Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES Les conditions définies en général. — Le cas hyperbolique

Autor: Hadamard, J.

Kapitel: IX.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27304

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IX.

L'équation aux dérivées partielles a été jusqu'ici supposée linéaire. Ce cas, nul n'en doute aujourd'hui, doit, dans toutes les applications physiques, être considéré uniquement comme une première approximation. Mais, précisément à ce titre, son étude devait devenir la première et servir de préparation à celle du cas général. On verra, dans les exposés suivants, particulièrement celui de M. Schauder, que cette dernière est déjà entreprise et même notablement avancée en ce qui regarde le problème de Dirichlet. Elle l'est aussi, grâce également à M. Schauder [**36**], en ce qui regarde le problème de Cauchy (et, par conséquent, le cas hyperbolique) à $n > 2$ variables indépendantes, le cas de $n = 2$ ayant été traité dans des recherches de M. Hans Lewy [**26**] sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Dès que l'équation n'est plus linéaire — ou, tout au moins, « quasi linéaire » au sens le plus restreint, c'est-à-dire linéaire par rapport aux dérivées secondes avec des coefficients fonctions données des seules variables indépendantes —, elle n'est plus, *a priori*, d'un type donné: pour nous borner au cas de deux variables indépendantes, l'équation

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \qquad (1\ bis)$$

a ses caractéristiques définies par l'équation différentielle

$$F_r\, dy^2 - F_s\, dx\, dy + F_t\, dx^2 = 0 \qquad (15'')$$

et, ici, les coefficients F_r, F_s, F_t, dérivées partielles de F par rapport à r, s, t, dépendent en général de u lui-même et de ses dérivées, de sorte que, en un même point (x, y) du plan, la quantité $F_r F_t - F_s^2$ peut être positive ou négative suivant qu'on s'adresse à une solution ou à une autre de l'équation [1]. On ne peut donc assigner un type déterminé à cette dernière tant que u est lui-même inconnu.

[1] Un problème très curieux, analogue, mais avec plus de difficulté, à celui du type mixte traité par M. Tricomi, serait, pour une équation telle que (13) l'étude des solutions voisines d'une de celles qui annulent en tout point le discriminant du trinôme (3) correspondant.

Toutefois, cette sorte de cercle vicieux cesse de se présenter lorsque les données sont celles de Cauchy le long d'une ligne déterminée L: on connaît alors en effet, en chaque point de L, les valeurs numériques de u, p, q et, comme on sait, on peut en déduire celles de r, s, t. On a donc le droit, pour une équation telle que (1 *bis*) (ou pour une équation analogue à un nombre quelconque de variables) de parler d'un problème de Cauchy elliptique [1], parabolique ou hyperbolique.

M. Schauder traite le problème de Cauchy du type hyperbolique normal (le nombre n des variables étant quelconque) pour une équation quasi-linéaire, mais en un sens plus large que tout à l'heure, les coefficients des dérivées secondes pouvant dépendre, non seulement des variables indépendantes, mais de u et de ses dérivées premières [2]. Il s'en faut qu'une pareille généralisation soit banale et facile: c'est ce dont on se rend immédiatement compte d'après la remarque, faite plus haut, que les données de Cauchy, pour donner lieu à un problème possible, doivent être dérivables jusqu'à un ordre qui croît, et qui croît indéfiniment, avec n. Il y a même lieu de chercher à améliorer à ce point de vue la belle méthode de M. Schauder, car son analyse suppose la dérivabilité des données au moins jusqu'à l'ordre n, tandis que l'exemple du cas linéaire conduit à présumer qu'il suffit d'aller jusqu'à l'ordre $\frac{n}{2}$.

Remarquable est le rôle indispensable que jouent, dans ce travail comme dans les résultats analogues qui seront exposés à propos du cas elliptique, les principes empruntés au Calcul fonctionnel.

D'autre part, il est essentiel de noter que, jusqu'aux recherches

---

[1] Dans le cas général comme dans le cas linéaire, une équation analytique du type elliptique n'admet que des solutions analytiques en tout point intérieur à leur domaine d'existence. Ce théorème, énoncé par M. Hilbert, a reçu plusieurs démonstrations dues soit à M. Serge Bernstein, et à ses successeurs, soit à M. Hans Lewy. On est toutefois obligé de supposer, pour les solutions en question, l'existence de dérivées continues jusqu'à l'ordre trois (Serge Bernstein) ou même quatre (Hans Lewy).

D'après cela, l'un des raisonnements que nous avons présentés en commençant pour le type elliptique reste valable lorsqu'on ne suppose plus l'équation linéaire: un problème de Cauchy elliptique relatif à une équation analytique, la ligne S qui porte les données étant elle-même supposée analytique, mais non les données elles-mêmes, ne peut pas admettre de solution *des deux côtés* de S, étant toutefois supposé qu'il s'agit de solutions à dérivées continues (même sur S) jusqu'au troisième ordre.

[2] Il est à peine besoin de dire que la multiplicité qui porte les données doit avoir une orientation d'espace.

dont nous sommes en train de parler, on ne pouvait pas affirmer, en toute rigueur, qu'une équation *non analytique* de la forme (1) (supposée algébriquement vérifiable) admet toujours des solutions, puisque la seule réponse classiquement connue est celle que fournit le théorème de Cauchy-Kowalewsky. On n'avait jamais répondu à une question de ce genre, même pour une équation linéaire, jusqu'aux importants Mémoires [**1**, **27**] dans lesquels M. Serge Bernstein et le regretté Lichtenstein ont établi la possibilité de la représentation conforme pour une portion de surface non analytique.

On verra dans les conférences suivantes comment le problème est résolu dans le cas elliptique. La réponse, pour le cas hyperbolique résulte des travaux que nous venons de citer.

X

Après nous être demandé si la solution du problème de Cauchy [1] existe, nous avons à nous demander si elle est unique (le cas caractéristique excepté, bien entendu). La question se pose même lorsque toutes les données du problème sont analytiques, car le théorème de Cauchy-Kowalewski affirme seulement qu'il n'y a qu'une seule solution *holomorphe*.

Pour une équation linéaire à coefficients analytiques [2], le théorème en question — autrement dit, le fait qu'une telle équation (supposée sans second membre) n'admet, pour des données de Cauchy nulles, d'autre solution que zéro — a été établi par M. Holmgren [**23***a*].

Il suffirait d'ailleurs, comme on le constate aisément [**20***c*], de l'établir pour une équation linéaire *à coefficients quelconques:* la question serait, du même coup, élucidée pour le cas général.

Une Note de Haar [**19***a*, *b*] ouvre une première voie à cet effet en résolvant le problème pour l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (pour laquelle les méthodes clas-

---

[1] En ce qui regarde le problème de Dirichlet pour le type hyperbolique nous avons, plus haut, constaté des cas d'indétermination.

[2] M. Holmgren opère, ainsi qu'il est légitime, sur un système d'équations linéaires analytiques du premier ordre.

Une méthode particulière, d'une nature toute différente, s'applique [**20***b*] au cas spécial de l'équation (5).