

**Georges Bouligand. — Premières Leçons sur la Théorie générale des Groupes. Applications à l'Arithmétique, à l'Algèbre, à la Géométrie. — Un volume gr. in-8° de viii-242 pages. Prix: 40 francs. Vuibert, Paris, 1935.**

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

maintenant atteintes avec le secours des déterminants fonctionnels. Ceci est d'ailleurs fort naturel puisque le déterminant fonctionnel est l'instrument essentiel de la transformation des intégrales multiples.

Les jeux d'indices donnent des classifications nouvelles pour faits et objets; c'est ainsi qu'il y a une *isométrie* tensorielle qui pourrait bien rapprocher géométrie et chimie encore que, pour le moment, il ne s'agisse que de géométrie.

Plus loin, les transformations linéaires, les modes d'action des groupes, les algorithmes, tels l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann ou les quaternions d'Hamilton, retrouvés comme cas particuliers, montrent la toute puissance des méthodes nouvelles.

La valence des affineurs donne aussi un merveilleux procédé de classification tout imprégné de symétries matricielles surtout hermitiques. Il peut encore y avoir un aboutissement en faveur de la géométrie algébrique ou de celle qui se rattache aux transformations de l'équation de Schrödinger.

La seconde partie de l'ouvrage est consacrée aux déplacements ou transports (*Uebertragungslehre*). Le déplacement par parallélisme généralisé, dû encore à Levi-Civita, en fut le prototype; il devient ici le *pseudo-parallélisme* mais avec quelles généralisations! Ce sont d'abord celles, de nature pfaffienne, dues à M. Elie Cartan. Les dérivations covariantes se sont compliquées mais pour atteindre des *courbures* dont la notion logique laisse loin derrière les anciennes notions sensibles. Et cependant ces notions logiques peuvent intervenir dans le domaine phénoménal; au delà des représentations tangibles, elles caractérisent l'effort de l'intelligence pure. C'est là un tournant de la Science qui est d'importance prodigieuse.

Il y a une symbolique particulièrement puissante due à Van der Waerden et Bortolotti, symbolique d'abord appuyée sur une formule de R. Lagrange. L'identité de Bianchi s'est considérablement développée. Les extensions de la formule de Stokes ont acquis un rôle synthétique encore signalé dans les travaux de M. Elie Cartan et qui m'a toujours été personnellement très sympathique.

Enfin les dérivées variationnelles de Lagrange (ne pas confondre avec R. Lagrange) permettent des reconstructions ayant toute la généralité des algorithmes précédents.

On ne saurait trop attirer l'attention sur cette réexposition qui, pour le moment, n'est due qu'à M. Schouten. Ce n'est pas d'une science difficile; qu'on se pénètre bien de la notation et tout coule de source. Mais quoiqu'on puisse penser de l'effort à faire, celui-ci apparaît maintenant comme inéluctable. On sait l'immense importance de la Géométrie différentielle à la manière de Bianchi; il s'agit ici d'un surbianchisme impossible à ignorer désormais. Il constitue comme une curieuse réaction de défense du Calcul différentiel à une époque où tout le monde croit apercevoir beaucoup plus de généralité dans le Calcul intégral.

A. BUHL (Toulouse).

Georges BOULIGAND. — **Premières Leçons sur la Théorie générale des Groupes.** Applications à l'Arithmétique, à l'Algèbre, à la Géométrie. — Un volume gr. in-8° de VIII-242 pages. Prix: 40 francs. Vuibert, Paris, 1935.

Ouvrage absolument merveilleux qui est de l'époque présente, de l'heure même, qui s'apparente aux ouvrages de Schouten, Struik, Salkowski,

analysés tout à côté, comme aux Cours de Géométrie d'Estève et Mitault, au modernisme desquels nous n'hésitons point à rendre hommage. Tout cela c'est l'élan actuel, c'est la revision des principes mathématiques avec l'appui des notions et du langage physique, c'est le triomphe de la notion d'invariant, soit différentiel soit intégral, avec sa prodigieuse puissance constructive. Et cependant l'étude que nous présente M. Bouligand pourrait être commencée en Spéciales; elle jouera, à coup sûr, un rôle de premier ordre dans nos Facultés où, hélas, l'esprit de routine demande souvent à être combattu.

Il faut convenir aussi que l'histoire de la Science est souvent étrange. Les groupes de Lie ont été longtemps représentés par l'ouvrage en trois volumes qui s'est tout de même épuisé, comme l'atteste une réimpression récente, mais qui, chez beaucoup, a suscité plus d'effroi que d'enthousiasme. Des ouvrages satellites, rédigés notamment avec la collaboration de G. Scheffers, tentèrent de faciliter l'accès de la rigide tour d'ivoire mais ce n'est vraiment que maintenant, après la Gravifique et son prodigieux contre-coup (suivant l'expression de M. Elie Cartan) sur les développements de la Géométrie, après divers épanouissements géométriques qui ont comme profité de l'occasion, qu'on peut parler d'élémentarisations vraiment pleines de charme et de valeur éducative.

