

SUR LES ESPACES LOCALEMENT HOMOGÈNES

Autor(en): **Ehresmann, Charles**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-27319>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES ESPACES LOCALEMENT HOMOGENES ¹

PAR

Charles EHRESMANN (Paris).

Les espaces qui formeront l'objet de cette conférence sont des espaces analogues aux formes spatiales de Clifford-Klein. Je rappelle qu'une forme spatiale de Clifford-Klein est un espace de Riemann à courbure constante; suivant que cette courbure est nulle, positive ou négative, on aura un espace localement euclidien, localement sphérique ou localement hyperbolique. Etant donné un espace localement euclidien, par exemple, celui-ci est aussi caractérisé par le fait que les déplacements euclidiens voisins de la transformation identique sont définis dans un voisinage suffisamment petit de chaque point. Une généralisation immédiate de cette dernière définition s'obtient en remplaçant le groupe des déplacements euclidiens par un groupe de transformations continu et transitif quelconque, en particulier par un groupe continu et transitif de Lie. On définit ainsi les espaces localement homogènes que nous allons étudier. Bien que les résultats que je pourrai indiquer soient encore incomplets, il m'a semblé que ce sujet méritait d'être traité ici, parce qu'il touche à la fois à la théorie des groupes et à la topologie et parce qu'il conduit à des relations entre les propriétés infinitésimales et les propriétés globales d'un espace.

1. — Avant de préciser la notion d'espace localement homogène, il sera utile de rappeler la *définition d'un groupe de trans-*

¹ Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

formations de Lie au sens local ou au sens global. Soit V une variété à n dimensions, c'est-à-dire un espace topologique régulier admettant un système de voisinages dont chacun est homéomorphe à l'intérieur d'un simplexe à n dimensions. Soit G un ensemble de transformations topologiques dont chacune est définie pour tout point d'un domaine D de V , les points de D étant transformés en des points de V qui n'appartiennent pas forcément à D . L'ensemble G forme un groupe continu à r paramètres au sens local lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes :

a) Les éléments de G peuvent être mis en correspondance biunivoque avec les points d'une variété à r dimensions, que nous désignerons par (G) , telle que, si $M' = \varphi(M, s)$ est la transformation correspondant au point s de (G) , la fonction $\varphi(M, s)$ soit continue par rapport à l'ensemble des points M et s .

b) L'ensemble G contient la transformation identique; soit i le point correspondant de (G) .

c) Il existe dans (G) un voisinage Δ du point i tel qu'on ait les propriétés suivantes: Si a est un point de Δ , il existe dans D des points M dont les transformés $M' = \varphi(M, a)$ appartiennent à D ; pour tout point M de cette espèce et pour tout point b de Δ , on a :

$$M'' = \varphi[\varphi(M, a), b] = \varphi(M, c) .$$

Le point c de (G) qui correspond ainsi à l'ensemble des points a et b est défini par une fonction $c = \psi(a, b)$.

d) Soit a un point de Δ et M un point quelconque de D tel que le point $M' = \varphi(M, a)$ appartienne à D . Il existe dans (G) un point a^{-1} tel que $M = \varphi(M', a^{-1})$.

e) La fonction $\psi(a, b)$ est continue par rapport à l'ensemble des points a et b ; le point a^{-1} est une fonction continue du point a .

Un groupe G satisfaisant aux conditions précédentes est appelé *groupe de Lie au sens local* s'il existe, dans un voisinage du point i , un système de coordonnées tel que les coordonnées du point $c = \psi(a, b)$ soient des fonctions analytiques par rapport aux coordonnées des points a et b .

Le groupe G est dit transitif dans D si tout point M de D admet un voisinage tel que, M' étant un point quelconque de ce

voisinage, il existe au moins une transformation de G qui transforme M en M' . Si G est un groupe continu transitif de Lie au sens local, il existe des systèmes de coordonnées définis respectivement dans un voisinage de M_0 et dans un voisinage de i tels que les coordonnées du point $M' = \varphi(M, a)$ soient des fonctions analytiques par rapport à l'ensemble des coordonnées de M et de a , en supposant que M et a appartiennent à des voisinages suffisamment petits de M_0 et de i . Deux systèmes de coordonnées qui sont définis dans un voisinage de M_0 et qui jouissent de la propriété précédente se déduisent l'un de l'autre par une transformation analytique.

