversion des rôles de a et de b) sur cette bande, et continuant ainsi, il est aisé de voir que cette suite d'opérations est celle même qui détermine, par l'algorithme d'Euclide, la commune mesure à a et à b . Elle se termine donc si cette commune mesure existe (d'où des conditions de possibilité du problème) et continue indéfiniment dans le cas contraire.

Dans ce dernier cas, une discontinuité devra, en général, se manifester au sommet au voisinage duquel les losanges partiels viennent s'accumuler.

et distinctes et, si le nombre des variables est supérieur à deux [40, 22], telles que le cône caractéristique se compose de nappes toutes réelles et emboîtées les unes dans les autres.

Le cas des équations totalement elliptiques (caractéristiques toutes imaginaires), lequel ne rentre pas dans le cadre de la conférence actuelle, a été, comme on sait, traité par E. E. LEVI.

Mais d'autres circonstances sont possibles, et, quoique non imposées par les applications, soulèvent des problèmes intéressants.

C'est d'abord le cas du *type mixte* étudié, sur une suggestion de M. Volterra, par M. Tricomi [41]. Dans l'équation linéaire

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (13)$$

les coefficients A, B, C, ... sont, en général, des fonctions x, y et il en est de même, par conséquent, de la quantité $AC - B^2$. Rien n'empêche donc que cette quantité ne puisse changer de signe suivant la position du point (x, y) dans le plan et, par conséquent, que l'équation soit tantôt elliptique, et tantôt hyperbolique. On peut, bien entendu, toujours, par une transformation ponctuelle, faire que la ligne de démarcation soit l'axe des x et, par conséquent, on obtient déjà un degré assez grand de généralité en s'adressant à l'équation

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (14)$$

qui est elliptique pour $y > 0$ et hyperbolique dans la région située au-dessous de l'axe des x . Dans cette dernière, on constate

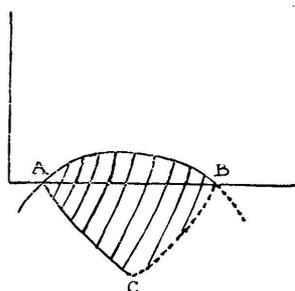


Fig. 7.

que l'équation peut se ramener à l'équation classique d'Euler et de Poisson (10) (la ligne singulière des coefficients entrant, toutefois, en ligne de compte: elle correspond précisément à l'axe des x). Grâce à cette circonstance, M. TRICOMI, par une étude d'ailleurs très délicate, mais qui a été simplifiée

sur un point par M. HOLMGREN [23e], arrive à montrer que l'on peut déterminer une solution de l'équation (14) par les données suivantes (fig. 7):

valeurs de u sur un arc AB ayant pour corde l'axe des x et situé dans la région elliptique;

valeurs de la même quantité sur un arc de caractéristique¹ issu de A et limité à la caractéristique analogue issue de B, la région où u est ainsi déterminé étant celle qui est limitée par l'arc supérieur et les deux caractéristiques.

L'équation un peu plus générale

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

réductible également à celle d'Euler et de Poisson, se traite d'une manière analogue: elle est de type mixte si l'entier m est impair; elle a été également étudiée pour m pair, où elle est partout de type elliptique, sauf le long de l'axe des x où elle a le caractère parabolique.

Si maintenant l'équation est d'ordre supérieur, elle peut participer des deux types en étant de *type composite*, c'est-à-dire en ayant, en chaque point, des caractéristiques dont les unes seront réelles, les autres imaginaires. La plus simple des équations de cette nature est l'équation du troisième ordre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 .$$

D'après le caractère elliptique de cette équation, il est à prévoir que le problème de Cauchy, consistant à se donner, pour $x = 0$, les valeurs de u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ doit être en général impossible; et c'est ce que l'on voit effectivement en prenant pour inconnue la quantité $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, assujettie à être harmonique. On a un problème correctement posé en se donnant les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}$ le long d'un contour fermé rencontré en deux points et deux seulement par une parallèle à l'axe des x , et les valeurs de u le long de l'un des deux arcs compris entre les points d'ordonnées extrêmes².

