SECTION I

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

SECTION I

1. — *Sur la résolution graphique des équations fonctionnelles.* Par N. GERCÉVANOFF.

Etant donnée une équation fonctionnelle

$$f(\alpha) = \Phi\left[\alpha, f(\varphi(\alpha))\right],$$

où Φ et φ sont des fonctions données et f une fonction cherchée, le problème consiste à construire une courbe en coordonnées cartésiennes déterminée par l'équation

$$y = f(x).$$

La méthode consiste en ce qui suit: on construit sur un côté de l'axe OX une échelle métrique et sur l'autre, celle de la fonction donnée $\varphi(\alpha)$; on s'en sert ensuite pour construire les points consécutifs A_0, A_1, A_2, ... de la courbe $y = f(x)$ selon les points de ces deux échelles, ayant les mêmes cotes.

L'auteur montre la construction de la courbe $y = f(x)$ pour résoudre l'équation fonctionnelle de la forme

$$f(\alpha) = f\left[\varphi(\alpha)\right] + \psi(\alpha),$$

où $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\alpha)$ sont des fonctions données. Le procédé consiste à tracer les droites $a_0 b_0$, $a_1 b_1$, ... qui réunissent deux points des deux échelles, ayant les mêmes cotes, celles de l'échelle métrique sur l'axe OX et d'une échelle curviligne, dont l'équation est

$$x = \varphi(\alpha), \qquad y = -\psi(\alpha);$$

on peut en déduire une méthode analytique pour résoudre les équations fonctionnelles. A cet effet il faut éliminer l'indice de l'itération n entre l'équation de l'abscisse $x = \varphi_n(\alpha_0)$ et celle de l'ordonnée $y_0 = U_n(\alpha_0, y)$, α_0 et y_0 étant l'abscisse et l'ordonnée initiales de la courbe $y = f(x)$.

2. — *Calcul des « Wurfs » de von Staudt et les nomogrammes de certaines classes d'équation.* Par Nil GLAGOLEFF.

Von Staudt a construit une théorie projective des opérations arithmétiques, la théorie des « Wurfs » sur une droite ou sur une conique. Précisément, le calcul sur une droite l est établi par rapport aux trois points fondamentaux A, B, C de cette droite. Etant donnés deux points arbitraires M_1 et M_2 sur la droite l, la projectivité parabolique ayant un point double C, qui change le point A en point M_1, change le point M_2 en un point S, nommé « la somme » des points M_1 et M_2, $M_1 + M_2 = S$.

De même la projectivité hyperbolique ayant les points doubles A et C qui change le point B en point M_1, change le point M_2 en point P, nommé « le produit » des points M_1 et M_2, $M_1 . M_2 = P$.

Les points A, B et C jouent le rôle des nombres 0, 1 et ∞ dans le système du calcul projectif.

L'auteur montre que cette théorie permet de construire avec la plus grande facilité les nomogrammes à points alignés du genre zéro et du genre deux de l'équation du troisième ordre nomographique des types:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \ ; \qquad f_1 f_2 f_3 = 1 \ .$$

Un nomogramme ainsi obtenu a la forme la plus générale. Cette méthode a cela de particulier: on peut obtenir le transformé collinéaire arbitraire du nomogramme ainsi obtenu sans effectuer la transformation même.

La théorie de von Staudt peut être généralisée; aux opérations arithmétiques, l'addition et la multiplication, l'auteur ajoute une opération projective nouvelle, caractérisée par une projectivité elliptique. Cette opération est soumise à la loi commutative et à la loi associative et permet de construire avec la même simplicité un nomogramme du genre deux de l'équation de l'ordre trois du type: $f_1 f_2 f_3 = f_1 + f_2 + f_3$.

Cette opération nouvelle a pour module le point A. Ce module peut être regardé aussi comme variable; c'est ce que donne la méthode de construction du nomogramme de l'équation à quatre variables:

$$f_1 f_2 f_3 - f f_2 f_3 - f f_1 f_3 + 2\alpha f f_3 + f f_1 + (B - 2\alpha) f_1 - B f_3 + B f + B = 0 \ ,$$

où $B = \alpha^2 + \beta^2$, α et β sont des constantes.

