3. — Existence de la variété universelle DE RECOUVREMENT.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

représentation continue G de $\overline{\mathfrak{M}}$ sur $\mathfrak{M}$ ayant les propriétés suivantes:

R1: *Tout point* P *de* $\mathfrak{M}$ *est l'image d'un point de* $\overline{\mathfrak{M}}$ *au moins.*

R2: *Il existe des voisinages* $\mathfrak{V}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{V}(\overline{P}_2)$, ... *des points* $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... *situés au-dessus d'un point* P, *qui sont représentés t o p o l o g i q u e m e n t sur un même voisinage* $\mathfrak{V}(P)$ *de* P.

R3: *Soit* Q *un point de* $\mathfrak{V}(P)$ *et* $\overline{Q}$ *un point situé au-dessus de* Q; $\overline{Q}$ *appartient alors à l'un des voisinages* $\mathfrak{V}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{V}(\overline{P}_2)$, ...

R1 signifie que $\overline{\mathfrak{M}}$ recouvre $\mathfrak{M}$ complètement, R2 que la relation entre $\mathfrak{M}$ et $\overline{\mathfrak{M}}$ est localement topologique, R3 que $\overline{\mathfrak{M}}$ n'a pas de frontière; c'est-à-dire que, étant donné dans la variété fondamentale une courbe partant d'un point O, on peut la calquer sur $\overline{\mathfrak{M}}$ de telle sorte qu'elle parte d'un quelconque des points situés au-dessus de O, sans jamais toucher une frontière, ce qui aurait lieu par exemple au point P_1, considéré tout à l'heure.

3. — Existence de la variété universelle de recouvrement.

La question suivante se pose: Etant donnée une variété $\mathfrak{M}$, combien possède-t-elle de variétés de recouvrement différentes ? Il est possible de répondre complètement à cette question, lorsqu'on connaît le groupe fondamental de $\mathfrak{M}$ dans toute sa structure. La réponse est donnée par le théorème suivant: «Les variétés de recouvrement correspondent biunivoquement aux sous-groupes du groupe fondamental, ou plutôt aux classes de sous-groupes conjugués.» *En ce cas deux variétés de recouvrement de* $\mathfrak{M}$ *ne seront pas différentes, si elles admettent une représentation topologique l'une sur l'autre, telle que les images des points situés au-dessus d'un même point soient elles-mêmes situées au-dessus de ce point.*

Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration complète du théorème [1], mais nous nous bornerons à un cas spécial, particu-

[1] Voir H. Seifert et W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig, 1934), chap. VIII. On y trouve aussi les détails supprimés dans la démonstration du texte.

lièrement important: *le théorème d'existence et d'unicité de la variété universelle de recouvrement*, c'est-à-dire:

Toute variété $\mathfrak{M}$ *possède une variété de recouvrement simplement connexe et une seule, qu'on appelle le recouvrement universel* $\hat{\mathfrak{M}}$. Rappelons que simplement connexe signifie qu'il est possible de resserrer sur un point tout chemin fermé; il est permis que le chemin se recoupe au cours de la déformation.

Admettons tout d'abord que nous ayons déjà construit une variété de recouvrement simplement connexe $\hat{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$. Nous choisissons sur $\mathfrak{M}$ un point fixe O et sur $\hat{\mathfrak{M}}$ un point $\overline{\mathrm{O}}$ au-dessus de O. Menons un chemin quelconque w allant de O à P; nous pourrons le calquer sur $\hat{\mathfrak{M}}$ et il conduira là du point $\overline{\mathrm{O}}$ à un point bien déterminé $\overline{\mathrm{P}}$. Tout chemin w partant de O détermine de cette manière univoquement un point P de $\hat{\mathfrak{M}}$. Quand deux chemins w_1 et w_2 détermineront-ils le même point $\overline{\mathrm{P}}$? Ce sera certainement le cas lorsqu'il sera possible de déformer w_1 en w_2 en maintenant O et P fixes. Car, puisqu'il est possible de calquer la déformation sur $\hat{\mathfrak{M}}$, w_1 et w_2 devront conduire tous deux au point $\overline{\mathrm{P}}$ (fig. 4).

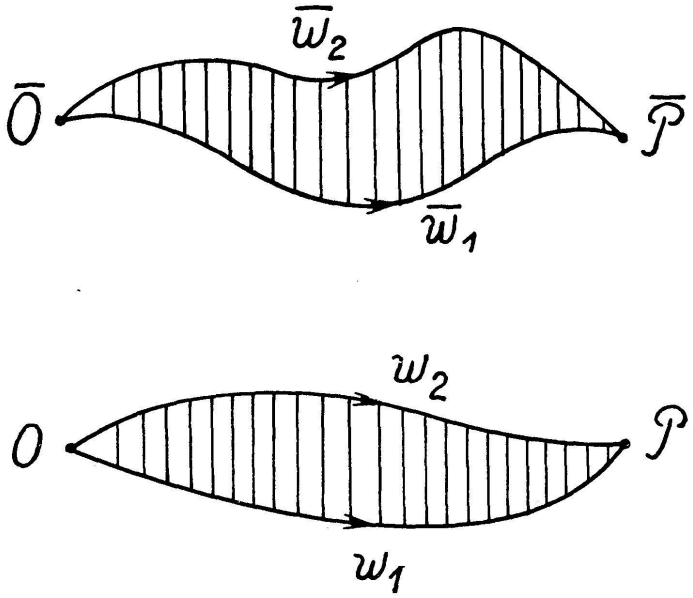

Fig. 4.

