V.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

et pour $\lambda = 1$ l'équation donnée (22). On voit tout de suite que tous les coefficients $a_{ik}^{(\lambda)}$ satisfont à la même condition de Hölder, c'est-à-dire que leurs normes hölderiennes toutes ensembles sont bornées. Pour $\lambda = 0$ notre équation est résoluble et en plus $u^{(0)}$ (c'est-à-dire sa solution pour $\lambda = 0$) satisfait ainsi que ses dérivées premières et secondes à la condition de Hölder: $\| u^{(0)} \|_{\alpha, 2}^{G} < \infty$. La méthode des approximations successives (employée pour ce problème déjà par M. Korn) démontre aisément l'existence de la solution pour λ voisin de 0 et il résulte de la démonstration que $\| u^{(\lambda)} \|_{\alpha,2}^{G} < \infty$. D'ailleurs cette démonstration devient vraiment banale si l'on se sert des notations de la théorie des opérations fonctionnelles. L'équation étant résoluble pour λ_0 nous pouvons de même établir l'existence des solutions $u^{(\lambda)}$ pour un λ voisin de λ_0 en *restant* toujours *dans la classe* de fonctions dont les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder. La limitation *uniforme* $\|u^{(\lambda)}\|_{\alpha, 2}^{G} < C$ reste valable pour toutes les solutions $u^{(\lambda)}$; on en déduit la résolubilité de (23) pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire celle de (22). En plus $u^{(1)} = u$ appartient à la classe envisagée, ce qui veut dire que ses dérivées secondes satisfont dans $G + S$ à une condition de Hölder. J'attire votre attention sur la façon extrêmement simple par laquelle notre procédé fournit l'allure de la fonction u. La transition aux valeurs aux limites continues seulement est maintenant immédiate; on applique les limitations précédentes valables pour les domaines fermés $\overline{G}$ contenus [1] dans G.

V.

Notre procédé est également simple dans le cas de l'équation plus générale

$$K(u) = \Sigma a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \Sigma b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f . \qquad (24)$$

[1] C'est la conséquence des limitations fondamentales du paragraphe précédent; il s'agit d'une évaluation qui permet de majorer $\| u \|_{\alpha, 2}^{\overline{G}}$ seulement par $\operatorname{Max}_{G} |u|$ dans chaque domaine fermé $\overline{G}$ situé à l'intérieur de G.

L'emploi des équations intégrales n'est plus nécessaire ni la construction de la fonction de Green. Posons

$$L(u) = \Sigma a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \Psi . \tag{25}$$

u est alors une *opération fonctionnelle* $F(\Psi)$ de Ψ et l'équation (24) prend la forme

$$\Psi + \Sigma b_j \frac{\partial}{\partial x_j} [F(\Psi)] + cF(\Psi) = f . \tag{26}$$

En introduisant la notation

$$W(\Psi) = \Sigma b_j \frac{\partial}{\partial x_j} F(\Psi) + cF(\Psi) , \tag{27}$$

nous avons

$$\Psi + W(\Psi) = f . \tag{28}$$

Nos limitations prouvent que $W(\Psi)$ est une opération linéaire *complètement continue* à laquelle est alors applicable la théorie développée en 1915 par M. F. Riesz. On en déduit immédiatement l'alternative suivante: l'équation non homogène (24) est toujours résoluble ou bien l'équation homogène admet une solution non nulle s'annulant sur la frontière.

VI.

Remarquons encore que ce procédé permet de traiter l'équation (24) pour des coefficients continus seulement et même bornés. J'ai démontré le résultat en question dans une note dans les *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1934. Pour le moment je me borne au cas de dimensions $n = 2$. La fonction u est continue [1], ses dérivées premières et secondes existent presque partout et l'équation (24) est valable seulement dans ce sens.

---

[1] u satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\frac{1}{2}$ et ses dérivées premières satisfont à cette condition sur presque chaque droite parallèle à une direction arbitrairement fixée.