Un ensemble de transformations topologiques, G , forme un *groupe continu à r paramètres au sens global* lorsqu'il satisfait aux conditions $a), \dots, e)$, en supposant que dans l'énoncé de ces conditions D soit remplacé par V et Δ par (G) . L'ensemble G forme un *groupe de Lie au sens global* lorsqu'il définit un groupe continu à r paramètres au sens global et un groupe de Lie au sens local. Je signale le théorème suivant :

Etant donné un groupe continu à r paramètres au sens local dont les transformations sont définies pour tous les points de la variété V (c'est-à-dire le domaine D est confondu avec V), l'ensemble des transformations dont chacune est le produit d'un nombre fini de transformations appartenant au voisinage Δ de i forme un groupe continu à r paramètres au sens global.

2. — Appelons *espace homogène de Lie* une variété à n dimensions dans laquelle est défini un groupe de transformations continu et transitif de Lie au sens global.

Appelons *espace localement homogène de Lie* (en général nous dirons simplement espace localement homogène) une variété E à n dimensions jouissant des propriétés suivantes :

a) Chaque point M de E appartient à un voisinage V_M à l'intérieur duquel est défini un groupe continu et transitif de Lie au sens local qui transforme les points de V_M en des points de E ; le voisinage V_M sera appelé *voisinage élémentaire*.

b) Soit d un domaine commun à deux voisinages élémentaires. Etant donnés les deux groupes de Lie au sens local attachés à ces voisinages, il existe dans chacun d'eux un voisinage de la

transformation identique tel que les transformations de l'un de ces voisinages soient en correspondance biunivoque avec celles de l'autre, deux transformations correspondantes opérant de la même façon sur les points de d .

Un espace localement homogène de Lie peut encore être défini comme étant une variété E à n dimensions qui jouit des propriétés suivantes:

a) Chaque point M de E appartient à un voisinage V_M dans lequel on a défini un système de coordonnées et un ensemble de r transformations infinitésimales linéairement indépendantes qui engendrent un groupe transitif de Lie au sens local.

b) Soit d un domaine commun à deux voisinages élémentaires V_M et $V_{M'}$. Le changement de coordonnées défini pour les points de d transforme les r transformations infinitésimales définies dans V_M en r combinaisons linéaires des transformations infinitésimales définies dans $V_{M'}$.

Remarquons qu'un espace homogène de Lie est aussi un espace localement homogène de Lie.

Etant donnés deux points M et M' d'un voisinage élémentaire, appelons transformation élémentaire de M en M' toute transformation qui transforme M en M' et qui appartient au groupe de Lie au sens local attaché à ce voisinage. Si A et B sont deux points quelconques de E , on montre que A peut être transformé en B par la succession d'un nombre fini de transformations élémentaires. Il en résulte que les groupes de Lie, au sens local, définis respectivement au voisinage de A et au voisinage de B sont semblables.

La variété d'un espace localement homogène est une variété analytique. En effet, dans chaque voisinage élémentaire on peut introduire un système de coordonnées tel que le groupe de Lie, au sens local correspondant, soit analytique par rapport à ces coordonnées et par rapport aux paramètres. Le changement de coordonnées qui en résulte pour un domaine commun à deux voisinages élémentaires est alors également analytique.

3. — Deux espaces localement homogènes E et E' sont dits *équivalents* lorsqu'il existe une transformation topologique de E en E' telle que, M et M' étant deux points correspondants, les

transformations infinitésimales définies au voisinage de M soient transformées en les transformations infinitésimales définies au voisinage de M' . Les deux espaces E et E' sont dits *localement équivalents* lorsqu'il existe un voisinage élémentaire dans E qui soit équivalent à un voisinage élémentaire dans E' . Le problème général que nous nous proposons d'étudier s'énonce maintenant de la façon suivante:

Trouver tous les espaces localement homogènes qui soient localement équivalents à un espace localement homogène donné: en d'autres termes, trouver tous les espaces localement homogènes qui soient le prolongement d'un élément d'espace localement homogène donné.