¹ A et B sont, pour les caractéristiques correspondantes, des points de rebroussement.

² On connaîtra ainsi, en effet, par la résolution d'un problème de Dirichlet, la fonction harmonique $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, après quoi il restera à opérer une quadrature par rapport à x , à partir de l'un des deux points où une parallèle à l'axe des x coupe le contour.

Soit maintenant l'équation du quatrième ordre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \quad (15)$$

laquelle peut évidemment aussi s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) = 0. \quad (15')$$

Pour la même raison que tout à l'heure, on ne peut pas se poser le problème de Cauchy relatif à $x = 0$. Mais il est également impossible de se poser, comme pour l'équation totalement elliptique (6), le problème « biharmonique », c'est-à-dire de se donner, le long d'un contour fermé, les valeurs de u et de sa dérivée normale. Cela se voit d'une manière particulièrement simple en prenant l'équation sous la forme (15') et, pour contour, un rectangle parallèle aux axes des X et des Y . Un système de données admissibles sera alors :

la dérivée normale tout le long du périmètre du rectangle ;
les valeurs de u le long de deux côtés adjacents (avec des relations de concordance évidentes aux extrémités de ces côtés).

La première série de données fournit en effet, par dérivation, les valeurs au contour de la fonction harmonique

$$s = \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} \quad (16)$$

et, celle-ci une fois calculée, la seconde série de données est bien celle qui convient à la détermination d'une solution de l'équation (16).

Le cas d'un contour circulaire, bien que ne se traitant pas avec la même simplicité, donne lieu à la même conclusion : les données biharmoniques n'y sont pas admissibles.

D'autres formes de contours — par exemple, l'équation étant prise sous la forme (15), un contour fermé comprenant (fig. 7) un segment d'axe des y — suggèrent encore d'autres systèmes de données [20j], les conclusions à cet égard restant, toutefois, insuffisamment établies.

IX.

L'équation aux dérivées partielles a été jusqu'ici supposée linéaire. Ce cas, nul n'en doute aujourd'hui, doit, dans toutes les applications physiques, être considéré uniquement comme une première approximation. Mais, précisément à ce titre, son étude devait devenir la première et servir de préparation à celle du cas général. On verra, dans les exposés suivants, particulièrement celui de M. Schauder, que cette dernière est déjà entreprise et même notablement avancée en ce qui regarde le problème de Dirichlet. Elle l'est aussi, grâce également à M. SCHAUDER [36], en ce qui regarde le problème de Cauchy (et, par conséquent, le cas hyperbolique) à $n > 2$ variables indépendantes, le cas de $n = 2$ ayant été traité dans des recherches de M. Hans LEWY [26] sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Dès que l'équation n'est plus linéaire — ou, tout au moins, « quasi linéaire » au sens le plus restreint, c'est-à-dire linéaire par rapport aux dérivées secondes avec des coefficients fonctions données des seules variables indépendantes —, elle n'est plus, *a priori*, d'un type donné: pour nous borner au cas de deux variables indépendantes, l'équation

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \quad (1 \text{ bis})$$

a ses caractéristiques définies par l'équation différentielle

$$F_r dy^2 - F_s dx dy + F_t dx^2 = 0 \quad (15'')$$

et, ici, les coefficients F_r , F_s , F_t , dérivées partielles de F par rapport à r , s , t , dépendent en général de u lui-même et de ses dérivées, de sorte que, en un même point (x, y) du plan, la quantité $F_r F_t - F_s^2$ peut être positive ou négative suivant qu'on s'adresse à une solution ou à une autre de l'équation ¹. On ne peut donc assigner un type déterminé à cette dernière tant que u est lui-même inconnu.

¹ Un problème très curieux, analogue, mais avec plus de difficulté, à celui du type mixte traité par M. Tricomi, serait, pour une équation telle que (13) l'étude des solutions voisines d'une de celles qui annulent en tout point le discriminant du trinôme (3) correspondant.