Cette méthode de construction des nomogrammes n'exige presque pas de calcul numérique et permet dans certains cas de l'éviter complètement.

3. — *Sur l'application de la géométrie algébrique à la construction des nomogrammes.* Par A. Glagoleff.

Si nous établissons une correspondance biunivoque entre les points d'une courbe algébrique unicursale d'ordre n et les points d'une échelle rectiligne régulière et si nous transportons en des points de la courbe les cotes des points correspondants de l'échelle, nous obtenons sur la courbe l'échelle régulière d'ordre n.

Si la droite porte une échelle fonctionnelle, l'échelle correspondante curviligne s'appelle une échelle fonctionnelle d'ordre n. En étudiant les propriétés des échelles d'ordre supérieur, l'auteur montre que plusieurs propriétés des courbes algébriques, trouvées par Salmon, Cayley, Weyr et d'autres géomètres, peuvent être appliquées à la nomographie.

Ainsi en étudiant les propriétés des échelles du second ordre, l'auteur obtient une méthode générale de construction des nomogrammes du type de Clark pour une équation à 4 variables α, β, u et v:

$$(a_1 f_3 + b_1 f_4 + c_1) f_1 f_2 + (a_2 f_3 + b_2 f_4 + c_2)(f_1 + f_2) + (a_3 f_3 + b_3 f_4 + c_3) = 0 ,$$

a_i, b_i, c_i étant des constantes.

Les échelles f_1 et f_2 ont le même support — une conique c_2, dont l'équation est:

$$(a_2 x + b_2 y + c_2)^2 - (a_1 x + b_1 y + c_1)(a_3 x + b_3 y + c_3) = 0 .$$

Le point (x, y) de l'échelle a deux cotes α et β, définies par les égalités:

$$f_1(\alpha) = -\frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_1 x + b_1 y + c_1} ; \qquad f_2(\beta) = -\frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_1 x + b_1 y + c_1} .$$

Les fonctions $f_3(u)$ et $f_4(v)$ ont pour supports des axes OX et OY. Dans le cas de l'équation de Clark à 3 variables:

$$f_3(\gamma) f_1(\alpha) f_2(\beta) + g_3(\gamma)\left[f_1(\alpha) + f_2(\beta)\right] + h_3(\gamma) = 0 ,$$

les variables α et β ont le même support — la conique c_2; les équations de l'échelle (γ) sont:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_2 f_3 - c_1 g_3 & b_1 g_3 - b_2 f_3 \\ c_3 f_3 - c_1 h_3 & b_1 h_3 - b_3 h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 g_3 - a_2 f_3 & b_1 g_3 - b_2 f_3 \\ a_1 h_3 - a_3 f_3 & b_1 h_3 - b_3 f_3 \end{vmatrix}} , \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 g_3 - a_2 f_3 & c_2 f_3 - c_1 g_3 \\ a_1 h_3 - a_3 f_3 & c_3 f_3 - c_1 h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 g_3 - a_2 f_3 & b_1 g_3 - b_2 f_3 \\ a_1 h_3 - a_3 f_3 & b_1 h_3 - b_3 f_3 \end{vmatrix}} .$$

En posant $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$; $a_2 = c_2 = 0$, $b_2 = 1$, $a_3 = -1$, $b_3 = 0$, $c_3 = 1$, on a l'abaque circulaire de M. Soreau.

4. — *Sur un cas d'anamorphose générale.* Par A. Moldaver.

Une équation à 3 variables étant représentée par un nomogramme, toutes les positions de l'index curviligne ou rectiligne forment une famille de courbes à 2 paramètres. Chacun des paramètres définit un point par lequel passe une courbe donnée de la famille.