Si, au contraire, w_1 et w_2 ne peuvent être déformés l'un dans l'autre, $\overline{w}_1$ et $\overline{w}_2$ ne conduiront pas au même point. Car admettons que les deux chemins conduisent de $\overline{\mathrm{O}}$ à $\overline{\mathrm{P}}$; il sera alors possible, puisque par hypothèse $\hat{\mathfrak{M}}$ est s i m p l e m e n t c o n n e x e, de les

déformer l'un dans l'autre. Cette déformation, nous la recalquerons sur $\mathfrak{M}$; on devrait donc, contrairement à l'hypothèse, pouvoir déformer w_1 en w_2. Les points de $\hat{\mathfrak{M}}$ correspondent donc biunivoquement aux classes de chemins de $\mathfrak{M}$, déformables l'un dans l'autre.

Nous allons utiliser inversement ce résultat pour construire une variété de recouvrement simplement connexe. Nous choisissons sur $\mathfrak{M}$ un point fixe O et nous menons à partir de O tous les chemins possibles conduisant à tous les points possibles de $\mathfrak{M}$. Nous répartirons tous ces chemins en classes. Deux chemins a et b appartiendront à la même classe si premièrement ils conduisent au même point P et secondement s'il est possible de les déformer l'un dans l'autre, en maintenant O et P fixes.

Ce sont ces classes de chemins que nous introduirons par définition comme les *points* de la variété de recouvrement $\hat{\mathfrak{M}}$ à construire. C'est ici que nous utilisons le caractère abstrait de notre définition de la variété. Il y aura, en général, plusieurs classes de chemins $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... qui correspondront au même point P de $\mathfrak{M}$. Nous dirons que $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, ... sont situés au-dessus de P. De plus nous devrons définir maintenant ce qu'on entend par v o i s i n a g e des points introduits, car sans cela l'ensemble de points $\hat{\mathfrak{M}}$ ne serait pas une v a r i é t é. Soit $\overline{P}$ un point de $\hat{\mathfrak{M}}$, c'est-à-dire une classe de chemins conduisant de O à un point P de $\mathfrak{M}$. Nous considérons un voisinage sphérique $\mathfrak{V}(P)$, et menons à partir de P tous les chemins conduisant à tous les points de $\mathfrak{V}(P)$ et ceci sans sortir de $\mathfrak{V}(P)$. Soit $\delta = PQ$ un de ces chemins et a un élément de la classe $\overline{P}$ (fig. 5); parcourons

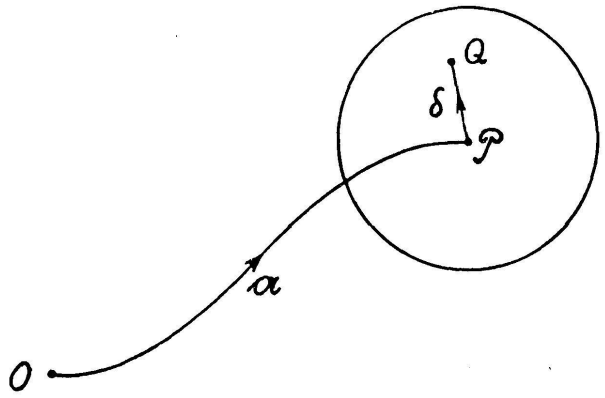

Fig. 5.

d'abord le chemin a, puis δ, et nous obtiendrons ainsi un chemin $a\delta$ auquel correspondra un point bien déterminé $\overline{Q}$ de $\hat{\mathfrak{M}}$. Les points ainsi construits sur les points de $\mathfrak{V}(P)$ formeront un voisinage $\mathfrak{V}(\overline{P})$. La définition est telle qu'à des chemins voisins sur $\mathfrak{M}$ correspondent des points voisins de $\hat{\mathfrak{M}}$. Il est clair que les points de $\mathfrak{V}(\overline{P})$ correspondent biunivoquement aux points de $\mathfrak{V}(P)$ et que de plus cette correspondance de $\mathfrak{V}(\overline{P})$ à $\mathfrak{V}(P)$ conserve les voisinages. $\mathfrak{V}(\overline{P})$ est donc homéomorphe à $\mathfrak{V}(P)$ et par conséquent homéomorphe à l'intérieur d'une sphère à n dimensions. La condition M2 du § 1 est donc satisfaite. Pour satisfaire à M1, nous dirons aussi que tout sous-ensemble de $\hat{\mathfrak{M}}$ contenant $\mathfrak{V}(\overline{P})$ est un voisinage de $\overline{P}$. Finalement il est possible de relier deux points de $\hat{\mathfrak{M}}$ par une courbe. Une des extrémités de la courbe est donnée par un chemin OP et l'autre par un chemin OQ. Le fait qu'il est possible de relier les points $\overline{P}$ $\overline{Q}$ veut dire qu'il est possible de déformer OP en OQ d'une manière continue. Mais il suffit pour cela de contracter ces deux chemins sur le point O. $\hat{\mathfrak{M}}$ est donc bien une variété.

