

# IX.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## IX.

L'équation aux dérivées partielles a été jusqu'ici supposée linéaire. Ce cas, nul n'en doute aujourd'hui, doit, dans toutes les applications physiques, être considéré uniquement comme une première approximation. Mais, précisément à ce titre, son étude devait devenir la première et servir de préparation à celle du cas général. On verra, dans les exposés suivants, particulièrement celui de M. Schauder, que cette dernière est déjà entreprise et même notablement avancée en ce qui regarde le problème de Dirichlet. Elle l'est aussi, grâce également à M. SCHAUDER [36], en ce qui regarde le problème de Cauchy (et, par conséquent, le cas hyperbolique) à  $n > 2$  variables indépendantes, le cas de  $n = 2$  ayant été traité dans des recherches de M. Hans LEWY [26] sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Dès que l'équation n'est plus linéaire — ou, tout au moins, « quasi linéaire » au sens le plus restreint, c'est-à-dire linéaire par rapport aux dérivées secondes avec des coefficients fonctions données des seules variables indépendantes —, elle n'est plus, *a priori*, d'un type donné: pour nous borner au cas de deux variables indépendantes, l'équation

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \quad (1 \text{ bis})$$

a ses caractéristiques définies par l'équation différentielle

$$F_r dy^2 - F_s dx dy + F_t dx^2 = 0 \quad (15'')$$

et, ici, les coefficients  $F_r$ ,  $F_s$ ,  $F_t$ , dérivées partielles de  $F$  par rapport à  $r$ ,  $s$ ,  $t$ , dépendent en général de  $u$  lui-même et de ses dérivées, de sorte que, en un même point  $(x, y)$  du plan, la quantité  $F_r F_t - F_s^2$  peut être positive ou négative suivant qu'on s'adresse à une solution ou à une autre de l'équation <sup>1</sup>. On ne peut donc assigner un type déterminé à cette dernière tant que  $u$  est lui-même inconnu.

<sup>1</sup> Un problème très curieux, analogue, mais avec plus de difficulté, à celui du type mixte traité par M. Tricomi, serait, pour une équation telle que (13) l'étude des solutions voisines d'une de celles qui annulent en tout point le discriminant du trinôme (3) correspondant.

Toutefois, cette sorte de cercle vicieux cesse de se présenter lorsque les données sont celles de Cauchy le long d'une ligne déterminée  $L$ : on connaît alors en effet, en chaque point de  $L$ , les valeurs numériques de  $u$ ,  $p$ ,  $q$  et, comme on sait, on peut en déduire celles de  $r$ ,  $s$ ,  $t$ . On a donc le droit, pour une équation telle que (1 bis) (ou pour une équation analogue à un nombre quelconque de variables) de parler d'un problème de Cauchy elliptique<sup>1</sup>, parabolique ou hyperbolique.

M. SCHAUDER traite le problème de Cauchy du type hyperbolique normal (le nombre  $n$  des variables étant quelconque) pour une équation quasi-linéaire, mais en un sens plus large que tout à l'heure, les coefficients des dérivées secondes pouvant dépendre, non seulement des variables indépendantes, mais de  $u$  et de ses dérivées premières<sup>2</sup>. Il s'en faut qu'une pareille généralisation soit banale et facile: c'est ce dont on se rend immédiatement compte d'après la remarque, faite plus haut, que les données de Cauchy, pour donner lieu à un problème possible, doivent être dérivables jusqu'à un ordre qui croît, et qui croît indéfiniment, avec  $n$ . Il y a même lieu de chercher à améliorer à ce point de vue la belle méthode de M. Schauder, car son analyse suppose la dérivabilité des données au moins jusqu'à l'ordre  $n$ , tandis que l'exemple du cas linéaire conduit à présumer qu'il suffit d'aller jusqu'à l'ordre  $\frac{n}{2}$ .

Remarquable est le rôle indispensable que jouent, dans ce travail comme dans les résultats analogues qui seront exposés à propos du cas elliptique, les principes empruntés au Calcul fonctionnel.

D'autre part, il est essentiel de noter que, jusqu'aux recherches

---

<sup>1</sup> Dans le cas général comme dans le cas linéaire, une équation analytique du type elliptique n'admet que des solutions analytiques en tout point intérieur à leur domaine d'existence. Ce théorème, énoncé par M. Hilbert, a reçu plusieurs démonstrations dues soit à M. Serge Bernstein, et à ses successeurs, soit à M. Hans Lewy. On est toutefois obligé de supposer, pour les solutions en question, l'existence de dérivées continues jusqu'à l'ordre trois (Serge Bernstein) ou même quatre (Hans Lewy).

D'après cela, l'un des raisonnements que nous avons présentés en commençant pour le type elliptique reste valable lorsqu'on ne suppose plus l'équation linéaire: un problème de Cauchy elliptique relatif à une équation analytique, la ligne  $S$  qui porte les données étant elle-même supposée analytique, mais non les données elles-mêmes, ne peut pas admettre de solution *des deux côtés* de  $S$ , étant toutefois supposé qu'il s'agit de solutions à dérivées continues (même sur  $S$ ) jusqu'au troisième ordre.

<sup>2</sup> Il est à peine besoin de dire que la multiplicité qui porte les données doit avoir une orientation d'espace.

dont nous sommes en train de parler, on ne pouvait pas affirmer, en toute rigueur, qu'une équation *non analytique* de la forme (1) (supposée algébriquement vérifiable) admet toujours des solutions, puisque la seule réponse classiquement connue est celle que fournit le théorème de Cauchy-Kowalewsky. On n'avait jamais répondu à une question de ce genre, même pour une équation linéaire, jusqu'aux importants Mémoires [1, 27] dans lesquels M. Serge Bernstein et le regretté Lichtenstein ont établi la possibilité de la représentation conforme pour une portion de surface non analytique.

On verra dans les conférences suivantes comment le problème est résolu dans le cas elliptique. La réponse, pour le cas hyperbolique résulte des travaux que nous venons de citer.

## X

Après nous être demandé si la solution du problème de Cauchy<sup>1</sup> existe, nous avons à nous demander si elle est unique (le cas caractéristique excepté, bien entendu). La question se pose même lorsque toutes les données du problème sont analytiques, car le théorème de Cauchy-Kowalewski affirme seulement qu'il n'y a qu'une seule solution *holomorphe*.

Pour une équation linéaire à coefficients analytiques<sup>2</sup>, le théorème en question — autrement dit, le fait qu'une telle équation (supposée sans second membre) n'admet, pour des données de Cauchy nulles, d'autre solution que zéro — a été établi par M. HOLMGREN [23a].

Il suffirait d'ailleurs, comme on le constate aisément [20c], de l'établir pour une équation linéaire à *coefficients quelconques*: la question serait, du même coup, élucidée pour le cas général.

Une Note de HAAR [19a, b] ouvre une première voie à cet effet en résolvant le problème pour l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (pour laquelle les méthodes clas-

<sup>1</sup> En ce qui regarde le problème de Dirichlet pour le type hyperbolique nous avons, plus haut, constaté des cas d'indétermination.

<sup>2</sup> M. HOLMGREN opère, ainsi qu'il est légitime, sur un système d'équations linéaires analytiques du premier ordre.

Une méthode particulière, d'une nature toute différente, s'applique [20b] au cas spécial de l'équation (5).