En ajoutant à l'équation à 3 variables:

$$\Phi(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_2)\,\varphi(z_3) + g(z_1, z_2)\,\psi(z_3) + h(z_1, z_2) = 0$$

des égalités auxiliaires:

$$r(x, y) = \varphi(z_3), \qquad s(x, y) = \psi(z_3),$$

$r(x, y)$ et $s(x, y)$ étant des fonctions arbitraires des coordonnées x et y, on obtient l'équation de l'index sous la forme:

$$f(z_1, z_2)\,r(x, y) + g(z_1, z_2)\,s(x, y) + h(z_1, z_2) = 0 .$$

L'auteur démontre que les conditions pour que l'index passe par deux points, l'un coté z_1, l'autre z_2, sont les suivantes:

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_{22} & g_{22} & h_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_{11} & g_{11} & h_{11} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

où

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial z_i}, \qquad f_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2}, \qquad g_i = \frac{\partial y}{\partial z_i}, \quad \text{etc.}$$

Les échelles (z_1) et (z_2) sont données par les équations:

$$r_1(x, y) = \frac{gh_2 - hg_2}{fg_2 - gf_2}, \qquad s_1(x, y) = \frac{hf_2 - fh_2}{fg_2 - gf_2} \qquad \text{pour } (z_1)$$

$$r_2(x, y) = \frac{gh_1 - hg_1}{fg_1 - gf_1}, \qquad s_2(x, y) = \frac{hf_1 - fh_1}{fg_1 - gf_1} \qquad \text{pour } (z_2) .$$

En introduisant dans l'équation du 3^{me} ordre

$$\Phi \equiv (a_{21} z_2 z_3 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 + a_{24}) z_1 + a_{31} z_4 z_3 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3 + a_{34} = 0$$

les notations:

$$g(z_2, z_3) = a_{21} z_2 z_3 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 + a_{24},$$
$$h(z_2, z_3) = a_{31} z_4 z_3 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3 + a_{34},$$

on obtient la fonction sous une forme générale:

$$f(z_2, z_3) = a_{11} z_2 z_3 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 + a_{14},$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ étant des constantes arbitraires, telles que le rang de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix}$$

soit égal à 3.

Deux systèmes de paramètres $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ et $(a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04})$ ne correspondent à deux nomogrammes, liés par une collinéation que dans le cas où on a:

$$\begin{vmatrix} a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = 0 .$$

De là la méthode de construction des nomogrammes qui ne peuvent pas être réduits l'un à l'autre à l'aide d'une collinéation, ainsi que la méthode de construction de différents nomogrammes, ayant une même échelle curviligne.

Si l'équation donnée ne satisfait qu'à deux conditions d'anamorphose:

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 , \qquad \begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

on peut effectuer la dissociation incomplète des variables. Ainsi on peut représenter l'équation:

$$\Phi \equiv - z_3 + a_1 z_1^2 + a_2 z_1 z_2 + a_3 z_2^2 = 0$$

par un nomogramme « autocorrélatif », qui consiste en deux échelles

$$x_3 = 0 , \quad y_3 = z_3 , \quad x_2 = \frac{p}{2} z_2 + \frac{q}{2} , \quad y_2 = \frac{a_3}{2} z_2^2 + \frac{m}{2} z_2 + \frac{n}{2} ,$$

et un réseau à deux cotes:

$$x = p z_2 + q , \quad a_2 (z_1 - m) x + p y + a_1 p z_1^2 - a_2 q z_1 + m q - n p = 0 ,$$

m, n, p, q étant des constantes.

5. — *Sur les conditions nécessaires et suffisantes de l'anamorphose d'une fonction de trois variables.* Par H. Buettner.