Toutefois, cette sorte de cercle vicieux cesse de se présenter lorsque les données sont celles de Cauchy le long d'une ligne déterminée L : on connaît alors en effet, en chaque point de L , les valeurs numériques de u , p , q et, comme on sait, on peut en déduire celles de r , s , t . On a donc le droit, pour une équation telle que (1 bis) (ou pour une équation analogue à un nombre quelconque de variables) de parler d'un problème de Cauchy elliptique¹, parabolique ou hyperbolique.

M. SCHAUDER traite le problème de Cauchy du type hyperbolique normal (le nombre n des variables étant quelconque) pour une équation quasi-linéaire, mais en un sens plus large que tout à l'heure, les coefficients des dérivées secondes pouvant dépendre, non seulement des variables indépendantes, mais de u et de ses dérivées premières². Il s'en faut qu'une pareille généralisation soit banale et facile: c'est ce dont on se rend immédiatement compte d'après la remarque, faite plus haut, que les données de Cauchy, pour donner lieu à un problème possible, doivent être dérivables jusqu'à un ordre qui croît, et qui croît indéfiniment, avec n . Il y a même lieu de chercher à améliorer à ce point de vue la belle méthode de M. Schauder, car son analyse suppose la dérivabilité des données au moins jusqu'à l'ordre n , tandis que l'exemple du cas linéaire conduit à présumer qu'il suffit d'aller jusqu'à l'ordre $\frac{n}{2}$.

Remarquable est le rôle indispensable que jouent, dans ce travail comme dans les résultats analogues qui seront exposés à propos du cas elliptique, les principes empruntés au Calcul fonctionnel.

D'autre part, il est essentiel de noter que, jusqu'aux recherches

¹ Dans le cas général comme dans le cas linéaire, une équation analytique du type elliptique n'admet que des solutions analytiques en tout point intérieur à leur domaine d'existence. Ce théorème, énoncé par M. Hilbert, a reçu plusieurs démonstrations dues soit à M. Serge Bernstein, et à ses successeurs, soit à M. Hans Lewy. On est toutefois obligé de supposer, pour les solutions en question, l'existence de dérivées continues jusqu'à l'ordre trois (Serge Bernstein) ou même quatre (Hans Lewy).

D'après cela, l'un des raisonnements que nous avons présentés en commençant pour le type elliptique reste valable lorsqu'on ne suppose plus l'équation linéaire: un problème de Cauchy elliptique relatif à une équation analytique, la ligne S qui porte les données étant elle-même supposée analytique, mais non les données elles-mêmes, ne peut pas admettre de solution *des deux côtés* de S , étant toutefois supposé qu'il s'agit de solutions à dérivées continues (même sur S) jusqu'au troisième ordre.

² Il est à peine besoin de dire que la multiplicité qui porte les données doit avoir une orientation d'espace.

dont nous sommes en train de parler, on ne pouvait pas affirmer, en toute rigueur, qu'une équation *non analytique* de la forme (1) (supposée algébriquement vérifiable) admet toujours des solutions, puisque la seule réponse classiquement connue est celle que fournit le théorème de Cauchy-Kowalewsky. On n'avait jamais répondu à une question de ce genre, même pour une équation linéaire, jusqu'aux importants Mémoires [1, 27] dans lesquels M. Serge Bernstein et le regretté Lichtenstein ont établi la possibilité de la représentation conforme pour une portion de surface non analytique.

On verra dans les conférences suivantes comment le problème est résolu dans le cas elliptique. La réponse, pour le cas hyperbolique résulte des travaux que nous venons de citer.

X

Après nous être demandé si la solution du problème de Cauchy¹ existe, nous avons à nous demander si elle est unique (le cas caractéristique excepté, bien entendu). La question se pose même lorsque toutes les données du problème sont analytiques, car le théorème de Cauchy-Kowalewski affirme seulement qu'il n'y a qu'une seule solution *holomorphe*.

