IV. — Les groupes simples clos.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

2° *que ces sous-groupes soient échangeables entre eux;*

3° *qu'aucun d'eux n'admette un sous-groupe invariant d'ordre plus petit.*

Si l'une des séries ne contient qu'un élément, il lui correspond un sous-groupe invariant abélien clos. Si l'une des séries contient plusieurs éléments, il lui correspond un sous-groupe invariant *simple*, c'est-à-dire n'admettant aucun sous-groupe invariant continu. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante [**14, 16**]:

Tout groupe clos est abélien ou infinitésimalement isomorphe au produit direct d'un ou plusieurs groupes simples et éventuellement d'un groupe abélien. Cela veut dire, dans le second cas, que le produit direct en question est un groupe de recouvrement du groupe donné.

IV. — Les groupes simples clos.

Nous sommes ainsi conduits naturellement à l'étude des groupes simples clos. Le groupe adjoint Γ d'un tel groupe G ne peut laisser invariante qu'une seule forme quadratique définie (à un facteur constant près), sans quoi il laisserait invariante au moins une variété linéaire réelle, qui correspondrait à un sous-groupe invariant continu. Il en résulte que *la forme quadratique* φ(e) *d'un groupe simple clos est définie*; on voit du reste facilement qu'elle est négative. La réciproque est fondamentale: *tout groupe dont la forme* φ (e) *est définie est clos.*

Remarquons en passant ce fait qu'une propriété du groupe infinitésimal entraîne ici une propriété topologique du groupe global. Il n'en est pas toujours ainsi; deux groupes abéliens de même ordre, caractérisés par les mêmes constantes de structure, toutes nulles, peuvent être l'un clos, l'autre ouvert.

Il nous faut ici rappeler, avant de donner la démonstration, un théorème classique [**2**] d'après lequel tout groupe dont la forme $\varphi(e)$ est de discriminant non nul est *semi-simple*, c'est-à-dire est simple ou est infinitésimalement le produit direct de plusieurs groupes simples. Il suffit donc de démontrer la réciproque énoncée pour les groupes simples.

La démonstration se fait en deux temps: on démontre d'abord que le groupe adjoint linéaire Γ est clos; on démontre ensuite que le groupe donné lui-même G est clos.

Le groupe Γ est du même ordre que G. Les coefficients de ses substitutions linéaires sont *bornés*, le groupe Γ étant orthogonal; mais cela *ne suffit pas* pour affirmer que Γ est clos. Passons par l'intermédiaire du groupe Γ' de toutes les automorphies, internes et externes, du groupe infinitésimal: c'est un groupe *algébrique* en ce sens que les coefficients de ses substitutions linéaires sont caractérisés par les relations algébriques qui expriment l'invariance des relations de structure; étant algébrique et borné, le groupe Γ' est clos. Par suite Γ, qui est la partie connexe de Γ' contenant la substitution identique, est aussi clos [**16**].

Le théorème en vue sera prouvé si G recouvre Γ un nombre fini de fois, ou encore si le groupe simplement connexe de recouvrement de Γ recouvre Γ un nombre fini de fois. C'est M. H. Weyl [**4**] qui a démontré le premier cette dernière propriété: il avait du reste en vue, plutôt qu'une propriété topologique de certains groupes, un moyen de démontrer par voie transcendante la complète réductibilité des représentations linéaires des groupes semi-simples, réductibilité qu'on n'était pas arrivé à prouver par voie algébrique.

Essayons de donner une idée de la démonstration [**10**, **11**]. Le groupe adjoint clos Γ admet une infinité de sous-groupes abéliens maximums, tous homologues entre eux et d'ordre l, rang du groupe donné. Une transformation infinitésimale générique de Γ est homologue à un nombre fini de transformations infinitésimales d'un quelconque γ de ces sous-groupes abéliens, qu'on peut supposer engendré par X_1, X_2, ..., X_l; on peut supposer que pour la transformation $e^i X_i$ de γ, la forme $\varphi(e)$ est réduite à $-[(e^1)^2 + \ldots + (e^l)^2]$. Représentons la transformation $e^i X_i$ de γ, dans l'espace euclidien à l dimensions, par le vecteur d'origine O et de composantes e^i. Il existe dans cet espace un angle l-èdre Π de sommet O tel que toute transformation infinitésimale générique de Γ soit homologue à une transformation et une seule *intérieure* à Π. Mais il y a des transformations infinitésimales *singulières*, caractérisées par la propriété que l'équation de Killing admette plus de l racines nulles au lieu du nombre normal l: il y en a alors au moins $l + 2$, ces racines étant deux à deux opposées. Ces transformations singulières sont homologues aux transformations portées sur les faces de Π. Elles dépendent seulement de $r - 3$ paramètres homogènes. Ajoutons que si l'on prend les symétriques de Π par rapport à ses différentes faces et ainsi de suite, on obtient une décomposition régulière de l'espace autour du point origine O.