Etant donnée une équation $F(x, y, z) = 0$, il faut trouver à quelles conditions nécessaires et suffisantes l'équation peut être réduite à la forme:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

L'auteur considère le premier membre de l'équation $F(x, y, z) = 0$ comme une fonction de 3 variables indépendantes x, y, z et cherche les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction $F(x, y, z)$ prenne la forme du déterminant de Massau. Si $F''_{xy} \neq 0$, $F''_{yz} \neq 0$, $F''_{zx} \neq 0$, il est nécessaire et suffisant que la fonction F satisfasse aux conditions suivantes:

$$F'''_{xyz} = 0 \quad (1) \ ; \quad \left(\frac{S}{F''_{zx}}\right)' = 0 \quad (2) \ ; \quad \left(\frac{T}{F''_{xy}}\right)' = 0 \quad (3) \ ;$$

$$\left(\frac{R}{F''_{yz}}\right)' = 0 \quad (4) \ ; \qquad T^2 F - T\left(P_1 F'_y - P F'_x\right) - P P_1 F''_{xy} = 0 \ , \quad (5)$$

$$R^2 F - R\left(M_1 F'_z - M F'_y\right) - M M_1 F''_{yz} = 0 \ , \quad (6)$$

$$S^2 F - S\left(N_1 F'_x - N F'_z\right) - N N_1 F''_{zx} = 0 \ , \quad (7)$$

$S, T, R, P, P_1, M, M_1, N, N_1$ étant définis par des égalités:

$$S = F'''_{yyx} \cdot F''_{yz} - F'''_{yyz} \cdot F''_{yx} \ ; \qquad T = F'''_{zzy} \cdot F''_{zx} - F'''_{zzx} \cdot F''_{zy} \ ;$$

$$R = F'''_{xxz} \cdot F''_{xy} - F'''_{xxy} \cdot F''_{zx} \ ; \qquad P = F''_{zz} \cdot F''_{yz} - F'_x \cdot F'''_{zzy} \ ;$$

$$P_1 = F''_{zz} \cdot F''_{zx} - F'_x \cdot F'''_{zzx} \ ; \qquad M = F''_{xx} \cdot F''_{zx} - F'_x \cdot F'''_{xxz} \ ,$$

$$M_1 = F''_{xx} \cdot F''_{xy} - F'_x \cdot F'''_{xxy} \ ; \qquad N = F''_{yy} \cdot F''_{xy} - F'_y \cdot F'''_{yyx} \ ,$$

$$N_1 = F''_{yy} \cdot F''_{yz} - F'_y \cdot F'''_{yyz} \ .$$

Si toutes les dérivées F''_{xy}, F''_{yz}, F''_{zx}, ou quelqu'une d'entre elles, sont égales à zéro, les conditions de l'anamorphose se simplifient.

Si le premier membre de l'équation $F(x, y, z) = 0$ ne satisfait pas à ces conditions, il faut chercher un « multiplicateur anamorphosant » A tel que le premier membre de l'équation nouvelle $AF = 0$ satisfasse aux conditions énoncées plus haut.

6. — *Les nomogrammes de l'équation quadratique.* Par O. Ermolowa.

L'auteur envisage les différents types de nomogrammes de l'équation quadratique:

$$w = Au^2 + Buv + Cv^2 .$$

Si $AC \neq B^2$, A, B, C étant des constantes, elle n'est pas anamorphosable. Dans ce cas on peut effectuer la dissociation incomplète des variables, en posant

$$w - Au^2 = Buv + Cv^2 = \lambda ,$$

λ étant une variable auxiliaire.

Si A, B, C sont des fonctions d'une variable α, l'équation à 4 variables

$$w = A(\alpha)u^2 + B(\alpha)uv + C(\alpha)v^2$$

n'est dissociable que dans les trois cas suivants:

$$A(\alpha) : B(\alpha) : C(\alpha) = a : b : c ; \qquad (1)$$

$$A(\alpha) = a\left[B(\alpha)\right]^2 , \quad C(\alpha) = c ; \qquad (2)$$

$$C(\alpha) = c\left[B(\alpha)\right]^2 , \quad A(\alpha) = a , \qquad (3)$$

a, b, c étant des constantes.