Pour une équation linéaire à coefficients analytiques², le théorème en question — autrement dit, le fait qu'une telle équation (supposée sans second membre) n'admet, pour des données de Cauchy nulles, d'autre solution que zéro — a été établi par M. HOLMGREN [23a].

Il suffirait d'ailleurs, comme on le constate aisément [20c], de l'établir pour une équation linéaire à *coefficients quelconques*: la question serait, du même coup, élucidée pour le cas général.

Une Note de HAAR [19a, b] ouvre une première voie à cet effet en résolvant le problème pour l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (pour laquelle les méthodes clas-

¹ En ce qui regarde le problème de Dirichlet pour le type hyperbolique nous avons, plus haut, constaté des cas d'indétermination.

² M. HOLMGREN opère, ainsi qu'il est légitime, sur un système d'équations linéaires analytiques du premier ordre.

Une méthode particulière, d'une nature toute différente, s'applique [20b] au cas spécial de l'équation (5).

siques ne fournissent de réponse que si la fonction inconnue est supposée au moins deux fois dérivable, ce que Harr montre n'être pas nécessaire).

La méthode employée fournit d'ailleurs une conclusion plus précise que le théorème d'unicité. Pour une équation à deux variables indépendantes, si un segment de la droite $x = 0$ n'est nulle part tangent à une caractéristique, non seulement deux solutions de l'équation coïncidant le long de ce segment doivent, par cela même, coïncider dans toute une région du plan avoisinant, mais, dans la même région, les valeurs obtenues pour la solution dépendent continûment des valeurs données sur le segment.

Seulement, cette précision de plus, cette augmentation de « compréhension », pour employer le langage des logiciens, limite nécessairement par ailleurs la portée de la méthode, autrement dit, son « extension ». Nous avons vu, en effet, que pour l'équation des potentiels (5), cette continuité de la solution par rapport aux données *n'a pas lieu*. On ne peut donc songer à employer, dans un tel cas, la méthode de Haar.

L'objection ne vaut pas pour le cas hyperbolique, auquel, en effet, M. O. Perron a pu appliquer [32] une analyse toute semblable à celle de Haar.

Mais des résultats beaucoup plus décisifs se dégagent des recherches [26] de M. Hans LEWY (entreprises partiellement en collaboration avec M. K. FRIEDRICHS). Dans le cas hyperbolique, la méthode de M. Hans Lewy, tout en démontrant comme nous l'avons dit l'existence de la solution, en démontre en même temps l'unicité. La démonstration repose sur une analyse des plus intéressantes en elle-même par la portée et la souplesse toutes nouvelles qu'elle donne à l'intégration par approximations successives: l'auteur établit en effet l'existence d'une solution unique pour le problème de Cauchy relatif à n'importe quel système de $m = m' + m''$ équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes et à m inconnues, de la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} &= a_1^{i'} u_1 + \dots + a_m^{i'} u_m, & (i' = 1, 2, \dots, m') \\ \frac{\partial u_{i''}}{\partial \eta} &= a_1^{i''} u_1 + \dots + a_m^{i''} u_m, & (i'' = m' + 1, \dots, m) \end{aligned} \right\} (16')$$

Les coefficients a pouvant soit être fonctions des seules variables indépendantes ξ , η , soit dépendre des inconnues u elles-mêmes, et la ligne qui porte les données étant assujettie à ce que ξ et η varient chacun d'une façon monotone (ou au contraire, à être formée d'un segment de parallèle à l'axe des ξ et d'un segment de parallèle à l'axe des η). Le caractère remarquable de la méthode est que, le nombre total m des inconnues étant donné, le nombre m' peut être quelconque, c'est-à-dire que le partage des m équations correspondantes entre celles qui comportent une différentiation par rapport à ξ et celles qui comportent une différentiation par rapport à η peut être quelconque.

