

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

## Conférences et communications.

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

---

## I. — Réunion de Berne, 12 mai 1935.

*Le 25<sup>me</sup> anniversaire de la Société mathématique suisse.*

La Société mathématique suisse a tenu à marquer par une séance spéciale le 25<sup>me</sup> anniversaire de sa fondation. La réunion a eu lieu à l'Université de Berne, le 12 mai 1935, sous la présidence de M. le Professeur W. SAXER (Zurich). Elle débuta par une conférence magistrale de M. le Professeur C. CARATHÉODORY (Munich), intitulée « Exemples particuliers et Théories générales dans le Calcul des variations ». On trouvera le texte français dans le présent fascicule.

Après une courte interruption, le président ouvre la séance commémorative et salue la présence de M. le Professeur SENN (Bâle), président de la Société helvétique des Sciences naturelles, de M. le Professeur S. DUMAS (Berne), président de la Société suisse des Actuaires, et de M. le Dr MARTI (Berne), président de la Société suisse des Professeurs de Mathématiques, qui ont bien voulu nous honorer de leur présence. Puis il donne lecture d'un message de M. le Conseiller fédéral ETTER par lequel le Chef du Département fédéral de l'Intérieur exprime sa reconnaissance à la Société mathématique pour les services rendus et lui souhaite beaucoup de succès pour l'avenir.

M. Saxer tient à saluer ensuite les neuf anciens présidents de la Société présents à la séance et les remercie pour tout l'intérêt qu'ils n'ont cessé de témoigner à la Société. Il mentionne tout spécialement les trois membres fondateurs, MM. FEHR, FUETER et GROSSMANN et, sur sa proposition, la Société les nomme Membres d'honneur par acclamation. Elle décide d'adresser un télégramme de sympathie à M. le professeur Grossmann, ancien président, empêché d'assister à la réunion pour raison de santé.

Parlant ensuite du rôle que doit jouer la Société dans la vie scientifique suisse, M. Saxer estime qu'elle doit vouer toute son attention aux questions touchant au développement de la culture mathématique dans notre pays. Ainsi il serait désirable qu'elle s'occupe de la préparation des professeurs de mathématiques et qu'elle mit à l'étude

l'adoption de certaines normes identiques dans toutes les universités suisses en ce qui concerne les épreuves du doctorat ès sciences mathématiques.

Pour terminer il exprime le vœu que, pas plus que par le passé, des questions d'ordre politique n'interviennent dans notre Société. Seuls les principes indispensables dans toute recherche scientifique désintéressée: « Vérité, Clarté et Simplicité », doivent lui servir de guide.

\* \* \*

La parole est ensuite donnée à M. le Professeur A. SPEISER. Dans son intéressante allocution, l'orateur rappelle d'abord que nos connaissances actuelles sur l'histoire des mathématiques en Suisse ne remontent guère au delà de la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, au temps de Jacob et Jean BERNOULLI. C'est à eux et à leurs successeurs, Léonard EULER, Gabriel CRAMER, LAMBERT, Louis BERTRAND (de Genève), Simon L'HUILIER et d'autres que l'on doit la plus grande partie des bases des mathématiques modernes. Le XIX<sup>e</sup> siècle est marqué par quelques noms illustres tels que Jacob STEINER, Charles STURM, L. SCHLAEFLI, Gabriel OLTRAMARE, Charles CELLÉRIER, Arnold MEYER.

La fondation de la Société mathématique suisse, en 1910, correspond à une nouvelle période de prospérité pour les mathématiques dans notre pays, tandis qu'au contraire la situation économique n'a fait que s'aggraver avec les années. Il est réconfortant de constater que des périodes brillantes au point de vue intellectuel ne coïncident pas nécessairement avec le bien-être matériel. Malgré cela nous ressentons aujourd'hui très vivement combien le manque de ressources financières est préjudiciable au développement de nos fondations et de nos instituts scientifiques.

Par leur nature même les mathématiques ne peuvent pas établir un programme de recherches bien délimité en vue de solliciter de grands crédits. Elles ont devant elles l'obscurité complète et, pour employer une comparaison de Leibnitz, elles ont pour mission d'éclairer les chemins des autres sciences. Le mathématicien ressemble à cet homme qui avance dans l'obscurité en portant dans le dos la lumière permettant de guider les pas de ceux qui le suivent. Ses productions sont considérées comme des contributions libérales; ses résultats sont mis gratuitement à la disposition de chacun comme l'eau et l'air.

Nous ne préconisons pas que les recherches soient récompensées par de grands prix destinés à des savants qui auraient fait des découvertes utiles. Cela tendrait fatalement à détourner les travaux sur des voies secondaires. Par contre, les recherches pures devraient disposer de ressources beaucoup plus grandes et par cela même d'un plus grand nombre de collaborateurs. Aujourd'hui l'Etat dépense de grandes sommes pour des choses souvent très accessoires; il devrait aussi subventionner des choses plus importantes. J'ai proposé

autrefois l'introduction d'une *taxe en faveur des mathématiques* qui serait perçue sur les bénéfices des banques, des sociétés d'assurances et des grandes industries. Espérons qu'un projet de cette nature pourra être repris et réalisé.

\* \* \*

C'est M. le Professeur Gustave DUMAS (Lausanne) qui a bien voulu se charger de la tâche de retracer l'activité de la Société au cours de ses vingt-cinq premières années. Voici les principaux passages de son exposé.

En se constituant à Bâle, le dimanche 4 septembre 1910, la Société mathématique suisse a permis deux choses.

