VI. — L'existence de la solution.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

2. Les deux inégalités (5,22) et (5,31) conduisent à envisager d'une *manière plus générale* (Holmgren [3]) des fonctions $f(z)$, dérivables une infinité de fois dans un intervalle et satisfaisant dans cet intervalle à l'inégalité

$$|f^{(n)}(z)| \leqq M \frac{\Gamma(\alpha n + 1)}{\rho^n},$$

qui est équivalente à

$$|f^{(n)}(z)| \leqq M \frac{(n\,!)^\alpha}{r^n},$$

avec $\alpha \geqq 1$. Gevrey ([1], chap. III, et [2]) appelle ces fonctions *fonctions $\mathfrak{H}$ de la classe α*. A l'exception de la classe $\alpha = 1$, qui donne les fonctions analytiques, elles ne sont pas même quasi-analytiques, comme nous le montre l'exemple

$$f(z) = \int_0^z \Phi(\eta)\, e^{-\frac{1}{(z-\eta)^\beta}}\, d\eta \qquad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{\alpha - 1}$$

(Holmgren [3], p. 5).

3. Gevrey [2] a étendu la notion de classe pour des *fonctions à un nombre arbitraire de variables*. Après que E. E. Levi ([3], § 9) eut démontré pour l'équation non homogène de la chaleur que z restait analytique en x au voisinage d'un point où $f(x, y)$ était analytique en x, Gevrey [2] montra pour l'équation linéaire la plus générale et d'autres équations très générales que, en gros, les propriétés de classe de l'équation se transmettaient aussi aux solutions. Ce serait trop long de vouloir reproduire ici ces résultats d'une très grande portée.

VI. — L'existence de la solution.

Un théorème d'unicité énonce seulement qu'il y a *au plus* une solution. C'est un théorème d'existence qui doit décider si *en vérité* il y en a une.

Le problème de Cauchy.

Dans le cas *analytique* l'existence de la solution est toujours assurée, mais c'était un des premiers résultats des travaux célèbres de Holmgren que le problème de Cauchy avec des données *non analytiques* n'a *pas nécessairement une solution* et qu'une condition nécessaire et suffisante de résolubilité peut être écrite. Le résultat pour l'équation homogène de la chaleur s'énonce ainsi (Holmgren [1]) :

Si les valeurs initiales

$$\lim_{x \to x_0} u(x, y) = \varphi(y) , \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(y)$$

sont données sur le segment $x = x_0$, $a \leqq y \leqq b$, φ possédant une dérivée du premier ordre continue, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution régulière est la suivante:

$$\varphi_1(y) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^y \frac{\varphi'(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} \, d\eta$$

est une fonction $\mathfrak{H}$ de la classe 2.

On peut donner une autre forme très intuitive à cette condition assez surprenante. Le second terme de cette somme n'est autre que la dérivée $D_y^{\frac{1}{2}} \varphi$ de Riemann-Liouville (on dérive φ une fois et on effectue une intégration d'ordre une demie). Tandis que l'équation différentielle elle-même peut s'écrire sous la forme

$$\left(D_x u + D_y^{\frac{1}{2}} u\right) \left(D_x u - D_y^{\frac{1}{2}} u\right) = 0 ,$$

la condition de Holmgren s'énonce ainsi:

$D_x u + D_y^{\frac{1}{2}} u$ doit, pour $x = x_0$, être une fonction $\mathfrak{H}$ de la classe 2.

Holmgren ([3], p. 8) a généralisé ce résultat pour le cas où u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ seraient données sur une courbe et non pas sur un segment de droite et Gevrey ([2], chap. IV) l'a étendu à l'équation non homogène (1, 22) et a montré comment on pouvait traiter le problème pour l'équation linéaire la plus générale et des équations plus générales encore.

Le problème aux limites.