A l'aide de ce nouvel outil analytique, M. Hans LEWY peut démontrer, pour tout problème de Cauchy hyperbolique à deux variables indépendantes, à la fois l'existence et l'unicité de la solution. Il arrive à appliquer une méthode analogue au cas elliptique, mais dans des conditions notablement plus délicates, puisqu'il s'agit de démontrer l'unicité sans démontrer en même temps l'existence, celle-ci n'ayant pas lieu en général. Par contre, on démontre du même coup, dans ce cas, le théorème de M. Hilbert sur l'analyticité des solutions des équations du type elliptique, et cela par une voie particulièrement élégante et simple, en étendant la solution supposée connue au domaine complexe grâce à l'intégration d'un système de la forme (16'). Ceci fait, la démonstration d'unicité peut se ramener au fait connu que deux fonctions analytiques ne peuvent coïncider tout le long d'un arc de courbe déterminé quelconque sans être identiquement égales entre elles.

Mais, contrairement à ce qui se passait pour le cas hyperbolique, cette deuxième partie des recherches de M. Hans Lewy suppose l'équation donnée analytique. La solution de la question n'était donc pas complète, même pour deux variables indépendantes. Le complément nécessaire lui a été apporté par une note de M. CARLEMAN [7], le problème étant ramené, comme cela est toujours possible, à l'intégration d'un système de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha u + \beta v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma u + \delta v, \quad (17)$$

où on reconnaît, aux premiers membres, les premiers membres de l'équation de monogénéité de Cauchy et où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions continues définies dans un certain domaine convexe D . Moyennant une définition convenablement précisée de ce qu'on doit entendre par solution du système, on peut démontrer qu'une telle solution ne peut admettre ni un zéro d'ordre de multiplicité infini à l'intérieur de D , ni une infinité de zéros ayant un point d'accumulation intérieur à D . Il est donc en particulier impossible que u et v s'annulent simultanément en tous les points d'une ligne intérieure au domaine en question¹.

Le problème est donc élucidé d'une manière satisfaisante pour les équations à deux variables indépendantes: malheureusement, les méthodes de MM. Hans LEWY et CARLEMAN sont, par essence, limitées à ce cas, puisqu'elles reposent sur la distinction des caractéristiques en deux familles (réelles ou imaginaires) distinctes².

XI.

Dans toutes les étapes que nous venons de passer en revue, l'Analyse n'a pu progresser, conformément aux vues classiques de Poincaré, qu'en se laissant constamment guider par l'interprétation physique. Point de résultats où, au fond, la théorie pure et l'application concrète n'aient été solidaires l'une de l'autre et n'aient marché du même pas.

Il commence à en être autrement dans certaines recherches récentes. Il est d'abord un problème posé par l'application mécanique et où les principes généraux posés dans ce qui précède paraissent tomber en défaut, sans qu'on voie bien nettement quant à présent de quelle manière ils devront être complétés ou corrigés: c'est celui des marées, tel que le

¹ La méthode met également en évidence la propagation par ondes, c'est-à-dire le fait que la valeur de l'inconnue en un point voisin de la ligne qui porte les données dépend uniquement de ce que sont ces données le long d'un *certain arc* de cette ligne.

² Le cas linéaire, pour relativement classique qu'il soit, appellerait de nouvelles recherches. On sait que la démonstration d'unicité s'y fait par transformation d'intégrales de domaines en intégrales de frontières. Mais les intégrales utilisées ne sont pas les mêmes pour les problèmes elliptiques et pour les problèmes mixtes hyperboliques [45] et cette circonstance entraîne, en particulier, des difficultés lorsqu'on veut appliquer des méthodes de ce genre à des équations d'ordre supérieur et de type composite [20].

traitent MM. M. BRILLOUIN et J. COULOMB. Une masse liquide étant en rotation, soit [5] autour d'un noyau sphérique solide, soit [6] dans un récipient cylindrique de révolution et soumise à une force perturbatrice périodique, les oscillations forcées ainsi engendrées dépendent d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{4\omega^2 - \theta^2}{\theta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (18)$$

ω désignant la vitesse angulaire de rotation et θ la pulsation de la force perturbatrice. On voit que, suivant la grandeur relative de ces deux quantités ω et θ , l'équation peut être du type elliptique ou du type hyperbolique. Dans le premier cas, on a bien affaire à un des problèmes que nous avons mentionnés (problème mixte elliptique) mais ces mêmes données aux limites ne cadrent plus avec nos principes généraux lorsque l'équation devient hyperbolique, et il y a là une sorte de paradoxe qui demande à être élucidé.