Nous avons été à même d'affirmer notre entière solidarité et notre ferme volonté de travailler pour les mathématiques et, par elles, au bien de la patrie. Nous avons eu la possibilité également d'inviter d'anciens maîtres ou d'anciens condisciples, entendus ou rencontrés à l'étranger, à venir nous faire bénéficier de leur vaste savoir et de leur grande expérience.

Que l'organisation de ces importantes conférences soient le fait de l'une ou de l'autre de nos Universités, ou de l'Ecole polytechnique, de nos Colloques ou de la Société mathématique suisse, cela ne fait rien à l'affaire. Aux savants dont nous recevons la visite, nous disons notre reconnaissance. En ces temps d'incohérence sociale, on se sent réconforté à l'idée que par eux et par la science qu'ils représentent, les liens entre les nations de la terre ne sont point totalement brisés et, qui sait, redeviendront, tôt ou tard, plus solides que jamais.

Depuis la fondation de la Société mathématique suisse et par ses soins, nous eûmes le plaisir d'être les auditeurs attentifs de MM. DE LA VALLÉE POUSSIN, HADAMARD, BLASCHKE, HECKE, FRÉCHET, ENRIQUÈS, MONTEL, E. CARTAN, entre autres, venus, comme aujourd'hui notre collègue M. CARATHÉODORY, tout exprès pour nous.

A cette suite, si honorable, il faudrait ajouter encore les noms de tous ceux que nous pouvions considérer comme des nôtres, ceux de MM. Hermann WEYL et MOHRMANN, par exemple, qui, quand ils nous parlèrent, occupaient une chaire en Suisse.

Entrer dans les détails est évidemment impossible.

D'un autre côté, il faut renoncer à donner, ne fût-ce qu'un simple aperçu de tous les sujets traités depuis vingt-cinq ans, plus spécialement par des Suisses, dans nos assemblées, sous forme de conférences magistrales ou de courtes communications. Il faudrait pour cela passer en revue le champ entier de la pensée mathématique.

Que celui qui désire être complètement informé consulte, dans son ensemble, la collection de *L'Enseignement mathématique*. Les pages de ce journal ont été toujours très largement ouvertes à notre Société par son créateur et directeur, notre très dévoué collègue, M. le pro-

fesseur FEHR, de Genève. On trouvera dans cette revue, année après année, des comptes rendus circonstanciés.

L'activité de la Société mathématique suisse, dès son origine, s'est traduite par une étroite collaboration avec la *Société suisse des professeurs de mathématiques*, société qui, ayant pris corps en 1891, nous a précédés dans la carrière et nous donne l'exemple d'un travail utile et assidu.

Nous avons eu avec cette société, comme aujourd'hui, plusieurs séances en commun, séances que nous aimerions voir se renouveler plus souvent. Ne sommes-nous pas d'ailleurs nombreux à lui appartenir ?

A noter aussi les liens qui nous unissent à la *Société des Actuaires suisses*, dont bien des membres font partie de nos rangs.

Ces collaborations sont utiles; le succès et le bon rendement du labeur mathématique dans notre pays en dépendent. Des échanges de vues, des comparaisons de programmes, des discussions plénières sont indispensables parfois. La Suisse est trop petite; il faut se garder de disséminer notre action.

Mentionnons aussi la *Société helvétique des Sciences naturelles*, qui, dans le sens profond et littéral du terme, est bien la véritable « *Alma Mater* » de toutes les sociétés scientifiques suisses.

Nous tenons beaucoup à participer, chaque été, à ses assemblées générales où la rencontre avec des collègues représentant les disciplines les plus variées est le meilleur des stimulants.

Et, pour terminer enfin cette partie de l'exposé, rappelons que la liste des membres de 1910, la première liste de nos membres, comporte cent-deux noms.

Que de disparus dans la cohorte de la première heure !

Qu'il soit permis, tout en s'inclinant avec respect devant le souvenir de chacun, de ne rappeler qu'un seul nom, celui de Carl Friedrich GEISER, notre ancien et vénéré honoraire. Geiser fut directeur de l'Ecole polytechnique fédérale et président du premier Congrès international des mathématiciens. Il fut, au début de notre Société, un de ses plus fidèles soutiens. En se joignant à nous, en assistant à nos premières séances et en y prenant la parole, il nous prouvait que, pour lui, dont l'expérience des hommes était grande, nos efforts avaient un sens et que l'œuvre commençante n'était point vaine à ses yeux.

Notre entreprise n'était point vaine ! Bien plus, elle venait à son heure et n'aurait pu tarder davantage.

La création des sociétés savantes date, en général, de la seconde moitié du dix-neuvième siècle, l'accumulation des connaissances à cette époque rendant impossible sinon très peu fécond le travail isolé et sans auxiliaire. Les collectivités, maintenant, un peu partout, l'emportent; sans elles, aucun résultat définitif et sérieux ne saurait être atteint. D'un souffle, la Révolution française balaya les corpora-

tions. Elles n'en renaissent pas moins aujourd'hui, transformées il est vrai, mais plus vivantes et plus vivaces que jamais.

Par cela seul, une longue vie est assurée à notre Société. Qu'elle ait, au cours de son histoire future, à subir les effets du temps, cela va de soi. Mais, s'il fallait qu'un jour, sous un régime exceptionnel, par exemple, on la vît se dissoudre, le lendemain, elle ressusciterait.

La Mathématique est éternelle. Vieille comme le monde, on la cultivait en Chaldée et le souvenir des arpenteurs du Nil est dans toutes les mémoires. La pensée grecque est une imprégnation du nombre et quoique quantité et qualité deviennent de plus en plus indiscernables, Descartes ne pouvait faire mieux que de proclamer leur indépendance réciproque, postulat indispensable à notre entendement.