Si A, B, C sont des fonctions de deux variables α et β, l'équation à 5 variables

$$w = A(\alpha, \beta)u^2 + B(\alpha, \beta)uv + C(\alpha, \beta)v^2$$

peut être dissociée si elle a une des formes suivantes:

$$(a) \quad w = \chi(\alpha, \beta)\left[a_1 u^2 + b_1 uv + c_1 v^2\right]$$

$$(b) \quad w = \chi(\alpha)\left\{a_2\left[B_1(\beta)\right]^2 u^2 + b_2 B_1(\beta)uv + c_2 b^2\right\}$$

$$(e) \quad w = \chi(\alpha)\,\varphi(\beta)\left[a_1 u^2 + b_1 uv + c_1 v^2\right]$$

$$(d) \quad w = a_1 u^2 + B(\alpha, \beta)uv + c_1\left[B(\alpha, \beta)\right]^2 v^2$$

$$(f) \quad w = a_1 u^2 + B_1(\alpha)B_2(\beta)uv + c_1\left[B_1(\alpha)B_2(\beta)\right]^2 v^2$$

$$(g) \quad w = a_2\left[B_1(\alpha)\right]^2 u^2 + b_2 B_1(\alpha)B_2(\beta)uv + c_2\left[B_2(\beta)\right]^2 v^2 ,$$

a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 étant des constantes.

(c) est un cas particulier de (a), (g) un cas particulier de (d); mais dans ces cas particuliers la dissociation peut être obtenue de deux manières.

7. — *Sur la construction d'un nomogramme du troisième genre de l'équation symétrique d'ordre trois.* Par D. Pérépelkine.

L'auteur donne une démonstration de la possibilité de construire un nomogramme du troisième genre pour l'équation symétrique d'ordre 3, dont les trois échelles ont un support commun — une cubique unicursale. Il donne les formules nécessaires et indique l'interprétation géométrique de la réduction de cette équation à l'une des trois formes canoniques (réduction de l'équation de la cubique à la forme la plus simple).

8. — *Sur la généralisation des équations des échelles des nomogrammes à points alignés.* — Par P. Popowa-Glagolewa.

L'auteur considère les deux méthodes de la construction des nomogrammes à points alignés: la méthode analytique (à l'aide du déterminant de Massau) et la méthode des coordonnées parallèles de M. d'Ocagne et montre que les deux méthodes sont des cas particuliers de la méthode polaire. Cette dernière méthode consiste en une transformation corrélative polaire de l'abaque de Massau par rapport à une conique quelconque.

Soit $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ l'équation de la conique; si l'équation à 3 variables $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ admet la disjonction:

$$\varphi_1 x + \psi_1 y + \chi_1 = 0 \,,$$
$$\varphi_2 x + \psi_1 y + \chi_2 = 0 \,,$$
$$\varphi_3 x + \psi_3 y + \chi_3 = 0 \,,$$

les équations des trois échelles sont:

$$\xi_i = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_i & a_{12} & a_{13} \\ \psi_i & a_{22} & a_{23} \\ \chi_i & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \varphi_i \\ a_{21} & a_{22} & \psi_i \\ a_{31} & a_{32} & \chi_i \end{vmatrix}} \,, \qquad \eta_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \varphi_i & a_{13} \\ a_{21} & \psi_i & a_{23} \\ a_{31} & \chi_i & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \varphi_i \\ a_{21} & a_{22} & \psi_i \\ a_{31} & a_{32} & \chi_i \end{vmatrix}} \,, \qquad i = 1, 2, 3 \,.$$

Si la conique fondamentale est une parabole dont l'axe passe par l'origine, son équation est:

$$a_{22}(kx - y)^2 + 2a_{13}(x + ky) + a_{33} = 0 \,.$$

Dans ce cas les équations générales des échelles deviennent:

$$\xi_i = -\frac{a_{13}\sqrt{1+k^2}\,\psi_i}{\varphi_i + k\,\psi_i}, \qquad \eta_i = \frac{\sqrt{1+k^2}\,\chi_i}{\varphi_i + k\,\psi_i};$$

ce sont les équations données par la méthode des coordonnées parallèles. Le paramètre de la parabole définit la distance entre les axes des coordonnées parallèles, la direction de l'axe donne le rapport des modules des axes parallèles.