Voici maintenant des problèmes que les géomètres ont pu traiter au point de vue qui nous occupe, sans avoir à leur disposition, pour faire prévoir le résultat, une application concrète. Nous avons considéré, pour une équation du type hyperbolique, des données formées par deux arcs *issus* d'un même point (fig. 1, 2) et indiqué ce que doivent être ces données suivant l'orientation relative des arcs en question et des caractéristiques issues de leur point commun. Or on sait aujourd'hui traiter [25b, 28] le cas de deux arcs ayant non plus une extrémité commune, mais (fig. 8) un point *intérieur* commun. Une seule donnée en chaque point convient alors et on verra, par exemple, dans un travail d'E. E. LEVI [25k] et dans celui de M. MASON [28], comment les résultats paraissent dépendre d'une façon beaucoup moins étroite de l'orientation relative des arcs donnés et des caractéristiques. Une étude analogue a été faite pour le troisième ordre par M. SJÖSTRAND [37c].



Fig. 8.

Peut-on, d'autre part, instituer des théories et des méthodes de calcul communes aux trois types d'équations? Tout ce qui précède conduirait, au contraire, à les considérer comme relevant

de théories entièrement séparées. On est cependant arrivé, dans ces dernières années, à s'affranchir de cette nécessité. Les recherches dont nous voulons parler reposent sur l'emploi de la transformation de Laplace, transformation qui fait correspondre à une fonction $u(x, y, t)$ une nouvelle fonction des deux premières variables x, y et d'une variable auxiliaire positive τ définie par la formule

$$P(x, y, \tau) = \int_0^{\infty} u(x, y, t) e^{-\tau t} dt. \quad (19)$$

M. Doetsch a, comme on sait, traité d'une manière très approfondie cette transformation et, comme il l'exposera dans une des conférences qui vont suivre, montré le parti important qu'on en peut tirer pour l'étude de l'équation de la chaleur. Mais, d'autre part, il a constaté [11] qu'une méthode tout analogue s'applique à des problèmes de propagation télégraphique qui relèvent du cas hyperbolique. Or, plus récemment, M. PICONE [34] est allé plus loin et, avec le même point de départ, a développé une théorie qui, presque jusqu'à la fin des calculs, s'applique indifféremment aux trois cas.

Ces résultats — auxquels on peut toutefois reprocher d'impliquer une hypothèse sur l'allure de la fonction u à l'infini ¹, afin d'assurer l'existence de l'intégrale (19) — ouvrent, dans le sujet qui nous occupe, la voie à des recherches ultérieures. On peut espérer obtenir dans la même voie la réponse à des questions non encore résolues, telles que celle des équations du type hyperbolique non normal [9, 21], pour lesquelles aucun système de données aux limites (non analytiques) propres à déterminer une solution n'a pu être indiqué jusqu'ici.

QUELQUES INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

1. S. BERNSTEIN. *Communications de la Soc. Math. Kharkow*, 1908 (en russe).
2. H. BLOCK. *Arkiv för Mat. Astr. och. Fys.*, 1911, tome VII.

¹ On connaît, par ailleurs, les conditions à l'infini que l'on est conduit à poser dans le problème de Dirichlet et, de même dans les problèmes mixtes tant elliptiques qu'hyperboliques. Mais il y a lieu de mentionner une condition toute nouvelle de cette nature, l'« Ausstrahlungsbedingung », introduite par M. SOMMERFELD [39b] et qui exprime qu'une fonction de la forme $u(x, y, z) e^{ikt}$ représente un rayonnement se propageant tout entier vers l'extérieur.