Au dire du poète: « Souvenir, rêve, sentiment, le Temps, l'Etendue et le Nombre », tout sombrera quand sombrera l'Esprit.

Et, sans oublier que les constructions scientifiques n'ont de valeur que lorsqu'elles s'appuient sur des faits, on peut se dire néanmoins que quand l'humanité verra ses derniers jours approcher, les derniers hommes sur les ruines de leurs dernières cabanes auront encore le chiffre à la base de leurs dernières méditations.

La connaissance n'a pas de plus bel ornement, ni outil de plus merveilleux service que les mathématiques.

Nous avons vu plus haut quelle a été, dans les grandes lignes, la vie de la Société mathématique suisse. Voyons maintenant ce que cette Société a fait, pour acquérir droit de cité permanent et perpétuer sa raison d'être.

Auparavant, disons encore que sur le plan international et en laissant à l'Université de Zurich et à l'Ecole polytechnique fédérale l'insigne honneur d'avoir organisé, dans le détail, le Congrès international de Zurich en 1932, elle n'y a pas moins participé de la façon la plus sensible.

M. FUETER le présida. Zurich avait été, à Bologne, désignée à l'unanimité comme siège du futur congrès. Souhaitons que la Société mathématique suisse sache conserver l'ascendant dont cet honneur fut le signe.

Pour qu'une société vive, il est utile qu'un organe officiel la représente. C'est pour cela qu'il y a sept ans, la Société mathématique suisse fondait ses *Commentarii mathematici helvetici*, périodique qui, dès son apparition, prit rang dans la presse mathématique. Ce fut une bonne fortune, car à l'époque si dure d'aujourd'hui, il est heureux que par le journal, on puisse encore projeter sa pensée et recueillir celle que propagent loin de nous les Sociétés similaires de la nôtre, poursuivant le même idéal.

Le premier numéro parut le premier novembre 1928. L'avant-propos de celui-ci rappelle que la création de la revue répondait à un vœu depuis longtemps formulé. L'aide financière de la Confédération

permet de le réaliser. Que nos autorités fédérales daignent agréer, maintenant comme alors, l'expression de notre très vive reconnaissance.

Les *Commentarii* sont édités par la maison *Orell-Füssli*, de Zurich, qui, par le travail intelligent et soigné dont elle se fait un devoir, donne une forme concrète à une très grosse part de la production mathématique suisse.

Mais une publication comme celle des *Commentarii* exige une organisation matérielle solide. En juin 1929, une fondation: «*Fondation pour l'Avancement des Sciences mathématiques en Suisse*», fondation dont l'idée première revient à M. FEHR, était constituée par la Société mathématique suisse.

Cet organisme, dont le but essentiel est de donner un appui financier aux *Commentarii*, prévoit, pour le jour où ses disponibilités le permettront, des contributions en faveur de la publication, en Suisse, d'ouvrages mathématiques de caractère scientifique; de l'aide, sous forme de bourses d'études et des distinctions à accorder à des mathématiciens suisses de grand mérite.

La fondation, de suite, fut bien accueillie du public: des représentants éminents des milieux financiers, industriels et commerciaux suisses consentirent à faire partie de son Conseil. La dureté des temps se fait sentir, malheureusement, et la constitution du capital n'avance que lentement. De généreux dons ont surgi cependant. Le Congrès de Zurich ayant laissé un solde disponible, cette somme, sur l'initiative de M. Fueter, fut ajoutée au fonds de réserve qui, actuellement, s'élève, en chiffres ronds, à 40.000 francs.

Espérons que, dans l'avenir, quelques mécènes n'oublieront pas le noble but que nous poursuivons.

Il y aurait lieu encore de parler du *Comité Steiner*, créé en vue de la publication des œuvres restées inédites du grand mathématicien suisse. En 1930, ce Comité disposait de la jolie somme de 5.000 francs, que l'Université de Zurich avait garantis pour assurer l'exécution du projet.

La publication des *Œuvres d'Euler* est du ressort de la Société helvétique des Sciences naturelles et ne concerne pas directement la Société mathématique suisse.

Cependant, ce sont encore nos vaillants protagonistes de tous les instants, MM. FUETER, naturellement, et SPEISER, dont le nom aurait eu sa place marquée en bien des points de ce rapport, qui, sur leurs robustes épaules, supportent le faix si lourd de cette tâche si difficile. Dans la suite et dès maintenant déjà, il ne serait point inutile que la Société mathématique contribuât de toutes ses forces, et par tous les moyens, à l'érection finale de l'impérissable monument.

La Société mathématique suisse est en pleine croissance. Elle compte aujourd'hui plus de deux cents membres. Elle s'est donc admirablement développée dès sa constitution et pourra dans l'avenir,

si elle tient ses promesses, prêter directement ou indirectement un concours très efficace à l'ensemble de l'œuvre mathématique du pays.

Les aptitudes individuelles, ordonnées dans un cadre solide, se trouvant décuplées, une association, quelle qu'elle soit, acquiert, par le fait même, une vraie tradition, tradition qui, peu à peu, la mue en une réelle personnalité. Dans cet état, l'association devient force régulatrice de tout ce qui, de près ou de loin, lui tient à cœur.

Les survivants de la liste de 1910 ne sont, en ce jour et pour la plupart que des vétérans, pleins d'ardeur et de zèle sans doute et dont plusieurs ont encore devant eux une verte vieillesse. Tôt ou tard, toutefois, ces vétérans devront transmettre le flambeau. Puissent alors les jeunes qui le recueilleront, le tenir ferme et haut, très haut !