Si la conique fondamentale est une conique centrale, ayant le centre à l'origine et deux diamètres conjugués quelconques comme axes de coordonnées, on a

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0\ ,$$

et les formules générales nous donnent:

$$\xi_i = \frac{a_{33}\,\varphi_i}{a_{11}\,\chi_i}; \qquad \eta_i = \frac{a_{33}\,\psi_i}{a_{22}\,\chi_i}.$$

Ce sont les équations des échelles données par la méthode analytique.

Si la conique fondamentale est quelconque, on obtient d'autres types d'équations des échelles, dont l'usage est souvent préférable.

9. — *Sur la transformation corrélative de l'abaque de Massau à l'aide de la méthode polaire.* Par M. PENTWKOWSKY.

Pour étudier la transformation projective de l'abaque, l'auteur se sert de la transformation polaire. En étudiant la représentation du plan γ_1 sur le plan γ_2 à l'aide de différentes coniques fondamentales k^2, il est très aisé de trouver les trajectoires des points du plan γ_2.

Soient les équations de la transformation polaire:

$$\xi_i = \frac{\mathrm{L}k(\psi_i + \alpha\chi_i + \beta\,\varphi_i)}{(\chi_i \cos\varphi + \varphi_i \sin\varphi) + k(\psi_i + \alpha\chi_i + \beta\,\varphi_i)},$$

$$\eta_i = \frac{\mathrm{H}(\varphi_i \cos\varphi - \chi_i \sin\varphi)}{(\chi_i \cos\varphi + \varphi_i \sin\varphi) + k(\psi_i + \alpha\chi_i + \beta\,\varphi_i)},$$

ξ_i, η_i désignant les coordonnées d'un point du plan γ_2, α et β étant des paramètres de translation, φ le paramètre de rotation, L et H des modules et k étant un paramètre dont dépend la forme de la conique fondamentale. Les paramètres essentiels de la transformation sont α, β, φ et k. En les faisant varier, nous changeons la conique fondamentale k^2; les points du plan γ_2 se déplacent le long des trajectoires, correspondant à chacun des paramètres.

Les formules de la transformation polaire peuvent être regardées comme définissant une transformation collinéaire particulière du plan γ_2. On obtient l'abaque transformé en passant d'un système de paramètres α, β, φ, k à un autre système α', β', φ', k'.

La connaissance de la conique fondamentale elle-même est superflue pour opérer la transformation; elle n'a été nécessaire que pour l'étude du sens géométrique des paramètres α, β, φ et k.

10. — *Abaque à réseau à trois cotes.* Par Z. Michalewsky.

L'auteur construit pour l'équation à 5 variables

$$F_2 G_{34} + F_2 + F_5 \cdot F_{34} + cp_{34} = 0$$

un nomogramme qui peut être regardé comme une généralisation du réseau à deux cotes.

SECTION II

11. — *Sur l'exactitude des graduations nomographiques.* Par A. Moldaver.

L'auteur donne la notion de « l'épaississement de la graduation », donne des méthodes pour le calcul et le choix rationnel des échelles rectilignes et curvilignes.

Pour une échelle

$$x = f(t) \ , \qquad y = g(t) \ ,$$

« l'épaississement de la graduation » φ correspondant à l'intervalle graphique δ est définie par les équations:

$$\varphi = \frac{\Delta t}{t} \ ; \qquad \delta = \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \ .$$

Ainsi pour l'échelle homographique $z = \dfrac{a_{11} t + a_{12}}{a_{21} t + a_{22}}$, on a

$$\varphi = \frac{-(t + m)^2}{t(t + m + \mathrm{N})} \ , \qquad \text{où} \qquad m = \frac{a_{22}}{a_{21}} \ , \qquad \mathrm{N} = -\frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{\delta a_{21}^2} \ .$$

Si pour deux valeurs de la variable t_1 et t_2, on a $\varphi_1 = \varphi_2$, on a $|\varphi_i| \leq |\varphi_1|$, pour un t_i, vérifiant la condition:

$$t_1 \leq t_i \leq t_2 \ .$$