Quoiqu'il en soit, en fait d'élémentarisations, M. Bouligand vient d'en écrire une avec le plus remarquable des talents. Le groupe est essentiellement *causal*; il engendre, il réunit, il ordonne. Il ne faut pas être trop exclusif; diverses disciplines, notamment géométriques, une fois situées, peuvent, avec grand intérêt, vivre d'une vie propre mais, en Arithmétique, en Algèbre, comme d'ailleurs en Mécanique quantique, il est souverain parce qu'on peut lui faire correspondre tout un symbolisme qui s'accorde ou ne s'accorde pas avec des idées, des modes opératoires préconçus. C'est ainsi que les groupes de substitutions attachés aux racines des équations algébriques ne se représentent pas par des combinaisons de radicaux. Et, sur ce point, l'esprit scrutateur de M. Bouligand atteint à des simplifications préliminaires qui vraiment sont fort inattendues.

En Géométrie, les inversions, strictement considérées en elles-mêmes, ne forment pas un groupe mais  $z'$ , fonction homographique de  $z$ , en donne un et ceci suffit pour engendrer une géométrie anallagmatique, élégante et subtile, qui semble être une sorte de réplique de l'automorphisme. Rappelons que c'est en géométrie anallagmatique que l'on rencontre la notion de *parataxie*; il conviendrait de citer ici Hadamard, Gambier, Robert, Labrousse, Frank et F.-V. Morley, ces deux derniers auteurs ayant publié une *Inversive Geometry* analysée dans *L'Enseignement mathématique* (32<sup>me</sup> année, 1933, p. 281). D'ailleurs, à propos des domaines fondamentaux, que l'auteur s'excuse de ne traiter que sur des exemples, on retrouve les considérations d'automorphisme desquelles Henri Poincaré tira tant de choses continuées d'ailleurs actuellement. De tels exemples en disent peut-être plus que beaucoup d'exposés généraux mais abstraits.

Ceci n'empêche pas que tout un chapitre est consacré à la génération des groupes suivant les idées de Lie mais non sans préliminaires vectoriels, sans *divergence* à associer au *système différentiel*, ce qui pourrait être fait suivant le schème

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_i = 0, \quad \Phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0.$$

Ensuite ce sont les considérations arithmétiques auxquelles j'ai déjà fait allusion. La Théorie des Nombres y trouve son compte avec un théorème de Fermat déjà rapproché des groupes par G.-A. Miller en un article encore publié ici (29<sup>me</sup> année, 1930, p. 7).

Les considérations algébriques déjà mentionnées vont jusqu'à une esquisse de la théorie de Galois. Les géométries algébrique, réglée, cayleyenne conduisent aux géométries non holonomes qui doivent tant aux travaux de M. Elie Cartan; ce serait encore le cas de citer Schouten et Struik. Enfin, toujours dans le même ordre d'idées, nous terminons par la transformation des algorithmes, des théories elles-mêmes. Presque tout est encore emprunté à M. Elie Cartan et avec quelle justesse, avec quelle justice! Algèbre tensorielle, nombres hypercomplexes, quaternions, calcul extensif de Grassmann, formules stokiennes par transformations immédiates et intuitives d'intégrales multiples; il y a introduction à tout. Une cinquantaine d'exercices, encore très intuitifs, invitent à d'autres reconstructions théoriques. Mais à quelle forme d'admiration un tel ouvrage n'invite-t-il pas ?

A. BUHL (Toulouse).

Ernst August WEISS. — **Einführung in die Liniengeometrie und Kinetik** (Teubners Mathematische-Leitfäden, Band 41). — Un volume in-8° de vi-122 pages. Prix, cartonné, R.M. 7.60. B. G. Teubner. Leipzig et Berlin, 1935.

Encore une œuvre qui éveille des réminiscences mais quelle œuvre n'en éveillerait point. Ici je me reporterais volontiers aux *Geometrische Konfigurationen* de Friedrich Levi et aux *Notions sur la Géométrie réglée* de G. Bouligand (voir *L'Ens. mathématique*, t. 28, 1929, pp. 331 et 338). Il s'agit d'une Géométrie, issue de celle des complexes, qui revient à l'étude d'une multiplicité quadratique dans un espace à 5 dimensions cependant que la Cinématique est en posture analogue dans l'espace à 7 dimensions. La première conception est de F. Klein, la seconde de E. Study dont M. Weiss est un brillant disciple. On pourra encore se reporter, dans *L'Enseignement mathématique* (t. 29, 1930, p. 225) à un Eloge funèbre que le disciple a consacré au Maître.

On part du complexe linéaire et des coordonnées de Plücker; les six coordonnées plückériennes sont tout de suite coordonnées homogènes pour un point d'un  $R_5$  où l'identité de Plücker donne la  $M_4^2$  dont l'équation se met sous la forme kleinéenne

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0 .$$

Vraiment, voilà un début qui est tentant et tout le reste justifie la tentation initiale; il me semble qu'il n'y a pas, dans ce livre, une seule formule qui ne porte la trace évidente de quelque symétrie. Naturellement la  $M_4^2$  précédente admet des générations par multiplicités linéaires et en redescendant ainsi vers l'élémentaire on trouve (ce qui ne se traduit pas toujours très bien en français) des forêts, des buissons, des faisceaux de complexes et finalement de simples configurations constructibles, avec un nombre fini de droites, à la manière des théorèmes de Desargues et de Pascal.