La recherche désintéressée soutenue par une volonté inlassable et qu'aucun impérialisme ne subjugué, vient à bout de tous les obstacles.

Rien n'empêche donc d'espérer que, soutenus par notre Société, des penseurs et des travailleurs capables et dévoués sauront prolonger le sillage de nos illustres devanciers, de nos géants, les Euler, les Bernoulli, les Cramer, les Sturm, les Steiner, les Schläfli.

## II. — Réunion d'Einsiedeln, 18 et 19 août 1935.

La Société mathématique suisse a tenu sa vingt-cinquième assemblée annuelle à Einsiedeln, les 18 et 19 août 1935, sous la présidence de M. le Professeur W. SAXER (Zurich), en même temps que la 116<sup>me</sup> session annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative*, la Société a composé comme suit son comité pour 1936 et 1937: MM. les Professeurs R. WAVRE (Genève), président; W. SCHERRER (Berne), vice-président et P. BUCHNER (Bâle), secrétaire-trésorier. La prochaine assemblée annuelle aura lieu à Soleure.

Deux séances ont été spécialement consacrées aux *communications scientifiques*, au nombre de dix.

1. — Lucien C. BOSSARD (Lucerne). — *Sur une généralisation du théorème de Schottky et ses applications.* — Soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans le cercle  $|z - z'| < \rho$  dans lequel elle n'admet pas plus de 1 fois la valeur  $a$ , ni plus de  $q$  fois la valeur  $b$ , les nombres  $a$  et  $b$  vérifiant les inégalités  $|a| \leq h$ ,  $|b| \leq h$ ,  $|a - b| \geq d > 0$ ; soient de plus les valeurs de  $f(z)$  données, ou bornées en module, au point  $z'$  et en un point  $z_1$  du cercle  $|z - z'| < \rho$ ,  $0 < |z_1 - z'| = r_1 < \rho$ . Sous ces hypothèses on peut établir pour le module de  $f(z)$  à l'aide d'une transformation utilisée par M. Lindelöf, de l'homographie transformant l'intérieur d'un cercle

en lui-même et d'une construction de chaîne de cercles appropriée<sup>1</sup>,  $\mu$  désignant le plus grand des deux nombres :  $e^{q+1}$ ,  $\frac{\rho}{d \cdot r_1} \cdot (2|f(z')| + |f(z_1)| + 3h)$ , la limite supérieure « numérique » et « uniforme par rapport aux nombres  $a$  et  $b$  » suivante :

$$|f(z)| < d \cdot \mu^{\frac{\gamma \rho^2}{(\rho - r_1) \cdot \theta}}$$

dans le cercle  $|z - z'| \leq \rho - \theta < \rho$ ,  $\gamma = 5.207$ .

En étendant ce résultat à une couronne on obtient la « transposition » : soit  $f(z)$  une fonction holomorphe dans la couronne

$$r \left( 1 - \frac{700}{\log \log M(r)} \right) \leq |z| \leq r \left( 1 + \frac{700}{\log \log M(r)} \right), \quad r > 0,$$

et soit

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = M(r) > e^{e^{700}};$$

si en deux points du cercle  $|z| = r$ , dont la distance est désignée par  $s$ ,  $s$  vérifiant les relations

$$r \cdot e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\log M(r)}} \leq s \leq \frac{700 \cdot r}{\log \log M(r)},$$

les valeurs de  $f(z)$  sont inférieures en module à  $e^{\frac{1}{4}\sqrt{\log M(r)}}$ , il existera dans la couronne considérée un cercle de rayon  $\frac{700 \cdot r}{\log \log M(r)}$ , dans lequel  $f(z)$  prendra toutes les valeurs intérieures au cercle  $|w| \leq e^{\frac{1}{4}\sqrt{\log M(r)}}$  ou bien au moins 2 fois, ou bien  $\frac{3}{4}\sqrt{\log M(r)}$  fois au moins, sauf peut-être, dans ce dernier cas, certaines valeurs contenues à l'intérieur d'un cercle de rayon  $e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\log M(r)}}$ .

Ces propositions, ainsi que d'autres semblables, permettent de poursuivre, dans l'ordre d'idées de M. Ostrowski<sup>2</sup>, l'étude sur la répartition des valeurs d'une famille de fonctions  $f(\sigma_v z)$  au voisinage d'un point de Julia de 3<sup>me</sup> genre (3. Art) de la fonction  $f(z)$  pour une suite  $(\sigma_v)$ . Quand un point de Julia de 3<sup>me</sup> genre de  $f(z)$  pour une suite  $(\sigma_v)$   $\xi$  possède la propriété suivante: pour tout

<sup>1</sup> Voir dans cet ordre d'idées: W. SAXER, Ueber eine Verallgemeinerung des Satzes von Schottky, *Compositio Mathematica*, 1934, vol. 1, 207-216.