Une question intéressante qui se pose aussitôt est la suivante: *Existe-t-il toujours un espace homogène qui soit localement équivalent à un espace localement homogène donné?*

Pour répondre à cette question, je rappelle les propriétés suivantes: Soit H un espace homogène de Lie et G le groupe de Lie correspondant. Soit g le sous-groupe formé par l'ensemble des transformations de G qui laissent invariant un point O de H . Le sous-groupe g est fermé dans G et n'admet aucun sous-groupe invariant dans G . Réciproquement étant donné un groupe abstrait de Lie, G , et un sous-groupe g qui est fermé dans G et qui ne contient aucun sous-groupe invariant dans G , on peut définir un espace homogène H dont le groupe de transformations G_1 est isomorphe à G , le sous-groupe de G_1 qui correspond à g étant le plus grand sous-groupe dont les transformations laissent invariant un point O de H .

Si G est un groupe transitif de Lie au sens local, il existe dans G un voisinage Δ de la transformation identique tel que les transformations qui appartiennent à Δ et qui laissent invariant un point O forment un sous-groupe continu de Lie au sens local. Réciproquement soit (G) un groupe abstrait de Lie au sens local et soit (g) un sous-groupe continu de Lie au sens local. Si (g) n'admet aucun sous-groupe continu invariant dans (G) , il existe un groupe de transformations continu et transitif de Lie au sens local, que nous désignerons par G_1 , tel que ce groupe soit localement isomorphe à (G) , son sous-groupe qui correspond par cette isomorphie à (g) étant le plus grand sous-groupe continu

qui laisse invariant un certain point. D'après le troisième théorème fondamental de Lie démontré du point de vue global par M. E. CARTAN, la variété (G) peut être considérée comme un voisinage de l'élément unité d'un groupe abstrait de Lie au sens global. Désignons ce groupe par (G') ; on peut le supposer simplement connexe; sinon on le remplacerait par son groupe de recouvrement simplement connexe. Le sous-groupe (g) au sens local se prolonge dans (G') en un sous-groupe continu de Lie au sens global; soit (g') ce prolongement. Pour que le groupe G_1 puisse être prolongé en un groupe transitif de Lie au sens global, il faut et il suffit que (g') soit fermé dans (G') . Or on sait qu'un groupe de Lie (G') simplement connexe peut avoir des sous-groupes continus qui ne sont pas fermés dans (G') . Par exemple, un groupe simple clos, simplement connexe et de rang supérieur à 1 admet des sous-groupes ouverts à un paramètre; un tel sous-groupe n'admet évidemment aucun sous-groupe continu invariant dans le groupe simple donné. Donc *il existe effectivement des espaces localement homogènes qui ne sont localement équivalents à aucun espace homogène.*

Pratiquement il est difficile de reconnaître si un groupe transitif de Lie au sens local défini dans un certain domaine par r transformations infinitésimales données peut être prolongé en un groupe de Lie au sens global. Remarquons seulement qu'une condition suffisante pour que ce prolongement existe est que le plus grand sous-groupe au sens local qui laisse invariant un point O ne laisse invariant aucun autre point dans un voisinage suffisamment petit de O . M. E. Cartan a déterminé tous les espaces homogènes de Lie à deux dimensions. On constate que tout espace localement homogène à deux dimensions est localement équivalent à un espace homogène. La même question n'est pas encore résolue dans le cas de trois dimensions et on n'a jamais déterminé tous les espaces homogènes de Lie à trois dimensions.

4. — Je signale le théorème suivant:

Si un espace localement homogène de Lie est clos et simplement connexe, il est équivalent à un espace homogène de Lie.

On en déduit que tout espace localement homogène clos, dont le groupe de Poincaré est fini, est localement équivalent à un espace homogène. Pour démontrer le théorème énoncé, on applique surtout la propriété suivante: *Etant donné un espace localement homogène E, tout arc AB établit un isomorphisme local bien déterminé entre les groupes de Lie, au sens local, définis respectivement au voisinage de A et au voisinage de B; cet isomorphisme ne varie pas lorsqu'on déforme l'arc AB, les extrémités A et B restant fixes.* En particulier, si l'espace E est simplement connexe, il existe un isomorphisme local bien déterminé entre les groupes de Lie au sens local définis respectivement dans les voisinages de deux points quelconques de E.

5. — Par la suite nous porterons notre attention sur les espaces localement homogènes qui sont localement équivalents à un espace homogène donné. Soit H un espace homogène de Lie et G le groupe de transformations correspondant. On démontre alors le fait suivant:

Si \bar{H} est la variété de recouvrement simplement connexe de H, cette variété \bar{H} définit un espace homogène localement équivalent à H; le groupe \bar{G} correspondant à \bar{H} est un groupe de recouvrement (pas forcément simplement connexe) de G.