1. — Les équations paraboliques occupent une place intermédiaire entre les équations elliptiques et hyperboliques. Comme pour les équations elliptiques il suffit de nous donner sur la frontière seulement les valeurs de la fonction ou seulement celles d'une de ses dérivées ou bien seulement les valeurs de la fonction sur certaines parties de la frontière et seulement celles de la dérivée sur d'autres. Mais la valeur en un point ne dépend, comme pour les équations hyperboliques, que des valeurs sur la frontière située entre les deux caractéristiques correspondantes. Vu que ces dernières sont ici horizontales et coïncident, ce sont seulement les points de la frontière qui se trouvent en dessous ou bien en dessus des caractéristiques qui interviennent. Pour les équations linéaires en $\frac{\partial z}{\partial y}$ c'est le signe de $\frac{\partial z}{\partial y}$ qui le décide. Si nous envisageons des domaines dans lesquels ce signe est négatif, il s'agit de *frontières courbes* $\mathfrak{C}$, *ouvertes vers le haut.* D'après E. E. Levi ([3], § 2) on distingue trois types:

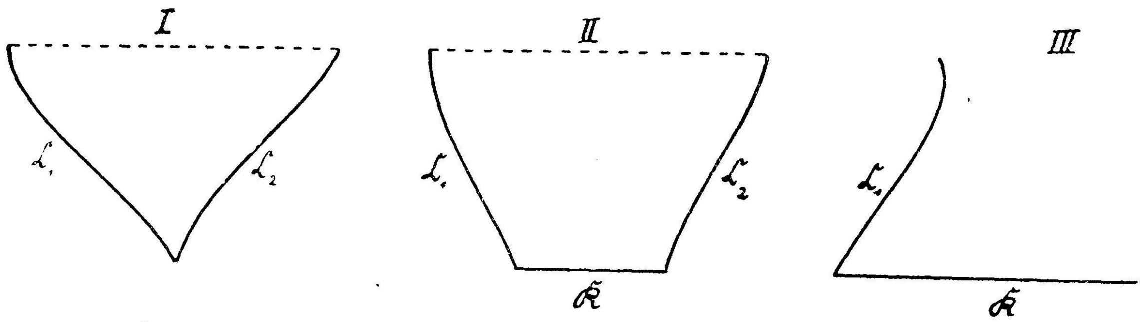

Fig. 5.

Premier type: $\mathfrak{C}$ est composée de deux courbes, représentables sous la forme

$$\mathfrak{C}_1 : \quad x = \gamma_1(y) \qquad \mathfrak{C}_2 : \quad x = \gamma_2(y) \qquad (a \leqq y \leqq b) ,$$

qui se rencontrent en bas:

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a) \ . \qquad \text{On a} \quad \gamma_1(y) < \gamma_2(y) \ ,$$

sauf pour $y = a$.

Deuxième type: $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ ne se rencontrent pas en bas, mais y sont reliées par un segment $\mathfrak{K}$ de caractéristique.

Troisième type: La courbe $\mathfrak{C}_2$ est rejetée à l'infini et $\mathfrak{C}$ ne se compose que de $\mathfrak{C}_1$ et d'un segment infini $\mathfrak{K}$ de caractéristique.

Dans la suite nous supposerons $a = 0$. — Nous ne parlerons pas ici des courbes frontières du troisième type pour lesquelles certaines choses sont particulièrement simples, d'autres non encore expliquées (voir la remarque à la fin de III). Levi insiste sur les domaines du premier type (comme limite de domaines du deuxième type) et il les traite séparément, pour la raison seulement qu'à son avis certaines intégrales dont on se sert pour la démonstration d'existence n'ont pas de sens pour ces domaines. Je crois que cette opinion n'est pas juste et que la distinction est accessoire, au moins dans les cas considérés par Levi où les valeurs sur la frontière $\mathfrak{C}$ sont continues, où par conséquent les valeurs dans les points inférieurs de $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ coïncident.

En ce qui concerne le *caractère des courbes* $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, on peut dire que les fonctions γ_1 et γ_2 (excepté au plus en un nombre fini de points)

sont analytiques chez Holmgren;

satisfont

chez Levi à une condition de Lipschitz d'ordre 1,
chez Gevrey à la même condition d'ordre α:

$$|\gamma(y) - \gamma(y')| \leqq H\,|y - y'|^{\alpha} \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \alpha \leqq 1 .$$

Cette dernière condition s'explique par le fait que, essentiellement, il s'agit toujours de la convergence d'intégrales de la forme

$$\int_0^y \frac{\gamma(y) - \gamma(\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, e^{-\frac{[\gamma(y)-\gamma(\eta)]^2}{4(y-\eta)}}\, d\eta .$$

Sous l'hypothèse de Gevrey on a pour $0 \leqq \eta < y$

$$0 < e^{-\frac{[\gamma(y)-\gamma(\eta)]^2}{4(y-\eta)}} \leqq 1 , \qquad \left|\frac{\gamma(y) - \gamma(\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\right| \leqq \frac{H}{(y-\eta)^{3/2-\alpha}}$$

$$\text{avec} \quad \frac{1}{2} \leqq \frac{3}{2} - \alpha < 1$$

et par conséquent la convergence de l'intégrale.