<sup>2</sup> A. OSTROWSKI, Studien über den Schottkyschen Satz, *Rektoratsprogramm der Universität Basel*, 1931, 1-111 (41-62).

nombre positif  $\varepsilon$ , si petit soit-il, et pour un nombre positif  $c$ , chacune des fonctions  $f(\sigma_v z)$  — peut-être à l'exception d'un nombre fini d'entre elles — admet dans le cercle  $|z - \xi| < \varepsilon$  une fois au plus une valeur intérieure au cercle  $|\omega| \leq c$ ; alors on appellera le point  $\xi$  un point de Julia de 6<sup>me</sup> genre de  $f(z)$  pour la suite  $(\sigma_v)$ . Si à une suite  $(\sigma_v)$  correspond un point de Julia de 6<sup>me</sup> genre au moins, on appellera la suite  $(\sigma_v)$  une suite de Julia de 6<sup>me</sup> genre pour  $f(z)$ . A partir de ces définitions on démontre les théorèmes suivants:

Soit  $(\sigma_v)$  une suite de Julia de 3<sup>me</sup> genre pour  $f(z)$  avec le point de Julia  $\xi$ ; si à tout nombre positif  $\varepsilon$ , si petit soit-il, et à tout nombre entier  $k > 2$  arbitrairement grand, on peut faire correspondre un indice  $\nu' = \nu'(\varepsilon, k)$  tel que dans le cercle  $|z - \xi| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  chacune des fonctions  $f(\sigma_\nu z)$  admette pour  $\nu \geq \nu'(\varepsilon, k)$  2 fois une valeur  $\omega_\nu$  intérieure au cercle  $|\omega| \leq k$ , ou bien la suite  $(\sigma_\nu)$  contiendra une suite de Julia de 4<sup>me</sup> genre avec le point de Julia  $\xi$ , ou bien chacune des fonctions  $f(\sigma_\nu z)$  admettra dans le cercle  $|z - \xi| < \varepsilon$ , à partir d'un certain indice  $\nu^* = \nu^*(\varepsilon, k)$ , 2 fois au moins toutes les valeurs intérieures au cercle  $|\omega| \leq k$ .

Etant donnée une suite de Julia de 3<sup>me</sup> genre pour  $f(z)$  avec le point de Julia  $\xi$ , contenant une suite de Julia de 6<sup>me</sup> genre avec le point de Julia  $\xi$ , et ne contenant aucune suite de Julia de 4<sup>me</sup> genre avec le point de Julia  $\xi$ , à tout nombre positif  $\varepsilon$ , si petit soit-il, et à tout nombre entier  $k > 2$  arbitrairement grand, on pourra faire correspondre un indice  $\nu' = \nu'(\varepsilon, k)$  tel que dans le cercle  $|z - \xi| < \varepsilon$  chacune des fonctions  $f(\sigma_\nu z)$  admette pour  $\nu \geq \nu'(\varepsilon, k)$  1 fois toutes les valeurs intérieures au cercle  $|\omega| \leq k$ .

Ces théorèmes résultent de théorèmes correspondants plus généraux, relatifs à des suites exceptionnelles, dont le lien avec la théorie des familles quasi-normales de fonctions holomorphes se trouve précisé par la proposition suivante: soit  $f_n(z)$  une suite de fonctions holomorphes dans le cercle  $|z - \xi| < r$ ; si à tout nombre fini  $a$ , on peut faire correspondre un nombre  $\varepsilon_a$  et un indice  $N = N(a, \varepsilon)$  tel que pour tout nombre positif  $\varepsilon < \varepsilon_a$  et pour  $n \geq N(a, \varepsilon)$  les fonctions  $f_n(z)$  admettent à l'intérieur du cercle  $|z - \xi| < \varepsilon$  une fois la valeur  $a$ , le point  $\xi$  sera un point irrégulier d'ordre 1.

2. — R. DE SAUSSURE (Berne). — *Application de la Géométrie des flèches aux cartes météorologiques.*

3. — S. BAYS (Fribourg). — *Sur le nombre des systèmes cycliques de triples différents pour chaque classe  $\omega$ <sup>1</sup>.* — Si le

<sup>1</sup> Voir les *Commentarii mathem. Helvetici*, S. BAYS: vol. 2, fasc. IV; vol. 3, fasc. I, II et IV et principalement S. BAYS et G. BELHÔTE, vol. 6, fasc. I, p. 28 à 46.

groupe  $\{ |x, 1+x|, |x, \alpha^n x| \}$  est le diviseur métacyclique d'ordre le plus élevé qui laisse un système cyclique de triples S invariant, nous disons que S est de la classe  $\omega$ .

Soit  $N = 6n + 1$  premier,  $\frac{3n}{d} = 2^a \cdot n_1$ ,  $d$  diviseur de  $3n$ ,  $n_1$  impair. Les classes possibles pour un système de triples S déterminé par un système de caractéristiques  $\Sigma$  appartenant à  $d$ , sont données par  $\omega = 2\mu d = 2^{a+1}\mu'd$ , les  $\mu'$  étant les diviseurs de  $n_1$ . Il y a une exception pour  $d = 1$ , où l'ensemble des  $\mu'$ , qui serait dans ce cas celui des diviseurs de  $n_1 = \frac{3n}{2^a}$ , est à remplacer par celui plus restreint des diviseurs de  $n_1' = \frac{n}{2^a}$ .

Le nombre des systèmes de triples déterminé par le système des caractéristiques principales (appartenant à  $d = 1$ ) dans la classe  $2\mu$  est ainsi le même que le nombre des systèmes de triples déterminé par un système de caractéristiques appartenant à  $d = 3$  dans la classe  $6\mu$  et ce nombre est :

$$x = \frac{1}{\mu'} \sum_{\mu''/\mu'} \lambda(\mu'') 2^{2^a \frac{\mu'}{\mu''} - a - 1} \tag{1}$$

où  $\mu''$  parcourt les diviseurs de  $\mu'$  et  $\lambda(\mu'')$  est la fonction de Möbius:  $\lambda(1) = 1$ ,  $\lambda(\mu'') = (-1)^r$  si  $\mu''$  est le produit de  $r$  facteurs premiers différents,  $\lambda(\mu'') = 0$  si  $\mu''$  contient au moins un facteur premier au carré.