Appelons automorphisme de l'espace homogène H une transformation topologique T de H en lui-même telle que la transformée par T de toute transformation de G appartienne encore à G. Appelons automorphisme local une transformation topologique qui transforme un voisinage d'un point A de H en un voisinage d'un point B de H de telle façon que la transformée de toute transformation infinitésimale de G soit encore une transformation infinitésimale de G. On démontre alors le théorème suivant:

Tout automorphisme local d'un espace homogène simplement connexe se prolonge en un automorphisme global de cet espace.

La démonstration de ce théorème repose sur le fait suivant:

Si G est un groupe abstrait de Lie au sens global, tout auto-

morphisme local de (G) se prolonge en un automorphisme global de (G).

Soit E un espace localement homogène que nous supposons localement équivalent à un espace homogène simplement connexe H . Définissons le *développement sur H d'un arc de l'espace E* . Nous appelons arc la figure décrite par un point qui est une fonction continue d'un paramètre variant de 0 à 1. Soit OA un arc de E . Tout point M de E appartient à un voisinage élémentaire qui est équivalent à un voisinage d'un point \bar{M} de H . En vertu du lemme de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir l'arc OA par une suite d'un nombre fini d'arcs partiels telle que deux arcs partiels successifs empiètent l'un sur l'autre et telle que tout arc partiel soit contenu dans un voisinage élémentaire équivalent à un voisinage dans l'espace H . Soit V_0, V_1, \dots, V_k cette suite de voisinages; nous pouvons supposer que deux voisinages successifs n'aient qu'un seul domaine en commun. Une suite de voisinages de cette espèce sera appelée une chaîne de voisinages recouvrant l'arc OA . Le voisinage V_0 du point O peut être représenté sur un voisinage \bar{V}_0 d'un point \bar{O} de H . Le voisinage V_1 est équivalent à un voisinage \bar{V}'_1 dans H . Soit d le domaine commun à V_0 et à V_1 . Il est représenté d'une part sur un domaine \bar{d} de \bar{V}_0 et d'autre part sur un domaine \bar{d}' de \bar{V}'_1 . L'automorphisme local qui transforme \bar{d}' en \bar{d} se prolonge en un automorphisme global qui transforme \bar{V}'_1 en un voisinage \bar{V}_1 . En répétant cette opération, on pourra représenter la chaîne de voisinage V_0, V_1, \dots, V_k sur une chaîne de voisinages $\bar{V}_0, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_k$. L'arc OA sera représenté sur un arc $\bar{O}\bar{A}$ recouvert par la chaîne de voisinages $\bar{V}_0, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_k$. Nous dirons que l'arc $\bar{O}\bar{A}$ est un développement sur H de l'arc OA ; de même l'arc OA sera appelé un développement sur E de l'arc $\bar{O}\bar{A}$. On a ainsi le résultat suivant:

Un voisinage du point O de E étant représenté sur un voisinage d'un point \bar{O} de H , tout arc OA de E admet un développement bien déterminé suivant un arc $\bar{O}\bar{A}$ de H . Si deux arcs d'origine O et d'extrémité A sont réductibles l'un à l'autre par déformation continue, leurs développements conduisent de \bar{O} au même point \bar{A} .

La dernière partie de cet énoncé se démontre en appliquant le lemme de Borel-Lebesgue à une famille continue d'arcs d'origine O et d'extrémité A . On démontre de même le théorème suivant :

Un voisinage de O étant représenté sur un voisinage de \bar{O} , soit $\bar{O}\bar{A}$ un arc quelconque de H . Ou bien l'arc $\bar{O}\bar{A}$ se développe suivant un arc bien déterminé OA de E , ou bien il existe sur l'arc $\bar{O}\bar{A}$ un point \bar{C} tel que l'arc $\bar{O}\bar{C}$ moins le point \bar{C} se développe suivant une ligne divergente sur l'espace de recouvrement simplement connexe de E . Etant donnée sur H une famille continue d'arcs d'origine \bar{O} et d'extrémité \bar{A} telle que chacun de ces arcs admette sur E un développement issu de O , ce développement conduit toujours au même point A .

