

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1935)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Th. De Donder. — Théorie invariante du Calcul des Variations. Nouvelle édition. (Institut belge de Recherches radioscientifiques. Président-Fondateur: Th. De Donder. Volume IV). — Un vol. gr. in-8° de x-230-x pages. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1935.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BIBLIOGRAPHIE

Th. DE DONDER. — **Théorie invariante du Calcul des Variations.** Nouvelle édition. (Institut belge de Recherches radioscientifiques. Président-Fondateur: Th. De Donder. Volume IV). — Un vol. gr. in-8° de x-230-x pages. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1935.

Cette seconde édition prouve assez l'estime en laquelle le monde scientifique tient l'œuvre de M. De Donder. Cependant, comme nous l'avons déjà remarqué maintes fois, ici-même, le Calcul des Variations ne manque point d'animateurs illustres. Mais il y a, chez M. De Donder, une compréhension particulièrement profonde de la philosophie du sujet, compréhension d'autant plus remarquable qu'il ne cherche nullement à faire de la philosophie. Celle-ci éclate seule, sur des formules nombreuses et élégantes, formules qui se calculent, qui sont toujours des égalités. Que le monde inégalitaire ait grandement contribué aux progrès des mathématiques, voilà qui ne fait pas de doute, mais certains esprits ont poursuivi la perfection dans les domaines égalitaires et peut-être n'en pouvait-on trouver de plus beau et de plus général que celui du Calcul des variations.

Qu'est-ce qu'une théorie *invariante* de ce Calcul ? N'y a-t-il pas quelque paradoxe à parler d'invariance dans ce que l'on déclare variable ? Paradoxe ou non, il y a là ce que l'intelligence humaine peut faire de plus raisonnable vis-à-vis de l'infinie complexité des phénomènes. La Science doit d'abord rechercher, en ceux-ci, ce qui ne varie pas, d'où deux grandes catégories d'invariances mathématiques: l'invariance des intégrales des systèmes d'équations différentielles et l'invariance des intégrales multiples attachées à des champs d'intégration déformables, la déformation pouvant avoir lieu, très généralement, en vertu d'équations différentielles. En d'autres termes, *équations différentielles* et *invariants intégraux* sont les deux piliers fondamentaux du monde mathématique et physique.

Ces méthodes variationnelles sont essentiellement créatrices. On se propose, par exemple, d'étudier, pour une intégrale n -uple, toutes les variations possibles qui aboutissent à des invariances. Eh bien, l'on découvre rapidement que l'espace à n dimensions ne suffit pas. Il y a de l'invariance à découvrir dans l'espace à N dimensions, N étant plus grand que n . Un jeune esprit, non encore familiarisé avec l'hyperespace, pourrait découvrir celui-ci par de telles méthodes. C'est là ce que j'appelle un aboutissement philosophique; c'est même l'un des plus saisissants qui soient. La Connaissance s'étend par une irréprochable analyse.

Dès le début du volume, les formules sont empreintes du symbolisme qui réussit; les dérivées variationnelles sont prêtes à donner naissance aux

dérivées covariantes, ce qui fait que le Calcul différentiel absolu est rapidement englobé.

La permutabilité et la non-permutabilité sont associées par la notion de *reste de permutabilité*, ce reste étant simple et élégant. Ces débuts peuvent être facilement appuyés, pour une première étude, dans l'espace euclidien, et cependant on reconnaîtra vite qu'ils sont *amétriques*. Quel puissant intérêt que d'y réintroduire ensuite la métrique choisie, pour telle ou telle raison de commodité, en se rendant compte de l'arbitraire de cette introduction.

Le *déplacement* variationnel lui-même est une conception des plus simples, entraînant nombre d'invariances et d'identités aussi naturelles que celles accompagnant le déplacement euclidien d'un solide invariable.

Plus loin, à propos de la *forme intrinsèque* d'une intégrale n -uple, M. De Donder étudie un Calcul « au sens large » riche d'expressions, à construction jacobienne, qui sont invariantes ou égales entre elles, en lesquelles s'insèrent nombre d'expressions métriques ou d'invariants différentiels au sens de Lamé. D'immenses régions géométriques, souvent étudiées isolément, sont ainsi survolées et de très haut. Et, à propos de *variances*, on termine alors par la forme générale du Calcul absolu.

Soyons brefs pour la Seconde Partie et pour la Troisième. La seconde est essentiellement *canonique*. On ne répétera jamais assez qu'une fonction Φ , à deux séries de variables x_i et y_i , donnant

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} dy_i = 0$$

lorsqu'elle reste constante, est alors intégrale d'un système différentiel dont la forme la plus simple est

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}.$$

Seulement on ne peut tout de même pas s'en tenir là. Ce raisonnement rudimentaire a le premier tort de ne mettre le système canonique en relation qu'avec une seule de ses intégrales. C'est en tentant de le reformer, dans des conditions plus générales, qu'on en trouve de curieuses extensions; les *solutions* en t sont alors *extrémales* aussi bien que *trajectoires* et c'est encore le point de vue variationnel qui domine. Il domine encore dans la recherche des identités fondamentales de la Gravifique, l'identité étant, en somme, une forme de l'invariance. Des principes analogues jouent en Mécanique ondulatoire où l'opérateur *hermitique* n'est jamais bien loin du symbolisme canonique.

Je m'arrête à regret. Ceux qui ont contribué, sans arrêt, à l'épuisement de la première édition de ce magnifique ouvrage, ne manqueront pas de s'inspirer de la seconde pour perfectionner encore les plus hautes recherches d'Analyse pure et de Physique théorique.

A signaler que le volume se termine par la *Liste des Publications de Th. De Donder*. Il n'y en a pas moins de 200, beaucoup concernant des Ouvrages ou des Mémoires très étendus. Cette liste seule pourrait attester la fécondité des méthodes créées ou perfectionnées par le savant auteur.

A. BUHL (Toulouse).