3. O. BONNET. *C. R. Ac. Sc. Paris*, tome XL, 1855, p. 1107; XLII, 1856, p. 532.
BJÖRLING, *Archives de Grünert*, tome IV, p. 290.
4. BOULIGAND, DELENS, GIRAUD. *Le problème de la dérivée oblique: Exposés de géométrie publiés sous la direction de M. E. Cartan.* Paris, Hermann, 1935.
5. M. BRILLOUIN. *Quelques propriétés d'une équation aux dérivées partielles hyperbolique.* Deux conférences professées à l'Institut Henri Poincaré en 1930.
6. M. BRILLOUIN et J. COULOMB. *Oscillations d'un liquide pesant dans un bassin cylindrique en rotation.* Paris, Gauthier-Villars, 1933.
7. CARLEMAN. *C. R. Ac. Sc. Paris*, tome CXCVII, 1933, p. 461.
8. E. CARTAN. *Bull. Soc. Math.*, tome LIX, 1931.
9. COULON. Thèse, Paris, 1902.
10. DARBOUX. *Leçons sur la Théorie des Surfaces.* Paris, Gauthier-Villars.
11. DOETSCH. *Centenaire de l'Ecole technique supérieure de Stuttgart.* Berlin, Springer, 1929.
12. DU BOIS REYMOND. *Beitrag zur Integration der partiellen Differentialgleichungen.* Leipzig, 1864.
13. DUHEM. *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique.* Paris, Hermann, 1891, tome I.
14. VAN DEN DUNGEN. a) *Bull. Ac. Sc. Belgique*, tome XVIII.
b) *L'acoustique des salles de spectacle.* Paris, Gauthier-Villars, 1934.
15. EINSTEIN. *Sitzber. Berlin*, 1929, et *Math. Ann.*, tome CII, 1930.
16. FUBINI. *Atti Acc. Sc. Torino*, tome XL, 1905.
17. GEVREY. Thèse, Paris, 1913.
18. GOURSAT. a) *Cours d'Analyse*, tome III. Paris, Gauthier-Villars.
b) *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris, Hermann, tome II.
c) *Annales de la Faculté des Sc. Toulouse*, tome VI₂, p. 117.
19. HAAR. a) *C. R. Ac. Sc. Paris*, 1928.
b) *Atti. Congr. Intern. Math. Bologne*, 1928.
20. HADAMARD. a) *Notice sur ses travaux scientifiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1901, p. 45 et Paris, Hermann, 1912 (1^{re} partie).
b) *Princeton University Bull.*, tome XIII, 1902.
c) *Leçons sur la Propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique.* Paris, Hermann, 1903, note II.
d) *Bull. Soc. Math.*, t. XXXII, 1904.
e) *C. R. Ac. Sc. Paris*, t. CL, 1910, p. 609 et 772.
f) *Proc. Math. Soc. Bénarès*, t. III, 1921.
g) *Lectures on Cauchy's problem.* Cambridge, New Haven, 1902. Traduit par M^{lle} Jacqueline Hadamard. Paris, Hermann, 1932.
h) *Centenaire de Lobatchewsky*, tome II. Edité par la Soc. Math. de Kazan, 1926.
i) *Congrès intern. Math. Zurich*, 1932, tome II, p. 78.
j) Propriétés d'une équation lin. aux dérivées part. du 4^{me} ordre. *Tohoku Math. Journ.*, tome XXXVII (dédié au professeur Hayashi), 1933.
21. HAMEL. Thèse. Göttingue, 1901.
22. HERGLOTZ. *Abh. Math. Seminar Hamburg*, t. VI, Teubner, Leipzig, 1928.