Les propriétés précédentes conduisent aux résultats suivants :

Si l'espace localement homogène E est clos et simplement connexe, il est équivalent à l'espace homogène H . Si E est clos et admet un groupe de Poincaré fini, l'espace de recouvrement simplement connexe de E est équivalent à H . Si E est clos et H ouvert, le groupe de Poincaré de E est infini.

Soit H' un espace homogène localement équivalent à H ; si H' est simplement connexe, il est équivalent à H ; si H' n'est pas simplement connexe, son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent à H .

6. — Considérons maintenant une classe particulièrement intéressante d'espaces localement homogènes. Un espace E de cette classe satisfait à la condition suivante qui sera appelée *condition de normalité* : L'espace E est localement équivalent à un espace homogène H que nous supposerons simplement connexe, et toute ligne divergente sur l'espace de recouvrement simplement connexe de E se développe suivant une ligne divergente de H . L'espace E sera appelé *espace localement homogène normal* ou encore *forme de Clifford* de l'espace homogène H . En particulier, tout espace homogène localement équivalent à H est normal; on l'appelle *forme de Klein* de l'espace homogène H .

De même tout espace localement homogène clos dont le groupe de Poincaré est fini satisfait à la condition de normalité. On démontre facilement le théorème suivant :

Soit E un espace normal localement équivalent à l'espace homogène simplement connexe H ; l'espace H est équivalent à l'espace de recouvrement simplement connexe de E.

Un voisinage du point O de E étant représenté sur un voisinage équivalent du point \bar{O} de H, tout arc OM de E se développe suivant un arc déterminé $\bar{O}\bar{M}$ de H. La correspondance entre M et \bar{M} jouit alors des propriétés suivantes : A tout point \bar{M} de H correspond un point déterminé M de E. Les points de H qui correspondent à un même point M de E forment un ensemble de points équivalents par rapport à un groupe d'automorphismes de l'espace H. Ce groupe s'appelle le groupe d'holonomie de l'espace E. Il est isomorphe au groupe de Poincaré de l'espace E. De plus il est proprement discontinu dans tout l'espace H et aucune de ses opérations n'admet de points invariants dans H. La recherche des formes de Clifford de l'espace H revient ainsi à la recherche des groupes d'automorphismes de H qui peuvent être considérés comme des groupes d'holonomie.

Soit Γ un groupe d'automorphismes de H. Pour que Γ soit le groupe d'holonomie d'un espace localement homogène normal il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- a) Γ est proprement discontinu dans tout l'espace H.
- b) Aucune opération de Γ n'admet des points invariants.
- c) Considérons dans H deux voisinages quelconques ν et ν' , distincts ou confondus. Parmi les voisinages transformés de ν par Γ , il y a au plus un nombre fini de voisinages qui ont des points communs avec ν' .

Lorsque ces conditions sont vérifiées, les ensembles de points équivalents par rapport à Γ peuvent être considérés comme les points d'un espace E qui sera une forme de Clifford de H.

La condition c) est vérifiée d'elle-même lorsque Γ est un groupe fini. Cette condition est une conséquence des conditions a) et b) lorsque Γ laisse invariante une métrique définie dans H. En particulier, supposons que H soit un espace riemannien dont la

métrique est invariante par le groupe G qui opère transitivement dans H . Lorsqu'un groupe d'automorphismes Γ laisse invariante cette métrique riemannienne et satisfait aux conditions $a)$ et $b)$, c'est le groupe d'holonomie d'un espace riemannien localement équivalent à H , c'est-à-dire localement applicable sur H . Il serait intéressant de savoir si la condition $c)$ est toujours une conséquence des conditions $a)$ et $b)$, lorsque le groupe Γ est un groupe d'automorphismes de H . J'ignore la réponse à cette question. On sait seulement que la condition $c)$ n'est pas nécessairement une conséquence des conditions $a)$ et $b)$ lorsque Γ se compose de transformations topologiques quelconques de H .

