J.-L. Walsh. — Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. (American Mathematical Society Colloquium Publications. Volume XX). — Un vol. gr. in-8° de x-382 pages. Prix: $ 5. Published by the American Mathematical Society...

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

orthogonalisations correspondantes avec le secours d'un radical très simple. Développements adéquats. Le système de Haar est construit avec des préoccupations de convergence uniforme.

Le système de Rademacher porte à considérer des intégrales

$$\int_0^1 r_j(t)\, r_k(t) \ldots r_p(t)\, r_q(t)\, dt$$

généralement nulles mais égales à 1 pour $j = k$, $l = m$, ..., $p = q$. Il peut prendre une autre forme considérée par Walsh. Et tout ceci peut aboutir aux intégrales multiples des théories maxwelliennes, aux considérations ergodiques, aux théories cinétiques générales de la matière qui se recréeraient ici, à nouveau, si des intuitions incomplètes mais géniales n'avaient donné ce que nous devons maintenant à une méthode.

Il n'est pas besoin d'aller plus loin pour prouver que nous sommes en présence d'un grand, très grand ouvrage. Terminons brièvement quant à sa seconde moitié.

Convergence et sommabilité sont associées. Dans une série à structure orthogonale, la convergence dépend-elle, en général, de l'ordre des termes ? La question nécessite d'abord certaines considérations à la Lebesgue.

Voici maintenant, au delà des L^2, le cas des L^p. C'est aussi le difficile problème des développements quelconques à rattacher, si possible, au type orthogonal. Transmuer tous les développements en un type unique donnerait une allure idéale, sans doute chimérique, à la Physique théorique mais on peut rechercher jusqu'où il est loisible d'aller dans ce sens. Les séries et systèmes *lacunaires* sont inféodés à des particularités limites des L^p. Elles trahissent plutôt des structures relatives à ces L^p que des conditions qui y seraient introduites après coup.

Une autre généralisation, à peine sortie des limbes, est celle des systèmes biorthogonaux. Elle se rattache à la notion du *relativement* orthogonal.

Riche bibliographie où l'on s'étonne cependant de ne pas trouver certains noms, tels celui de M. Maurice Fréchet. Néanmoins production de premier ordre. A. Buhl (Toulouse).

J.-L. Walsh. — **Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.** (American Mathematical Society Colloquium Publications. Volume XX). — Un vol. gr. in-8° de x-382 pages. Prix: $ 5. Published by the American Mathematical Society. New-York, 1935.

Ce volume n'est pas sans analogie avec le précédent qui, par endroits, s'appuyait sur les travaux de J. L. Walsh. Il s'agit de la représentation par séries de polynomes, ce qui équivaut, sous des conditions très larges, à la représentation par séries de fonctions continues donc par séries de Fourier et analogues. Il y a d'ailleurs des polynomes trigonométriques. Certains noms dominent tous ces sujets tels celui de Tchebycheff, selon l'orthographe américaine, ou de Tschebyscheff selon l'orthographe polonaise. Ces analogies sont des plus remarquables et ont quelque chose de relativement rassurant. Qui ne s'est effrayé devant la floraison des théories modernes à apparences grandioses. Quel cerveau les analysera toutes ?

Eh bien, une expérience déjà ancienne m'a appris à ne point me frapper. Il suffit de se proposer d'étudier à fond *une seule* de ces théories. On est ensuite capable de comprendre et d'analyser rapidement les autres. On peut ainsi trouver, dans le présent ouvrage, un chapitre sur les développements orthogonaux situés même, très explicitement, dans l'espace L^2.

Ce qui distingue nettement l'œuvre de J. L. Walsh, c'est l'attachement au domaine complexe. Elle embrasse nombre de méthodes de prolongement analytique, méthodes examinées non pas quant à une structure souvent étrange mais quant à l'approximation fournie. Et ce qui est le mieux, au point de vue approximatif, coïncide souvent avec la construction de la plus grande élégance structurale.

Les représentations approchées selon Lindelöf ne sont pas sans profondes considérations concernant la représentation conforme. La formule intégrale de Cauchy, remaniée à son tour, conduit aux approximations par intégrales doubles puis par *lemniscates*, courbes d'égal module pour polynomes avec lesquelles on limite des domaines où jouent certaines intégrales déjà étudiées par Jacobi. Il y a là des points de départ pour conceptions interpolatrices de plus en plus générales.

A la fonction de Green peuvent également correspondre des domaines à bornes similaires des lemniscates précédentes. On parvient, par exemple, à l'approximation pour courbes de Jordan. Tout ceci suppose évidemment des convergences d'opérations successives pour lesquelles on retrouve, assez aisément, le fil directeur de la convergence uniforme.

Tchebycheff intervient avec la recherche de la meilleure approximation polynomiale. Là encore cette approximation peut être mesurée par une intégrale de ligne, par une intégrale de surface, parfois avec intervention d'une représentation conforme. Le problème peut être repris et poursuivi sans considérations d'analyticité. C'est l'occasion d'étudier le secours provenant des développements à constitution orthogonale.

L'interpolation par fonctions polynomiales repose sur des différences entre $f(z)$ et $P^n(z)$ exprimables par des intégrales à la Cauchy.

Voici maintenant l'interpolation par fonctions rationnelles. A signaler d'abord une généralisation de la formule de Lagrange. Il y a ici des classes très importantes d'expressions interpolatrices qui agissent à la limite et qui, avant le passage à la limite, fournissent des configurations, parfois très différentes, entre lesquelles cependant le choix est arbitraire.

Plus loin, ce sont les séries de fractions rationnelles ou les produits convergents qui, arrêtés ou transformés en un nombre fini de termes, sont encore ingénieusement comparables à leur forme limite complète. Tout est, en effet, entre cette forme limite et les formes non limites qui la préparent. On aurait pu croire qu'entre les deux formes, il n'y avait rien de simple à formuler. Erreur et c'est là qu'intervient l'originalité, souvent féconde, de J. L. Walsh.

D'ultimes tentatives sont faites dans le non analytique. Le Calcul des variations y fait apparaître certaines possibilités généralisant ce qui a été demandé antérieurement à la représentation conforme.

A première vue, on pourrait critiquer le livre comme semblant fait de l'assemblage d'une foule de problèmes particuliers. Un examen plus approfondi fait admirer l'esprit synthétique qui s'étend sur le tout.

A. Buhl (Toulouse).