2. — Applications et compléments.

alors naturel de se demander comment les périodes du produit dépendent de celles des facteurs. La réponse est fournie par le

THÉORÈME III. — *Si* c_1 *et* c_2 *sont les cycles associés à* ω_1 *et* ω_2, *le cycle associé au produit* $\omega_1\,\omega_2$ *est le cycle* $c_2 \,.\, c_1$ *intersection de* c_2 *avec* c_1.

Supposons en particulier que $q = n - p$; le produit $\omega_1\,\omega_2$ est alors une n-forme dont la seule période fondamentale est

$$\int_V \omega_1\,\omega_2$$

et le théorème III se réduit à l'égalité

$$\int_V \omega_1\,\omega_2 = \mathrm{I}\,(c_2 \cdot c_1)\ .$$

En combinant cette égalité avec le théorème de dualité de Poincaré, on obtient le résultat suivant:

Pour que la p-*forme exacte* ω_1 *soit homologue à zéro, il faut et il suffit que*

$$\int_V \omega_1\,\omega_2 = 0\ ,$$

quelle que soit la (n — p)-*forme exacte* ω_2.

2. — APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS.

Voici une application intéressante de ce dernier résultat. Supposons que V soit la riemannienne à 4 dimensions qui correspond à une surface algébrique, et ω_1 l'élément d'une intégrale double de première espèce attachée à cette surface. Si ω_2 est l'imaginaire conjuguée de ω_1, on voit immédiatement que

$$\int_V \omega_1\,\omega_2 > 0\ .$$

Donc ω_1 ne peut pas être homologue à zéro: *une intégrale double de première espèce ne peut pas avoir toutes ses périodes nulles.*

C'est le théorème démontré par M. W. V. D. Hodge en 1930. (Dans cet ordre d'idées, le théorème III est le véritable fondement topologique des relations de Riemann et de M. Hodge entre les périodes des intégrales abéliennes.)

Dans un ordre d'idées voisin, je désire mentionner un complément important apporté par M. Hodge au théorème I pour les variétés V qui sont des espaces de Riemann.

Supposons d'abord que V soit une surface de genre p; le premier nombre de Betti est égal à $2p$, il y a donc $2p$ cycles fondamentaux et une intégrale curviligne possède $2p$ périodes fondamentales. Or, depuis Riemann, on sait dans ce cas beaucoup plus que ce que nous apprend le théorème I, on sait en effet qu'il existe une intégrale *harmonique* ayant des périodes fondamentales arbitraires, et c'est ce *théorème d'existence d'intégrales harmoniques* que M. Hodge a généralisé de la manière suivante.

Dans le plan, avec des coordonnées rectangulaires xy, la condition pour que

$$\int \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy$$

soit harmonique peut s'énoncer ainsi:

1° La forme $\omega = \mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy$ doit être exacte ($\omega' = 0$ ou $\mathrm{A}'_y = \mathrm{B}'_x$).

2° La forme $\omega^* = -\mathrm{B}dx + \mathrm{A}dy$ (que j'appellerai adjointe à ω) doit être aussi exacte ($\omega^{*\prime} = 0$ ou $\mathrm{A}'_x + \mathrm{B}'_y = 0$).

Si $\omega = df$, la première condition est automatiquement vérifiée et la seconde se réduit à l'équation de Laplace $\Delta f = 0$. La notion de forme adjointe n'est pas topologique comme celles de dérivée extérieure ou de produit extérieur, mais elle fait intervenir la métrique; on peut considérer ω comme le travail élémentaire du vecteur $v = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$, ω^* est alors le travail élémentaire du vecteur $v^* = (-\mathrm{B}, \mathrm{A})$ qui se déduit de v par une rotation de 90 degrés. Remarquons aussi que l'élément de l'intégrale de Dirichlet, $(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\,dx\,dy$, n'est pas autre chose que le produit de ω par la forme adjointe ω^*.

Dans un espace de Riemann à n dimensions, toute p-forme ω peut être considérée comme le produit scalaire de l'élément de variété à p dimensions par un système de p-vecteurs déterminé en chaque point de l'espace; la forme adjointe ω^*, de degré $n - p$, est alors le produit scalaire de l'élément de variété à $n - p$ dimensions par le système des $(n - p)$-vecteurs supplémentaires [1]. Toute p-forme ω possède donc une forme adjointe ω^*, de degré $n - p$; et le produit $\omega\omega^*$, égal au produit de l'élément de volume à n dimensions par le carré de la mesure du système de p-vecteurs déterminant ω, est une n-forme essentiellement positive.