7. — La condition de normalité, pour un espace localement homogène E , peut être remplacée, dans certains cas, par des conditions plus simples. Considérons en particulier les espaces riemanniens localement homogènes. On voit facilement que la condition de normalité est équivalente dans ce cas à la condition suivante: *Dans l'espace E , toute ligne divergente localement rectifiable a une longueur infinie.* Cette condition est encore équivalente à d'autres conditions, par exemple à la condition suivante: *Sur tout rayon géodésique on peut reporter, à partir de son origine, une longueur donnée arbitraire.* L'équivalence des deux conditions précédentes s'établit facilement dans le cas d'un espace riemannien localement homogène. M. Hopf et M. Rinow ont même démontré cette équivalence pour un espace de Riemann quelconque.

Dans le cas des espaces localement affines, c'est-à-dire localement équivalents à l'espace affine, la condition de normalité peut être remplacée par la suivante: *Etant donnée une géodésique quelconque de l'espace localement affine, un point M qui décrit la géodésique peut être défini en fonction d'un paramètre s tel que, dans tout système de coordonnées affines locales, les coordonnées de M soient des fonctions linéaires de s ; l'espace considéré sera alors normal si à toute valeur de s comprise entre $-\infty$ et $+\infty$ correspond un point M de la géodésique donnée.*

8. — Lorsqu'un espace riemannien localement équivalent à un espace riemannien homogène est clos, il est normal; car il n'y

a pas de lignes divergentes dans cet espace. Mais dans le cas général, un espace localement homogène clos n'est pas forcément normal. Les espaces localement homogènes normaux ainsi que les espaces localement homogènes clos font partie de la classe plus générale des espaces localement homogènes non prolongeables. Un espace localement homogène E est dit non prolongeable lorsqu'il n'est pas équivalent à un domaine D d'un espace localement homogène E' , le domaine D ayant des points frontières dans E' . On démontre facilement le théorème suivant :

Tout espace homogène est non prolongeable.

Il suffit d'appliquer le théorème qui dit que tout arc d'un espace localement équivalent à un espace homogène H admet un développement sur H . Il résulte immédiatement de ce théorème que *tout espace localement homogène normal est non prolongeable*. De même il est clair que tout espace clos est non prolongeable. Il existe des espaces localement homogènes non prolongeables (même simplement connexes ou clos) qui ne sont pas normaux. Par exemple, soit H un espace homogène à 3 dimensions et considérons un nœud dans cet espace. Tout espace de recouvrement à plusieurs feuillets de l'espace complémentaire du nœud est non prolongeable. D'une façon générale, le théorème relatif au développement d'un arc sur un espace homogène permet de reconnaître si un espace localement homogène donné est prolongeable ou non prolongeable. Il serait intéressant de savoir si tout espace prolongeable est équivalent à un domaine d'un espace non prolongeable.

9. — Donnons quelques applications des notions et propriétés générales qui précèdent. Je ne parlerai pas des espaces localement euclidiens ou localement non euclidiens, car ce sujet est bien connu. Je signale que les formes de Clifford ou de Klein des espaces riemanniens homogènes, en particulier des espaces riemanniens symétriques, ont été considérées par M. E. Cartan dans plusieurs de ses travaux. Je me propose d'indiquer seulement quelques propriétés des espaces localement projectifs.

Un *espace localement projectif* est un espace localement équivalent à un espace projectif réel. On peut encore le définir de la

façon suivante: Un espace localement projectif E est une variété à n dimensions sur laquelle on a défini un système de courbes appelées géodésiques tel que chaque point de E appartient à un voisinage qui admet une représentation topologique sur un domaine de l'espace projectif, les arcs de géodésiques étant représentés par des segments de droites.

Tout espace localement euclidien, localement non-euclidien ou localement affine est évidemment un espace localement projectif. D'une façon générale, si H est un espace homogène et G le groupe de transformations correspondant, tout sous-groupe continu G' qui est localement transitif dans un domaine de H définit un espace homogène H' , et tout espace localement équivalent à H' définit aussi un espace localement équivalent à H .

Soit S l'espace de recouvrement simplement connexe de l'espace projectif à n dimensions. L'espace S est homéomorphe à la sphère à n dimensions et recouvre deux fois l'espace projectif. Un point de S est représenté par l'ensemble de $n + 1$ quantités $\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n$, non toutes nulles, le nombre λ étant un nombre positif quelconque. Le groupe d'automorphismes (A) de l'espace S est le groupe dont la transformation générale est:

$$x'_i = a_{ij} x_j, \quad \text{déterminant } |a_{ij}| = \pm 1.$$

L'application d'un résultat général au cas présent donne le théorème suivant:

Tout espace localement projectif clos et à groupe de Poincaré fini admet l'espace S pour espace de recouvrement simplement connexe.