Ce nombre est de par sa nature  $\geq 0$ . Pour  $\mu' = 1$  et  $\mu' = n_1 = \frac{n}{2^a}$ , il est positif. Il restait à prouver qu'il est positif pour tous les  $\mu'$ .

L'expression  $\sum_{\mu''/\mu'} \lambda(\mu'') 2^{\frac{\mu}{\mu''}}$ , développée, peut s'écrire,  $p_1, p_2, \dots, p_r$  étant les facteurs premiers différents de  $\mu' = \frac{\mu}{2^a}$  rangés par ordre de grandeur :

$$\frac{\mu}{2^{p_1 p_2 \dots p_r}} \left\{ 2^{p_1 p_2 \dots p_r} - 2^{p_2 p_3 \dots p_r} - 2^{p_1 p_3 \dots p_r} - \dots - \right. \\ \left. - 2^{p_1 p_2 \dots p_{r-1}} + 2^{p_3 p_4 \dots p_r} + \dots + (-1)^r \right\} .$$

Sous cette forme, en donnant le signe  $-$  à tous les termes de la parenthèse excepté le premier et en se servant des inégalités  $r < p_r$ ,  $p_1 \geq 3$ , on arrive aisément à établir que l'expression est positive.

La démonstration vaut maintenant sans autre pour les autres

valeurs de  $d$ , sauf une exception dans le cas où  $d$  est diviseur de  $n$ ,  $< n$  et  $> 3$ . En effet, l'exception nommée mise à part, le nombre  $x(\mu')$  des systèmes de triples différents de la classe  $\omega$  pour les autres valeurs de  $d$ , est, s'il n'est pas directement positif, donné par des expressions qui ne diffèrent de (1) que par l'adjonction d'un facteur constant au premier terme de l'exposant de 2. Ainsi il est établi, sauf pour le cas de l'exception susdite, *qu'il y a des systèmes de triples dans toutes les classes possibles.*

4. — S. BAYS (Fribourg). — *Sur les systèmes de caractéristiques appartenant à  $d = 3$ .* — La théorie des caractéristiques est basée essentiellement sur le fait suivant<sup>1</sup>:  $\alpha$  étant une racine primitive de  $N$ ,  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^{3n-1}$ , (1), représentent les entiers  $1, 2, \dots, 3n$  (2), dans un certain ordre;  $\alpha^{3n}, \alpha^{3n+1}, \dots$  les reproduisent périodiquement dans le même ordre. Nous appelons les exposants dans (1) les indices *absolus* des entiers correspondants dans (2). Les caractéristiques, qui sont des triples de la forme  $\alpha^a \alpha^b \alpha^c$ , se répartissent en colonnes de caractéristiques, cycliques par les exposants. Les colonnes de ces exposants, réduites mod 3, donnent les trois types possibles:

Type I:	0 0 0				
	1 1 1	où les trois restes sont égaux,			
	2 2 2				
Type II:	0 1 2				
	1 2 0	où les trois restes sont différents,			
	2 0 1				
Type III:	0 1 1	ou	0 2 2		
	1 2 2		1 0 0	où deux restes sont égaux.	
	2 0 0		2 1 1		

Cherchant une indication sur le nombre des systèmes de caractéristiques appartenant à  $d = 3$ , systèmes qui sont fournis directement par les colonnes du type II, nous avons été conduit à l'énoncé suivant, par sa nature même très plausible:

Soit les entiers  $1, 2, \dots, 3n$  dans l'ordre naturel. Soit la suite correspondante de leurs indices absolus  $0, a, \dots, i$ . Nous réduisons ces indices mod 3. Dans la suite réduite, ainsi obtenue, chacune des 9 séquences possibles, 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22 doit tendre à se présenter le même nombre de fois, c'est-à-dire  $\frac{3n-1}{9}$  fois,  $n$  augmentant indéfiniment. Il en résulte que les types I, II et III des

<sup>1</sup> Nous entendons par  $\underline{a}$  la valeur absolue du plus petit reste positif ou négatif de l'entier  $a$  (mod.  $N$ ).

colonnes réduites ci-dessus doivent tendre à se présenter respectivement  $\frac{3n - 1}{27}$ ,  $\frac{2(3n - 1)}{27}$ ,  $\frac{6(3n - 1)}{27}$  fois, N augmentant indéfiniment.

La concordance avec les nombres exacts, pour les trois types de colonnes, pour les premières valeurs de N est remarquable. Nous donnons ci-dessous les résultats pour le type II, c'est-à-dire pour le nombre des systèmes de caractéristiques appartenant à  $d = 3$ , pour les N inférieurs à 200 et  $N = 997$ . Le nombre approximatif est l'entier le plus proche de la fraction  $\frac{2(3n - 1)}{27}$  :

Pour N =	13,	19,	31,	37,	43,	61,	67,	73,	79,	97,	103,
Nombre exact:	—,	1,	1,	1,	1,	2,	2,	3,	2,	4,	4,
Nombre approché:	—,	1,	1,	1,	1,	2,	2,	3,	3,	3,	4,
	109,	127,	139,	151,	157,	163,	181,	193,	199,	997.	
	4,	4,	4,	6,	5,	7,	7,	6,	7,	37.	
	4,	5,	5,	5,	6,	6,	7,	7,	7,	37.	

