Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TOPOLOGIE DES ESPACES REPRÉSENTATIFS DES GROUPES DE LIE

Autor: Cartan, Elie

Kapitel: III. — Les groupes clos.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27310

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

alors un groupe de recouvrement de Γ. Si G est clos, Γ l'est aussi, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Rappelons enfin qu'à la transformation infinitésimale X_i de G correspond dans Γ la transformation infinitésimale

$$E_i \equiv c_{ki}^h e^k \frac{\partial f}{\partial e^h} . \tag{5}$$

III. — Les groupes clos.

Dans l'étude topologique des groupes de Lie, les groupes clos jouent un rôle essentiel et c'est par eux que nous allons commencer. On a facilement des renseignements importants sur leur structure. En effet le groupe adjoint Γ d'un groupe clos G est également clos; d'après un théorème de M. H. Weyl [**4**], il laisse invariante au moins une forme quadratique définie positive, qu'on peut supposer ramenée à $(e^1)^2 + (e^2)^2 + \ldots + (e^r)^2$, de sorte que Γ est un groupe orthogonal. De là on déduit que les constantes de structure c_{ij}^k, antisymétriques par rapport à leurs deux premiers et par rapport à leurs deux derniers indices, ne changent pas par une permutation circulaire et changent de signe par une permutation impaire de leurs indices.

Si nous regardons les e^i comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à r dimensions, Γ est un groupe de rotations ou de symétries autour de l'origine O. Par suite s'il laisse invariante une variété linéaire à p dimensions passant par O, il laissera invariante la variété à $r - p$ dimensions totalement perpendiculaire à la première. Du reste dire qu'une variété linéaire est invariante par Γ, c'est dire que les transformations infinitésimales $e^i X_i$ dont les points-images $(e^1, \ldots, e^r)$ sont dans la variété engendrent un *sous-groupe invariant* de G. Par un choix convenable des axes, c'est-à-dire de la base infinitésimale de G, on arrive, en utilisant les remarques précédentes, à partager les r variables e^i en h séries de $p_1, p_2, \ldots, p_h$ variables, ou encore les r transformations infinitésimales de base en h séries correspondantes, de manière

1° *que les transformations d'une même série engendrent un sous-groupe invariant de* G;

2° *que ces sous-groupes soient échangeables entre eux;*

3° *qu'aucun d'eux n'admette un sous-groupe invariant d'ordre plus petit.*

Si l'une des séries ne contient qu'un élément, il lui correspond un sous-groupe invariant abélien clos. Si l'une des séries contient plusieurs éléments, il lui correspond un sous-groupe invariant *simple*, c'est-à-dire n'admettant aucun sous-groupe invariant continu. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante [**14, 16**]:

Tout groupe clos est abélien ou infinitésimalement isomorphe au produit direct d'un ou plusieurs groupes simples et éventuellement d'un groupe abélien. Cela veut dire, dans le second cas, que le produit direct en question est un groupe de recouvrement du groupe donné.

IV. — Les groupes simples clos.

Nous sommes ainsi conduits naturellement à l'étude des groupes simples clos. Le groupe adjoint Γ d'un tel groupe G ne peut laisser invariante qu'une seule forme quadratique définie (à un facteur constant près), sans quoi il laisserait invariante au moins une variété linéaire réelle, qui correspondrait à un sous-groupe invariant continu. Il en résulte que *la forme quadratique* $\varphi(e)$ *d'un groupe simple clos est définie*; on voit du reste facilement qu'elle est négative. La réciproque est fondamentale: *tout groupe dont la forme* $\varphi(e)$ *est définie est clos.*

Remarquons en passant ce fait qu'une propriété du groupe infinitésimal entraîne ici une propriété topologique du groupe global. Il n'en est pas toujours ainsi; deux groupes abéliens de même ordre, caractérisés par les mêmes constantes de structure, toutes nulles, peuvent être l'un clos, l'autre ouvert.

Il nous faut ici rappeler, avant de donner la démonstration, un théorème classique [**2**] d'après lequel tout groupe dont la forme $\varphi(e)$ est de discriminant non nul est *semi-simple*, c'est-à-dire est simple ou est infinitésimalement le produit direct de plusieurs groupes simples. Il suffit donc de démontrer la réciproque énoncée pour les groupes simples.

La démonstration se fait en deux temps: on démontre d'abord