Les espaces de cette classe sont les espaces localement projectifs normaux. Un espace localement projectif normal peut aussi être caractérisé par la propriété suivante: *Toute géodésique de l'espace est une courbe fermée.*

Tout espace localement projectif normal est défini par un groupe formé d'un nombre fini de transformations du groupe (A), chacune de ces transformations étant sans points invariants dans S . Réciproquement tout groupe fini de cette espèce définit un espace localement projectif normal. Or tout groupe fini de

transformations de (A) laisse invariante au moins une forme quadratique définie en x_0, x_1, \dots, x_n , que nous pouvons supposer être la forme $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. Le groupe considéré est donc un groupe de déplacements sphériques. Donc

THÉORÈME: *Tout espace localement projectif normal est équivalent à un espace localement sphérique normal (forme spatiale de Clifford à courbure constante positive). En particulier, tout espace homogène localement équivalent à l'espace projectif est équivalent à l'espace projectif ou à l'espace sphérique.*

Les espaces localement euclidiens ou localement hyperboliques sont des espaces localement projectifs qui ne sont pas normaux. Si les géodésiques d'un espace localement projectif sont les géodésiques d'une métrique riemannienne, cet espace est localement euclidien ou non-euclidien. Il existe des espaces localement projectifs, même clos, qui ne sont pas équivalents à des espaces localement euclidiens ou non-euclidiens. Considérons, par exemple, dans le plan projectif la transformation $x_0^1 = \lambda x_0$, $x_1^1 = x_1$, $x_2^1 = x_2$ et le groupe Γ engendré par cette transformation. Dans le domaine obtenu en enlevant du plan projectif la droite $x_0 = 0$ et le point $x_1 = x_2 = 0$, le groupe Γ a les caractères d'un groupe d'holonomie et définit un espace localement projectif E. On peut prendre pour domaine fondamental du groupe Γ le domaine compris entre les deux coniques $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 - \lambda^2 x_0^2 = 0$. On voit donc que l'espace E est homéomorphe au tore, mais les géodésiques de cet espace ne peuvent pas être les géodésiques d'une métrique riemannienne. De plus ces géodésiques ne satisfont pas à la condition suivante que nous appellerons condition de convexité: *Supposons donnée une famille continue d'arcs géodésiques AB_t , l'origine A étant fixe et l'extrémité B_t étant une fonction continue d'un paramètre t, définie pour $0 \leq t < 1$; si B_t tend vers un point B_1 lorsque t tend vers 1, l'arc géodésique AB_t tend vers un arc géodésique AB_1 .* Remarquons que les géodésiques d'un espace riemannien normal satisfont à cette condition ainsi que les géodésiques d'un espace localement projectif normal ou d'un espace localement affine normal. Un espace localement projectif qui satisfait à la condition de convexité sera appelé convexe.

Les géodésiques issues d'un point remplissent tout l'espace. On peut démontrer le théorème suivant :

L'espace de recouvrement simplement connexe d'un espace localement projectif convexe est équivalent à l'espace sphérique S ou bien à un domaine convexe de l'espace projectif.

Réciproquement, soit D un domaine convexe de l'espace projectif, c'est-à-dire un domaine satisfaisant à notre condition de convexité. Soit Γ un groupe de transformations projectives qui transforme D en lui-même, qui est proprement discontinu dans D et dont les transformations n'admettent pas de points invariants dans D . On sait qu'on peut définir dans D une métrique en prenant pour distance de deux points M et M' le logarithme du rapport anharmonique des points M , M' et des deux points d'intersection de la droite MM' avec la frontière de D . Cette métrique est invariante par Γ . L'ensemble des points équivalents à un point de D par rapport au groupe Γ peut donc être considéré comme le point général d'un espace localement projectif; celui-ci sera convexe et admettra D pour espace de recouvrement simplement connexe. Dans ce raisonnement on a supposé que D n'est pas l'espace affine.