5. — E. STIEFEL (Zurich). — *Un problème algébrique et sa solution topologique.* — Soient  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(p)}$  des matrices réelles, quadratiques et de rang  $n$ , et soient  $x_1, x_2, \dots, x_p$  des variables réelles indépendantes. Supposons que la matrice  $A = x_1 A^{(1)} + \dots + x_p A^{(p)}$  obtenue par une combinaison linéaire, est non singulière pour tout système de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_p$  à l'exception du système  $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ ; on dit alors que  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(p)}$  sont des matrices linéairement indépendantes. Nous nous proposons de déterminer le nombre maximum  $p'(n)$ , pour  $n$  donné, de matrices linéairement indépendantes.

HURWITZ (*Werke*, vol. II, pp. 565 et 641) et RADON (*Hamb. Abh.*, vol. I, pp. 1-14) ont déterminé, par voie algébrique, le nombre maximum  $p(n)$  de matrices  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(p)}$ , pour lesquelles A est non seulement non singulier, mais même orthogonal; ils ont obtenu le résultat suivant

$$p(n) = \frac{n}{u} \quad \text{pour} \quad n \not\equiv 0 \pmod{16}, \quad (1)$$

$$p(n) = p\left(\frac{n}{16}\right) + 8 \quad \text{pour} \quad n \equiv 0 \pmod{16}, \quad (2)$$

où  $u$  est le plus grand nombre impair contenu dans  $n$ .

La relation annoncée dans le titre avec la topologie s'aperçoit dès qu'on considère, outre les nombres  $p(n)$  et  $p'(n)$ , le nombre maximum  $[p''(n) - 1]$  des champs vectoriels continus, linéairement indépendants qu'on peut construire dans un espace projectif réel à  $(n - 1)$  dimensions.

Entre ces trois quantités existe évidemment la relation

$$p(n) \leq p'(n) \leq p''(n) \leq n. \quad (3)$$

J'ai établi, par voie topologique, que

$$p''(n) = \frac{n}{u} \quad \text{pour} \quad n \not\equiv 0 \pmod{16}. \quad (4)$$

Donc, d'après (1) et (3)

$$p'(n) = \frac{n}{u} \quad \text{pour} \quad n \not\equiv 0 \pmod{16}. \quad (5)$$

Le cas où  $n$  est divisible par 16 n'a pas encore pu être résolu par une méthode topologique.

Les nombres  $n_i$ ,  $n'_i$ ,  $n''_i$ , pour lesquels

$$p(n_i) = n_i, \quad \text{resp.} \quad p'(n'_i) = n'_i, \quad p''(n''_i) = n''_i,$$

présentent un intérêt particulier. On montre notamment que les  $n'_i$  sont les ordres des systèmes hypercomplexes, sans diviseur nul (mais pas nécessairement associatifs) du corps des nombres réels; les  $n_i$  sont les ordres de ceux de ces systèmes pour lesquels le théorème de multiplication des normes est vérifié. Les nombres  $(n''_i - 1)$  sont les dimensions des espaces projectifs, dans lesquels on peut définir un parallélisme topologique. (*L'Enseignement math.*, t. 33, p. 96-98, 1934.)

De (1) et (2) découle un résultat connu de HURWITZ:  $n_i = 1, 2, 4, 8$ , tandis qu'on déduit de (5) et (4) le résultat encore incomplet:

$$n'_i = 1, 2, 4, 8, 16m'_j; \quad n''_i = 1, 2, 4, 8, 16m''_j,$$

où  $m'_j$  et  $m''_j$  sont des suites de nombres entiers qui restent à déterminer.

6. — O. SPIESS (Bâle). — *La correspondance des mathématiciens Bernoulli.* — La gloire de Léonard Euler a quelque peu éclipsé celle des grands mathématiciens bâlois qui l'ont précédé. Mais pour l'historien, les deux frères Jacques et Jean Bernoulli jouent, aux alentours de 1700, un rôle aussi important qu'Euler 50 ans plus tard. Ils furent pendant longtemps les seuls mathématiciens qui eussent parfaitement compris le Calcul infinitésimal nouvellement créé par Leibniz; et c'est en rapport constant avec l'inventeur qu'ils développèrent, en opposition fréquente avec l'école anglaise de Newton, les méthodes fondamentales de l'Analyse supérieure. Jean Bernoulli a, de plus,

le mérite d'avoir répandu la nouvelle science parmi les mathématiciens les plus éminents de son temps; les centaines de lettres qu'il échangea avec eux sur ce sujet constituent une source de premier ordre pour l'histoire de la science et une documentation précieuse sur les mathématiciens eux-mêmes. Par suite des circonstances, cette source est demeurée presque entièrement inutilisée jusqu'à nos jours; seule la correspondance avec Leibniz a paru (1745) du vivant de Jean Bernoulli; un siècle plus tard, on publia les lettres échangées entre les Bernoulli et le cercle pétersbourgeois (Euler, Fuss, Goldbach); mais la plus grande partie, environ 2000 lettres, demeura dans l'oubli jusqu'à ce que l'astronome et biographe suisse Rud. Wolf percât le mystère après plusieurs dizaines d'années d'effort. Il découvrit que toute la correspondance scientifique de Jean Bernoulli, ainsi que celle également importante des autres Bernoulli, fut vendue peu avant 1800 par un petit-fils de Jean, partie à l'Académie de Stockholm, partie au prince de Gotha. Il n'en fut fait usage ni d'un côté ni de l'autre; même depuis leur découverte, leur seule existence n'est connue que d'un cercle restreint d'initiés. Il y va de l'honneur de la Suisse, et spécialement de la ville de Bâle, d'arracher enfin ce trésor scientifique à l'oubli, et de le rendre accessible au public. Ceci est heureusement devenu possible depuis peu, grâce à la générosité d'un mécène bâlois, M. le Dr Rudolf GEIGY, qui a mis à la disposition de la Société bâloise des Sciences naturelles un capital de 30.000 fr. en vue de la création d'un *Fonds Bernoulli*. Dans sa séance du 19 juin 1935, la Société a pris acte de cette fondation, et elle a chargé le rapporteur de publier, sous une forme convenable, le précieux héritage scientifique des mathématiciens Bernoulli. Une base financière étant de la sorte assurée à l'entreprise, on est en droit d'en attendre la réalisation prochaine. Quelques démarches préliminaires ont déjà été faites en vue d'obtenir des collaborateurs et un éditeur se chargeant de la publication. La Société mathématique suisse sera tenue au courant des progrès des travaux.