23. HOLMGREN. a) *Ofversigt af Kongl. Vetensk. Förh.*, 1901.
 b) *Arkiv. för Mat., Astr. och Fys.*, t. I, II, V.
 c) *Ibid.*, t. III, IV, 1904, 1907.
 d) *C. R. Ac. Sc. Paris*, 1907.
 e) *Arkiv för Mat.*, t. XIX, 1927.
24. HUBER, *Monatsh. f. Math. Phys.*, tome XXXIX, 1932.
25. E. E. LEVI. a) *Rendic. Acc. Lincei*, tome XVII₁, 1^{er} semestre, et *Ist. Lombardo*, tome XLI₂, 1908.
 b) *Ann. di Matematica*, tome XVIII, 1911, p. 287.
26. Hans LEWY. *Gött. Nachr. 1927 Math. Ann.*, tomes XCVII, XCVIII (en collaboration avec K. Friedrichs), CI, CIV. *Lincei*, tome XI₆, 1930 (premier semestre).
27. LICHTENSTEIN. *Abh. Ak. Berlin* (Anhang), 1911; *Bull. Ac. Sc. Cracovie*, 1916.
28. MASON. *Math. Ann.*, tome LXV, 1907.
29. MYLLER. a) *Bull. Soc. Sc. Bucarest*, XVII^e année, 1907. *Math. Ann.*, tome LXVIII, 1909.
 b) *C. R. Ac. Sc. Paris*, 1909.
30. MYLLER et VALCOVICI. *Bull. Sec. Sc. Ac. Roumaine*, II^e année. 1914, p. 255 et III^e année, 1915, p. 12, 165.
31. PAINLEVÉ. Thèse. Paris, 1887, p. 19, 21.
32. O. PERRON. *Math. Zeitschr.*, tome XXVII, 1928.
33. PICARD. a) *Journ. Math.*, 1890.
 b) *Note I au tome IV des « Leçons sur la Théorie des surfaces », de G. Darboux.*
 c) *Bull. Sc. Math.*, t. XXIII, 1899.
 d) *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles.* Paris, Gauthier-Villars, 1927.
34. PICONE. *Mem. Cl. Sc. Fys., Mat. e Nat. R. Acc. Italia*, t. V, 1934.
35. POPOVICI, *Ann. Sc. Univ. Jassy*, tome VIII, 1914.
36. SCHAUDER. *Fundamenta Mathematicae*, t. XXIV, 1935, p. 213.
37. SJOSTRAND. a) Thèse. Upsal, 1920.
 b) *Arkiv. för Mat.*, t. XXII A, 1931.
 c) *Ibid.*, t. XXIV A, 1934.
38. SCHWARZ. *Crelle*, t. LXXX, 1875; *Œuvres*, t. I, p. 168.
39. SOMMERFELD. a) *Encycl. All. Sc. Math.*, II A 7 c, p. 514.
 b) *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.*, tome XXI, 1912, p. 309 (particulièrement p. 331). Voir RUBINOWICZ, *Ann. Phys.*, t. LIII, 1917; KUPRADZE, *C. R. Ac. Sc. U.R.S.S.*, t. I, 1934 et II, 1935.
40. THEODORESCO. *C. R. Ac. Sc. Paris*, t. CXCIV, 1932.
41. TRICOMI. *Mem. R. Acc. Lincei*, t. XIV₅, 1923; *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, tome LII, 1928. Maria CIBRARIO, *Istit. Lombardo*, t. LXV et *Rendic. Circ. Math. Palermo*, t. LVI, 1932.
42. VOLTERRA. *Journ. Math.*, t. XIII₉, 1934, p. 1.
43. WYNANTS. *Bull. Ac. Sc. Belgique*, 1930-35, et *Bull. Sc. M.*, t. LIX, 1933.
44. WEBSTER. *Bull. Am. Math. Soc.*, tome XVIII₂, 1912.
45. ZAREMBA. *Rendic. Acc. Lincei*, t. XXIV₅, 1915. RUBINOWICZ, *Monatshefte. Math. Phys.*, t. XXX, 1920.