Nous allons démontrer maintenant que $\hat{\mathfrak{M}}$ est une variété de r e c o u v r e m e n t de $\mathfrak{M}$. L'axiome R1 est satisfait, puisqu'il est possible de relier par un chemin tout point P de $\mathfrak{M}$ au point O. La classe de chemins correspondante est un point au-dessus de P. L'existence des voisinages $\mathfrak{V}(P)$, $\mathfrak{V}(\overline{P}_1)$, $\mathfrak{V}(\overline{\overline{P}}_2)$, ... découle immédiatement de leur construction. R3 est également satisfait. Soit Q un point de $\mathfrak{V}(P)$ et $\overline{Q}$ un point au-dessus de Q; $\overline{Q}$ est donc déterminé par un chemin $OQ = w$. Si nous relions par un chemin v dans $\mathfrak{V}(P)$ le point Q au point P, le chemin $w.\ v$ détermine un point $\overline{P}$ au-dessus de P. $\overline{Q}$ est alors dans le voisinage $\mathfrak{V}(\overline{P})$; car le chemin $w\ v\ v^{-1}$ définit un point $\overline{Q}'$ au-dessus de Q, appartenant au voisinage $\mathfrak{V}(\overline{P})$. Mais, puisqu'il est possible de déformer $w\ v\ v^{-1}$ en w, on a $\overline{Q}' = \overline{Q}$.

Il reste à montrer que $\hat{\mathfrak{M}}$ est simplement connexe. Une courbe fermée $\bar{k}$ de $\hat{\mathfrak{M}}$ est engendrée par une suite continue de chemins de $\mathfrak{M}$ partant de O et aboutissant aux points d'une courbe fermée k (fig. 6). Or, si nous contractons uniformément tous ces chemins sur le point O, cela revient à déformer la courbe $\bar{k}$ en un point.

Nous avons donc construit une variété de recouvrement

simplement connexe d'un caractère spécial. Le caractère spécial consiste en ce que les points étaient des classes de chemins. Puisque nous avons démontré maintenant l'existence de la variété, nous pouvons nous débarrasser de son caractère spécial

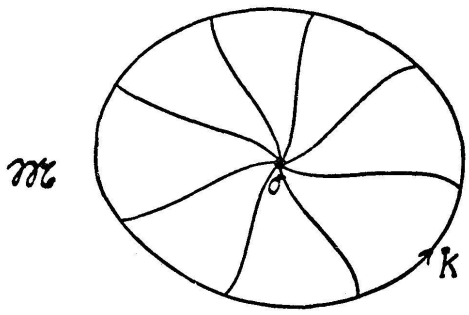

Fig. 6.

et nous entendrons dorénavant par $\hat{\mathfrak{M}}$ de nouveau une variété abstraite. Il est en outre permis dans tous les cas de se figurer cette variété de recouvrement comme une variété ponctuelle qui est au-dessus de $\mathfrak{M}$.

4. — Unicité de la variété de recouvrement universelle.

La démonstration d'unicité de la variété de recouvrement universelle se fait alors de la manière suivante:

Considérons deux variétés de recouvrement simplement connexes $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{M}}'$ de $\mathfrak{M}$. Soit encore une fois O un point fixe de $\mathfrak{M}$, $\overline{O}$ resp. $\overline{O}'$ un point quelconque sur $\hat{\mathfrak{M}}$ resp. sur $\hat{\mathfrak{M}}'$, situés tous deux au-dessus de O. Nous allons construire une représentation de $\hat{\mathfrak{M}}$ sur $\hat{\mathfrak{M}}'$.

Soit $\overline{P}$ un point quelconque de $\hat{\mathfrak{M}}$. Nous menons un chemin $\overline{O}\,\overline{P} = \bar{u}$ (fig. 7), nous le calquons en un chemin $OP = u$ sur $\mathfrak{M}$ et nous recalquons ce dernier en un chemin $\overline{O}'\overline{P}' = \bar{u}'$ de $\hat{\mathfrak{M}}'$. Ce procédé est possible, puisque la représentation G de $\hat{\mathfrak{M}}'$ sur $\hat{\mathfrak{M}}$ est localement topologique; nous renonçons ici à la démonstration rigoureuse.

Nous avons abouti ainsi à un point $\overline{P}'$ bien déterminé, qui sera l'image de $\overline{P}$. Ce point est indépendant du chemin $\bar{u}$ choisi. Car, $\hat{\mathfrak{M}}$ étant s i m p l e m e n t c o n n e x e, deux chemins $\bar{u}$ et