7. — E. TROST (Zurich). — *Zur Strukturtheorie der einfachen Algebren*. — M. Hasse a élucidé complètement la structure d'une algèbre simple ayant pour centre un corps fini de nombres algébriques, en ramenant le problème au problème correspondant pour le cas d'une algèbre dont le centre est un corps de nombres  $p$ -adiques. Suivant un procédé de M. Speiser l'auteur aborde ici un exposé nouveau de la théorie, en y remplaçant autant que possible les corps infinis de nombres  $p$ -adiques par les systèmes finis de restes par rapport aux modules formés par un idéal premier et ses puissances. (Voir aussi les *Actes de la Société helvétique des Sciences naturelles*, 1935.)

8. — A. WEINSTEIN (Cambridge). — *Eigenwertproblem bei partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung*. — Il est bien connu que la

méthode de W. RITZ permet de calculer des *limites supérieures* des valeurs caractéristiques des équations différentielles, mais qu'elle ne donne aucun renseignement sur les *limites inférieures* de ces quantités.

Nous nous proposons d'indiquer dans la présente communication des *limites supérieures et inférieures* pour la plus petite valeur caractéristique  $\lambda$  des problèmes suivants:

I. *Problème du flambage d'une plaque carrée encastrée.*

II. *Problème des vibrations d'une plaque carrée encastrée.*

Ces problèmes se ramènent à l'intégration des équations

$$\Delta\Delta\varpi + \lambda\Delta\varpi = 0 \quad (\text{problème I}) \quad (1)$$

$$\Delta\Delta\varpi - \lambda\varpi = 0 \quad (\text{problème II}) \quad (2)$$

avec les conditions

$$\varpi = 0, \quad \frac{d\varpi}{dn} = 0 \quad (3)$$

sur la frontière du carré  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ .

Pour calculer des limites inférieures de  $\lambda$  on substitue aux problèmes énoncés des problèmes modifiés pour lesquels la plus petite valeur caractéristique est inférieure à la valeur cherchée. On obtient comme résultat pour I les inégalités

$$5.303 \leq \lambda \leq 5.312 \quad (4)$$

Nous nous proposons de montrer prochainement que l'on déduit de la solution de I immédiatement les inégalités suivantes pour la plus petite valeur caractéristique du problème II:

$$10.60 < \lambda < 13.37 \quad (5)$$

Des inégalités plus précises s'obtiennent en appliquant au problème II les méthodes de résolution du problème I (voir pour les détails S. ΤΟΜΟΤΙΚΑ, *Reports of the Aeronautical Research Institute, Tôkyô Imperial University*, No. 129, 1935). On obtient alors dans II les inégalités

$$13.294 < \lambda < 13.370 \quad (6)$$

l'erreur étant du même ordre de grandeur que dans (4).

9. — F. K. SCHMIDT (Iéna). — *Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen.*

10. — A. PFLUGER (Zug). — *Sur la croissance de fonctions entières.* —

Soit  $\mathcal{G}(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$  une fonction appartenant à la classe spéciale de fonctions entières d'ordre un de type maximum, pour lesquelles on a

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r \log r} = 1, \quad \text{Max } |\mathcal{G}(r e^{i\varphi})| = M(r).$$

Supposons que la fonction  $\frac{1}{z \Gamma(z)}$  appartenant à cette classe ait le développement en série de puissance  $\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{\lambda_n}$ . Au moyen des coefficients  $\lambda_n$  du développement, on adjoint à la fonction entière  $\mathcal{G}(z)$  la fonction  $g(z) = \sum_0^{\infty} a_n \lambda_n z^{-n-1}$ , régulière à l'infini. Entre la fonction d'appui  $k(\varphi)$  du domaine convexe le plus petit, à l'extérieur duquel  $g(z)$  est partout régulière et l'indicateur de croissance

$$h(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{G}(r e^{i\varphi})|}{r \log r}$$

on a la relation suivante

$$k(\varphi) = h(-\varphi).$$

## CHRONIQUE

### Première Conférence internationale de Topologie.

*Moscou, 4-10 septembre 1935.*

Au cours des vacances universitaires de 1935, la Topologie a fait l'objet de deux réunions internationales qui ont permis aux spécialistes les plus éminents d'exposer et de discuter les résultats de leurs recherches. Toutes deux ont obtenu un plein succès. La première s'est tenue à Moscou, du 4 au 10 septembre, sur l'initiative de l'Institut de Mathématiques de l'Université. La seconde a eu lieu à Genève, du 21 au 25 octobre, dans la série des Conférences internationales des sciences mathématiques organisée par l'Université de Genève et dont nous avons reproduit le programme dans un précédent fascicule (*L'Enseignement mathématique*, XXXIV<sup>e</sup> année, pages 119-120).