Dernièrement PETROWSKY [1] a appliqué aux équations paraboliques la méthode de Perron, établie pour les équations elliptiques (ce qui antérieurement a été déjà fait par Sternberg). Il a démontré de cette façon l'existence de la solution de (1,21) pour des courbes encore plus générales et il a aussi montré que cette classe était la « meilleure » dans ce sens que si on la dépassait, on pourrait donner des valeurs continues sur la frontière telles qu'aucune solution ne pourrait exister.

2. — La *démonstration d'existence* (les valeurs sur la frontière étant continues) que Holmgren a imaginée et les démonstrations de Levi et Gevrey qui s'y rattachent, se sont inspirées de la *théorie du potentiel.* Le rôle de la *solution fondamentale* (qui pour un potentiel de volume est égale à $\frac{1}{r}$) est joué dans la propagation de la chaleur par la fonction $\chi(x, y)$ de (3,331). Elle représente la distribution de la température pour $y > 0$, si l'on suppose comme état initial une source de chaleur concentrée en $x = 0$. Au *potentiel d'une couche* correspondent des intégrales de la forme

$$P_0(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} \chi(x - \xi, y)\, \Phi(\xi)\, d\xi \quad \text{(prise le long de la caractéristique } \mathfrak{K})$$

et

$$P_1(x, y) = \int_0^y \chi(x - \gamma(\eta), y - \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta \quad \text{(prise le long de } \mathfrak{C}_1 \text{ ou } \mathfrak{C}_2).$$

P_0 n'est pas définie sur $\mathfrak{K}(y = 0)$, mais a la valeur limite $\Phi(x)$ si l'on s'approche d'un point intérieur à $\mathfrak{K}$. P_1 est définie et continue aussi sur la courbe $x = \gamma(y)$. — Dans la théorie du potentiel on envisage à côté de $\frac{1}{r}$ aussi la dérivée de $\frac{1}{r}$, dérivée normale à la couche. A celle-ci correspond ici la fonction $\psi(x, y) = -\frac{\partial \chi}{\partial x}$ de (3, 311). Elle donne lieu à l'intégrale

$$P_2(x, y) = \int_0^y \psi(x - \gamma(\eta), y - \eta)\, \Phi(\eta)\, d\eta \quad \text{(prise le long de } \mathfrak{C}_1 \text{ ou } \mathfrak{C}_2),$$

qui correspond au *potentiel de double couche.* Cette intégrale a, comme dans la théorie du potentiel, des valeurs limites si (x, y) tend vers la courbe $x = \gamma(y)$, qui d'ailleurs sont différentes suivant qu'on s'en approche par la droite ou par la gauche:

$$\lim_{y \to y_0,\ x \to \gamma(y_0) \pm 0} P_2(x, y) = \pm \Phi(y_0) + \\ + \int_0^{y_0} \psi(\gamma(y_0) - \gamma(\eta), y_0 - \eta) \Phi(\eta)\, d\eta .$$

Pour $\gamma(y) =$ const. ceci est un résultat classique, pour le cas général il est donné par E. E. Levi ([2]; [3], p. 211) et Holmgren ([3], p. 6).

Avec cela on gagne le point de départ pour des démonstrations d'existence. Holmgren [2] se donne les valeurs $A(y)$ et $B(y)$ sur $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, la valeur zéro sur $\mathfrak{K}$ (on peut toujours y arriver par soustraction d'une intégrale de la forme P_0) et prend la solution de l'équation (1, 21) sous forme d'une somme de deux potentiels de chaleur de la forme P_1, sur $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$:

$$u(x, y) = \int_0^y \chi(x - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta)\, d\eta + \\ + \int_0^y \chi(x - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta)\, d\eta .$$

Il en tire, en vertu de leur continuité sur $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, les deux conditions:

$$A(y) = \int_0^y \chi(\gamma_1(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta)\, dy + \\ + \int_0^y \chi(\gamma_1(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta)\, d\eta ,$$

$$B(y) = \int_0^y \chi(\gamma_2(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta) \Phi_1(\eta)\, d\eta + \\ + \int_0^y \chi(\gamma_2(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta) \Phi_2(\eta)\, d\eta .$$

C'est un système de deux équations intégrales de Volterra de première espèce pour les densités inconnues Φ_1 et Φ_2. Holmgren le transforme, suivant le procédé de Volterra, en un système d'équations intégrales de seconde espèce dont la résolubilité est assurée.