On peut maintenant généraliser la notion d'intégrale harmonique en disant que, ω étant une p-forme régulière sur l'espace de Riemann V, $\int \omega$ est harmonique si ω et la forme adjointe ω^* sont toutes deux exactes. Cette définition posée, M. Hodge démontre l'existence d'une intégrale p-uple harmonique ayant des périodes arbitrairement données en suivant la méthode de Riemann-Hilbert du principe de Dirichlet. Considérant la famille de toutes les p-formes exactes et régulières sur l'espace V et ayant les périodes fondamentales données, il prouve qu'il y en a une qui rend l'intégrale n-uple $\int_V \omega\omega^*$ minimum et qui fournit l'intégrale harmonique cherchée. Pour s'assurer de l'unicité, il suffit de prouver qu'une intégrale harmonique non identiquement nulle ne peut pas avoir toutes ses périodes nulles, et cela résulte de l'inégalité $\int_V \omega\omega^* > 0$ (même raisonnement que pour les intégrales doubles de première espèce).

Voici un autre théorème qui apporte un complément analogue au théorème II:

ω étant une (p + 1)*-forme régulière sur l'espace de Riemann* V, *et homologue à zéro, il existe une forme ϖ, régulière sur* V, *telle que $\varpi' = \omega$ et dont la forme adjointe est homologue à zéro. Cette forme ϖ, unique, est caractérisée, dans la famille de toutes les formes régulières dont la dérivée est égale à ω, par la propriété de rendre l'intégrale $\int_V \varpi\varpi^*$ minimum.*

Dans le cas $n = 2$ et $p = 1$, cela revient à affirmer l'existence

[1] Voir, par exemple: E. Cartan, La Géométrie des espaces de Riemann *(Mémorial des Sciences mathématiques)*.

d'une fonction uniforme sur une surface donnée S, dont le laplacien soit égal à une fonction donnée f telle que $\int_S f d\sigma = 0$.

3. — Principe de la démonstration du théorème I.

Considérons, pour fixer les idées, une variété à 3 dimensions sur laquelle on a un cycle à 2 dimensions c^2 non homologue à zéro. Il s'agit de construire une forme exacte de degré 2, régulière sur toute la variété, dont la période relative à c^2 ne soit pas nulle. Une telle forme

$$\omega = \mathrm{A}\, dy\, dz + \mathrm{B}\, dz\, dx + \mathrm{C}\, dx\, dy$$

peut être considérée comme l'expression du débit élémentaire d'un courant électrique (stationnaire) de volume, son intégrale étendue à un champ c à 2 dimensions est alors le débit total à travers c et la condition que la forme soit exacte ($\omega' = 0$ ou $\mathrm{A}'_x + \mathrm{B}'_y + \mathrm{C}'_z = 0$) exprime que le courant est conservatif. Notre problème consiste donc à construire un courant de volume, régulier et conservatif sur toute la variété, dont le débit total à travers c^2 ne soit pas nul.

D'après le théorème de dualité de Poincaré, il existe un cycle à une dimension c^1, dont le nombre algébrique des points d'intersections avec c^2 n'est pas nul: $\mathrm{I}(c^2 . c^1) \neq 0$. Imaginons que les lignes constituant c^1 (lignes fermées et orientées) soient des fils métalliques parcourus par un courant électrique d'intensité constante égale à un. Le débit de ce courant à travers c^2 est égal à $\mathrm{I}(c^2 . c^1)$, donc non nul. Ce courant est d'ailleurs conservatif (car c^1 est fermé). On conçoit ensuite la possibilité d'étaler un peu ce courant, de manière qu'il remplisse une sorte de tube entourant c^1, avec une intensité de volume continue à l'intérieur du tube et nulle sur sa frontière. La forme ω, égale au débit élémentaire de ce courant dans le tube et nulle en dehors, satisfait à toutes les conditions requises.

On voit que, dans l'espace ordinaire, une même entité physique (le courant électrique), est représentée dans un cas par un champ à une dimension (courant linéaire), dans un autre cas par une forme de degré deux (courant de volume). Cela