Passons aux transformations finies de Γ; elles admettent des multiplicateurs de module 1, dont l sont égaux à 1, les autres étant deux à deux inverses. Toute transformation finie *générique* T (avec exactement l multiplicateurs égaux à 1) peut être engendrée par une transformation infinitésimale générique ayant une homologue à l'intérieur de Γ; T peut être représentée par un point déterminé intérieur à Π, les différentes transformations finies engendrées par une même transformation infinitésimale étant représentées par les points d'une demi-droite issue de O. Si l'on suit cette demi-droite à partir de O, il arrive un moment où on trouve une transformation finie singulière: le lieu des points ainsi obtenus est une portion d'hyperplan qui délimite, avec les faces de Π, un simplexe Σ; toute transformation finie non singulière de Γ a pour image un point *ou un nombre fini de points* intérieurs à Σ. Du reste si l'on prend les symétriques de Σ par rapport à ses $l+1$ faces et qu'on procède de même pour les nouveaux simplexes obtenus et ainsi de suite, on obtient un pavage régulier de l'espace, toute transformation finie non singulière de Γ ayant toujours le même nombre fini d'images à l'intérieur de chacun des simplexes obtenus.

Ce nombre fini est égal au nombre des sommets de Σ qui représentent la substitution identique de Γ. Nous allons voir que *c'est aussi le nombre de fois que Γ est recouvert par son groupe simplement connexe de recouvrement.*

Il sera commode d'employer un langage géométrique. La forme définie positive $-\varphi(e)$ permet d'introduire dans l'espace de Γ une métrique riemannienne invariante par Γ, qui se trouve être ainsi le plus grand groupe des déplacements de son espace, rendu riemannien. Les sous-groupes à un paramètre de Γ sont représentés par des géodésiques issues du point unité i; nous dirons qu'un arc de géodésique d'origine i est *régulier* si le sous-groupe correspondant est engendré par une transformation infinitésimale non singulière et s'il n'y a aucun élément singulier sur cet arc. En suivant une géodésique non singulière à partir de i, on arrivera à un premier point singulier, qui n'est autre que le premier *point focal* de i sur la géodésique. Tous ces points focaux engendrent une variété à $r - 3$ dimensions, celle qui a pour image dans l'espace euclidien de γ la face de Σ opposée au sommet O. Si nous considérons maintenant dans l'espace de Γ un arc $\widehat{ab}$ ne contenant aucun point singulier et si nous nous donnons *l'un des arcs réguliers* de géodésique joignant i à a, on pourra suivre par continuité, de a en b, cet arc régulier. Tous les arcs réguliers ainsi obtenus seront représentés à l'intérieur de Σ par des segments de droites partant de O et aboutissant aux différents points de l'image de l'arc ab. Supposons l'arc ab fermé, partant de a et y revenant, *sans contenir aucun point singulier.* Si nous nous donnons l'arc régulier de géodésique joignant i à a et si nous le suivons par continuité, ou bien nous retrouverons le même arc en revenant au point de départ, ou bien nous en trouverons un autre. Dans le premier cas le cycle considéré est homotope à zéro; il suffit pour s'en convaincre d'effectuer une homothétie de centre i et de rapport k variant de 1 à 0, chaque point du contour se déplaçant sur l'arc régulier de géodésique qui le joint à i. Mais, dans le second cas, le cycle *n'est pas* homotope à zéro, car s'il l'était on pourrait opérer la réduction sans que le cycle rencontre jamais la variété à $r - 3$ dimensions des points singuliers; les arcs réguliers de géodésique joignant i aux points du contour varieraient d'une manière continue et l'arc régulier final joignant O à a serait toujours le même, c'est-à-dire différent de l'arc régulier initial joignant les mêmes points, ce qui est absurde. En particulier un cycle partant de i et y revenant aura pour image dans le simplexe Σ un chemin partant de O et aboutissant à un des sommets de Σ qui représentent la substitution identique; le cycle est homotope à zéro ou non suivant que ce sommet est confondu ou non avec O. On voit bien nettement ainsi qu'il y a autant de classes de cycles non homotopes entre eux qu'il y a dans Σ de sommets représentant la substitution identique. C'est ce que nous voulions démontrer.