10. — Considérons plus spécialement les espaces localement projectifs convexes à deux dimensions. Faisons abstraction des espaces localement projectifs normaux, c'est-à-dire de l'espace sphérique à deux dimensions et du plan projectif. Soit E un espace localement projectif clos. Son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent à un domaine convexe D du plan projectif; appelons C la frontière de D . L'espace E sera défini par un groupe projectif Γ qui a les caractères d'un groupe d'holonomie dans le domaine D ; ce groupe Γ est d'ailleurs infini. On montre alors que les seuls cas qui peuvent se présenter sont les suivants: 1° C est une droite et D est le plan affine; 2° C se compose de deux droites et D est le demi-plan affine; 3° C se compose de trois segments de droites et D est l'intérieur d'un triangle; 4° C se compose d'un segment de droite et d'un arc de courbe tel que les transformés par Γ de tout point de cet arc forment un ensemble partout dense sur cet arc; 5° les transformés de tout point de C (peut-être à l'exception d'un point)

forment un ensemble partout dense sur C . Supposons que C soit composé d'arcs analytiques. Alors la partie non rectiligne de C est à courbure projective constante. On peut en déduire que les seuls cas possibles sont les trois premiers cas et le cinquième cas où D est l'intérieur d'une conique. On a par conséquent le résultat suivant :

Si un espace localement projectif à deux dimensions est convexe et clos, il est équivalent à l'espace sphérique, ou bien à l'espace projectif, ou bien à un espace localement hyperbolique, ou bien à un espace localement affine normal, ou bien son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent soit au demi-plan affine, soit à l'intérieur d'un triangle, soit à un domaine convexe du plan projectif dont la frontière contient des arcs non analytiques.

Il paraît probable que le dernier cas ne peut pas se présenter. On a de même le résultat suivant :

Si un espace localement affine à deux dimensions est convexe et clos, il est normal, ou bien son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent soit au demi-plan affine, soit à un domaine du plan affine limité par deux demi-droites issues d'un point, soit à un domaine convexe du plan affine dont la frontière contient des arcs non analytiques.

Plus généralement on peut démontrer que les deux énoncés précédents sont encore valables pour les espaces localement projectifs ou pour les espaces localement affines qui sont *convexes* et *non prolongeables*. Remarquons cependant qu'un espace localement hyperbolique normal est prolongeable en tant qu'espace localement projectif lorsque le groupe Γ correspondant est proprement discontinu sur la conique C .

11. — Il est intéressant de considérer également les espaces localement projectifs complexes. L'espace projectif complexe est simplement connexe. Dans le cas d'un nombre pair de dimensions, l'espace projectif complexe n'admet pas de forme de Clifford autre que lui-même. Dans le cas d'un nombre impair de dimensions complexes, il existe une forme de Clifford distincte de l'espace projectif complexe. Cette forme de Clifford est

non orientable, et elle peut aussi être considérée comme une forme de Clifford de l'espace hermitien elliptique.

On détermine encore facilement les espaces localement conformes normaux. *On peut démontrer que ceux-ci sont aussi équivalents aux espaces localement sphériques normaux.*

Pour terminer remarquons que les espaces localement homogènes considérés sont des cas particuliers des espaces non holonomes définis d'une façon générale par M. E. Cartan. Ce sont les espaces non holonomes correspondant à un groupe transitif de Lie G tels que les déplacements infinitésimaux attachés aux différents vecteurs infinitésimaux de l'espace satisfont aux équations de structure du groupe G . L'étude des espaces localement homogènes est ainsi le premier pas dans l'étude des propriétés globales des espaces non holonomes.

BIBLIOGRAPHIE

- E. CARTAN. *a)* L'application des espaces de Riemann et l'analysis situs (*Ass. fr. p. l'Avancement d. sciences*, 50^{me} session, Lyon, 1926);
b) La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (*Mémorial sc. math.*, fasc. XLII, 1930).
- C. EHRESMANN. Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 196, 1933, p. 1354-1355).
- H. HOPF. *a)* Differentialgeometrie und topologische Gestalt (*Jahresb. d. deutsch. Math. Ver.*, XLI, 1932, p. 209-229);
b) Géométrie infinitésimale et Topologie (*L'Enseign. math.*, 30, 1931, p. 233-240).
- J. H. C. WHITEHEAD. Locally homogeneous spaces in differential Geometry (*Ann. of Math.*, 2, 33, 1932, p. 681-687).
- Sur les formes spatiales de Clifford-Klein, consulter la bibliographie dans H. HOPF, *a)* ou *b)*.
-