E. E. Levi ([2]; [3], § 5) donna plus tard une démonstration d'existence basée sur la même idée, qui suit de plus près encore le procédé indiqué par Neumann pour le potentiel ordinaire. Il pose u comme différence de deux intégrales P_2, donc comme potentiel de double couche:

$$u(x, y) = \int_0^y \psi(x - \gamma_1(\eta), y - \eta)\,\Psi_1(\eta)\,d\eta - \\ - \int_0^y \psi(x - \gamma_2(\eta), y - \eta)\,\Psi_2(\eta)\,d\eta$$

et obtient, conformément à ce qui a été dit plus haut sur la valeur limite de P_2 sur les courbes $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, les conditions:

$$A(y) = \Psi_1(y) + \int_0^y \psi(\gamma_1(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta)\,\Psi_1(\eta)\,d\eta - \\ - \int_0^y \psi(\gamma_1(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta)\,\Psi_2(\eta)\,d\eta,$$

$$B(y) = \Psi_2(y) + \int_0^y \psi(\gamma_2(y) - \gamma_1(\eta), y - \eta)\,\Psi_1(\eta)\,d\eta - \\ - \int_0^y \psi(\gamma_2(y) - \gamma_2(\eta), y - \eta)\,\Psi_2(\eta)\,d\eta.$$

Ces équations intégrales pour Ψ_1 et Ψ_2 sont *a priori* de seconde espèce, de façon que leur résolubilité est évidente.

Holmgren [3] appliqua la même méthode aux cas où sur $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ est donnée la valeur de u ou de $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou encore une combinaison linéaire de u et $\frac{\partial u}{\partial x}$.

3. — Ces résultats ont à nouveau beaucoup à faire avec la question de l'*unicité*. Il semble d'après cela que pour des valeurs continues données sur la frontière, la solution pourrait bien être unique. Cette contradiction réfutant la non-unicité s'explique par le fait que cette méthode n'est applicable qu'aux solutions représentables par des potentiels de chaleur. Holmgren et Levi supposaient cela de chaque solution, mais ce n'est pas le cas pour nos solutions singulières! Supposons qu'on ait pour une solution singulière arbitraire $S(x, y)$:

$$S(x, y) = \Psi_1(y) * \psi(x, y) - \Psi_2(y) * \psi(1-x, y)$$

(dans le cas de la demi-bande de largeur un nous pouvons bien écrire le point de départ de Levi sous cette forme). Si, y étant constant, on fait tendre x une fois vers zéro, puis vers un, alors:

$$0 = \Psi_1(y) - \Psi_2(y) * \psi(1, y),$$
$$0 = \Psi_1(y) * \psi(1, y) - \Psi_2(y),$$

d'où, en employant le théorème d'addition de Cesàro (voir p. 65):

$$\Psi_1(y) = \Psi_1(y) * \psi(2, y), \qquad \Psi_2(y) = \Psi_2(y) * \psi(2, y).$$

Cela n'est possible que pour $\Psi_1 \equiv \Psi_2 \equiv 0$. Mais avec ces valeurs on aurait $S \equiv 0$.

4. — Volterra ([1], p. 66) établit, d'après la méthode de Riemann de l'équation adjointe, une *formule de Green* pour la solution de l'équation non homogène (1, 22), qui à côté des valeurs sur la frontière de z contient aussi celles de $\frac{\partial z}{\partial x}$; il montra aussi ([1], p. 67) comment on peut éliminer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur une frontière rectiligne en employant le principe des images de Lord Kelvin. E. E. Levi ([2]; [3], § 7) indiqua comment d'après cette méthode de Volterra on pouvait représenter la solution (de l'équation homogène) par ses valeurs sur la frontière, supposée polygonale, et arriver par un passage à la limite à des frontières arbitraires.