Ajoutons un théorème important. Considérons le groupe G *simplement connexe* de recouvrement de Γ. Toute transformation finie non singulière de G a pour image *un point et un seul* intérieur à Σ. Par suite toute variété fermée qui ne contient aucun élément singulier a pour image une variété fermée intérieure à (Σ). Chaque point de la variété donnée peut donc être joint au point unité *par un arc régulier de géodésique et un seul*; par suite cette variété est homotope à zéro. On a donc le théorème suivant:

Théorème. *Dans l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe, toute variété fermée qui ne contient aucun élément singulier est homotope à zéro.*

En particulier, la variété des éléments singuliers étant à $r - 3$ dimensions, toute variété fermée à deux dimensions peut être déformée de manière à ne plus contenir d'éléments singuliers, d'où le nouveau théorème:

Théorème. *Dans l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe, toute variété fermée à deux dimensions est homotope à zéro.*

Les théorèmes précédents entraînent évidemment le suivant:

Théorème. *Les deux premiers nombres de Betti d'un groupe simple clos, simplement connexe ou non, sont nuls.*

Tous ces théorèmes s'étendent aux groupes semi-simples clos, c'est-à-dire aux groupes dont la forme $\varphi(e)$ est définie; *tous ces groupes ont leurs deux premiers nombres de Betti nuls.* Il n'en est évidemment pas de même pour les groupes clos dont la forme φ (e) n'est que semi-définie.

Revenons aux groupes simples. Le groupe de Poincaré du groupe adjoint Γ d'un groupe simple clos est isomorphe au groupe des déplacements, accompagnés ou non de symétries, qui, dans l'espace euclidien du sous-groupe abélien γ, laissent invariant le simplexe Σ et amènent successivement en coïncidence le sommet O avec les autres sommets homologues. Il y a, comme on sait, quatre grandes classes de groupes simples clos, chaque classe ayant un représentant linéaire bien connu, à savoir:

A. Le groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite définie positive à $l + 1$ variables;

B. Le groupe orthogonal réel à $2l+1$ variables;

C. Le groupe linéaire complexe de la forme d'Hermite $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_{2l}\bar{x}_{2l}$ et de la forme quadratique extérieure $[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \ldots + [x_{2l-1} x_{2l}]$.

D. Le groupe orthogonal réel à $2l \geq 6$ variables;

Le groupe de Poincaré du groupe adjoint est cyclique d'ordre $l+1$ (classe A), cyclique d'ordre 2 (classes B et C), cyclique d'ordre 4 (classe D, l impair), non cyclique d'ordre 4 (classe D, l pair). Le groupe linéaire unitaire unimodulaire est simplement connexe, mais le groupe orthogonal ne l'est pas, étant recouvert deux fois par son groupe simplement connexe de recouvrement.

M. H. Weyl a montré *a priori*, par des considérations tirées de la théorie des équations intégrales, que tout groupe clos admet une infinité de représentations linéaires *fidèles*, c'est-à-dire telles qu'à deux éléments distincts du groupe correspondent deux substitutions linéaires distinctes.

V. — Les groupes simples ouverts.

J'ai beaucoup insisté sur les groupes clos. Comme nous allons le voir, ils contiennent la clef de presque toutes les propriétés topologiques des groupes de Lie ouverts. On a en effet le théorème général suivant:

Théorème. *L'espace d'un groupe de Lie simplement connexe ouvert est le produit topologique d'un espace euclidien et éventuellement d'un ou de plusieurs espaces de groupes simples clos.*

Nous allons commencer par démontrer ce théorème pour les groupes semi-simples ouverts. Il résultera du théorème suivant:

L'espace du groupe adjoint Γ *d'un groupe simple ouvert* G *est le produit topologique de l'espace d'un groupe linéaire clos et d'un espace euclidien.*

Il suffit pour passer de ce théorème au précédent de remarquer que le groupe simplement connexe de recouvrement d'un groupe linéaire clos est le produit direct d'un ou plusieurs groupes clos simplement connexes et, éventuellement, d'un groupe abélien