Gevrey ([1], n° 4) donna, plus explicitement encore, une *représentation de Green* de la solution de l'équation non homogène (1,22); il le fait en introduisant une fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$, représentant une certaine solution de l'équation adjointe et dont il établit l'existence à l'aide de la méthode de Holmgren indiquée plus haut, qui utilise les équations intégrales. Cette représentation est donnée par la formule

$$z(x, y) = -\int_{\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2} \frac{\partial G}{\partial \xi} z(\xi, \eta)\, d\eta + $$
$$+ \int_{\mathfrak{K}} G\, z(\xi, 0)\, d\xi - \iint_{S_y} G\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\,, \qquad (6, 4)$$

S_y désignant la partie du domaine limité par $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{K} + \mathfrak{C}_2$ se trouvant en dessous de la caractéristique d'ordonnée y. (L'intégrale double représente la solution de l'équation non homogène qui s'annule sur la frontière).

5. — Cette représentation (6,4) conduisit Gevrey ([1], n° 19-24) à une *démonstration d'existence* pour la solution de l'équation *linéaire générale* (3, 21). Car si l'on remplace (en supposant $b = -1$) la fonction f par $-a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} - c(x, y)\, z + f(x, y)$, alors (6, 4) donne:

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + \iint_{S_y} G \cdot \left(a\frac{\partial z}{\partial \xi} + cz\right) d\xi\, d\eta\,, \qquad (6, 51)$$

où ζ représente la solution de (1, 22) avec les mêmes valeurs sur la frontière. Avec cela on établit pour z une équation intégro-différentielle qui est résoluble, si certaines hypothèses sur la frontière, les coefficients et les valeurs aux limites sont satisfaites.

L'équation parabolique *générale* (1, 1) et surtout le type plus particulier

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad (6, 52)$$

peuvent alors être traités par la méthode qu'on emploie aussi pour des équations différentielles ordinaires, c'est-à-dire en les rendant « comparables » à l'équation linéaire en supposant satisfaites des conditions de Lipschitz (Gevrey [1], n° 28-34).

Récemment, une autre méthode a été employée par Siddiqi [1] dans le cas de la demi-bande et d'une solution s'annulant aux extrémités $x = 0$ et $x = \pi$. En posant

$$z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) \sin nx$$

il réduit l'équation (6, 52) à un système infini d'équations intégrales, qui est résolu par des approximations successives.

VII. — Prolongement analytique.

1. — Soit $z(x, y)$ une fonction satisfaisant dans un domaine $\mathfrak{G}$ à une équation parabolique. S'il existe un domaine $\mathfrak{G}_1$ contigu à $\mathfrak{G}$ le long d'un arc AB, et une fonction $\bar{z}(x, y)$ satisfaisant dans $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}_1$ à la même équation et identique à z dans $\mathfrak{G}$, nous dirons que z est *prolongeable* au travers de AB. C'est ainsi que Holmgren définit cette notion, en supposant d'ailleurs la *régularité* de z et $\bar{z}$. L'on pourrait aussi définir la possibilité d'un prolongement de la manière suivante: Il doit exister une fonction $z_1(x, y)$ satisfaisant dans $\mathfrak{G}_1$ à l'équation différentielle qui, ainsi que certaines de ses dérivées, se raccorde d'une façon continue avec z; l'équation différentielle doit être satisfaite aussi sur AB.

L'*exemple* suivant montre l'importance de la manière d'envisager le prolongement et le raccord continu le long de AB:

La fonction $z \equiv 0$ satisfait dans $\mathfrak{G}$: $0 < x < x_0$, $y > 0$, à l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et a, ainsi que toutes ses dérivées, la valeur zéro sur la frontière donnée par $x = x_0$.

La fonction $z_1(x, y) \equiv \psi(x - x_0, y + \alpha)$ avec $\alpha \geqq 0$ satisfait dans le domaine adjacent

$$\mathfrak{G}_1 : \quad x > x_0 \,, \quad y > 0$$

à la même équation différentielle et possède le long de la droite $x = x_0$ la valeur zéro. Mais que font les dérivées ? Si l'on complète z_1 par sa valeur sur la frontière, $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ existe le long de $x = x_0$ (du côté droit) et a la valeur $\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(y + \alpha)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$ existe