

SUR L'AXIOME DU CHOIX

Autor(en): **Fraenkel, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26601>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tion et à apprécier son rôle dans cet ensemble ¹, essais facilités par les travaux précieux de HEYTING ².

Et je voudrais terminer par le souhait que des travaux de cette tendance continuent à paraître et contribuent à l'entente mutuelle dans ce domaine de la Logique mathématique.

SUR L'AXIOME DU CHOIX ³

PAR

A. FRAENKEL (Jérusalem).

Les discussions sur l'axiome du choix durent depuis plus de 30 ans, son énoncé ayant été formulé pour la première fois sous forme d'un principe spécial par M. Beppo LEVI en 1902 ⁴ et utilisé en 1904 par M. Ernst ZERMELO (d'après une suggestion de M. Erh. SCHMIDT) comme base de démonstration du théorème sur le bon ordre. Les uns contestent en général la possibilité d'attribuer un sens à cet énoncé, comme je l'ai expliqué hier dans ma conférence sur la notion d'existence en mathématique. Un second groupe voit dans ce principe une proposition ayant un sens mais indémontrée et même indémontrable. Cette proposition ne peut servir comme moyen de démonstra-

¹ Voir entre autres Menger, *loc. cit.*; V. GLIVENKO dans *Acad. R. Belgique, Bull. Cl. Sc.* (5) **14**, 225-228, et **15**, 183-188 (1928/9); A. KOLMOGOROFF dans *Math. Ztschr.* **35**, 58-65 (1932); K. GÖDEL dans *Anzeiger Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl.*, 1932, 65-66, et *Ergebn. Math. Kolloq.* (Menger) **4**, 9-10 et 39-40 (1933); puis les travaux de LUKASIEWICZ et d'autres traitant de la logique plurivalente.

² *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, 1930, 42-71 et 158-169; voir aussi *Erkenntnis* **2**, 106-115 et 135-151 (1931) et *Verh. Intern. Math. Kongress Zürich* 1932, II, 344-345 (1933).

³ Conférences faites les 20 et 21 juin 1934 dans le cycle des Conférences internationales des Sciences mathématiques organisées par l'Université de Genève; série consacrée à la Logique mathématique.

J'exprime mes vifs remerciements à M. B. AMIRA (Jérusalem) qui a bien voulu se charger de la rédaction française de ce mémoire.

⁴ Pour les écrits parus jusqu'à 1928, voir la troisième édition de mon « *Einleitung in die Mengenlehre* » (Berlin, 1928).

tion de théorèmes mathématiques mais tout au plus comme hypothèse de travail qui facilite la recherche de théorèmes vrais. Car ce groupe, et même le premier groupe, admet qu'il est impossible de démontrer un théorème dont le contraire peut être déduit au moyen du principe du choix. Le troisième groupe enfin attribue au principe du choix une valeur égale à celle des autres principes de nature mathématique qui sont nécessaires au développement des sciences mathématiques. J'appelle ici « principes de nature mathématique » les principes comme celui de l'induction complète ou l'axiome de l'infini de Russell et non les axiomes purement logiques; et la question reste ouverte si le « caractère tautologique » (dans le sens de WITTGENSTEIN et de l'école de Vienne ¹) ne lui revient pas. Mais la grande majorité de ce troisième groupe même admet que nous avons ici un axiome « *sui generis* » et que par suite il y a un intérêt mathématique essentiel de mener les démonstrations autant que possible *sans* le principe du choix et de caractériser comme tels les théorèmes qui ne sont démontrables qu'à l'aide de ce principe. On peut citer comme représentants de ces groupes: pour le premier, M. BROUWER; pour le second, MM. BOREL, LEBESGUE et LUSIN; pour le troisième, M. SIERPIŃSKI. Les limites entre ces groupes (surtout entre le premier et le second) ne sont d'ailleurs pas très précises.

Pour terminer ces remarques disons, qu'en 1890 déjà Giuseppe PEANO dans un mémoire publié dans les *Math. Annalen*, Vol. 37, et concernant l'intégration des équations différentielles dit ceci:

« Mais comme on ne peut pas appliquer une infinité de fois une loi *arbitraire* par laquelle à une classe a on fait correspondre un individu de cette classe, on a formé ici (c'est à dire PEANO dans la démonstration en question) une loi déterminée par laquelle à chaque classe a , sous des hypothèses convenables, on fait correspondre un individu de cette classe ... ».

En langage moderne: Pour éviter le principe du choix on adopte une *loi* pour le choix.

¹ Ou bien dans le sens (un peu différent) de F. P. RAMSEY, voir *Proceed. London Math. Soc.* (2) **25**, p. 338-384, et *Mathematical Gazette* **13** (1928), p. 185-194. Cf. encore E. HUSSERL, *Formale und transzendente Logik* (Halle, 1929), surtout la contribution de O. BECKER, et H. SCHOLZ, *Deutsche Literaturzeitung*, 1932, p. 1912-1913.

Pour un principe, qui a été si souvent mal compris, la forme de l'énoncé est essentielle. Pour en donner une, qui soit à l'abri de tout malentendu, considérons les principes suivants pour la formation des ensembles :

1. FORMATION DE PAIRES, c'est-à-dire formation d'un ensemble, qui contient deux éléments différents donnés ;

2. SOMMATION, c'est-à-dire formation de l'ensemble-somme $\mathfrak{S}m$, qui contient tous les éléments des éléments de m ;

3. ELÉVATION EN PUISSANCE, c'est-à-dire formation de l'ensemble-puissance $\mathfrak{U}m$, qui contient comme éléments tous les sous-ensembles d'un ensemble donné m ;

4. TRIAGE, c'est-à-dire formation du sous-ensemble m_P d'un ensemble donné m , qui contient tous les éléments de m ayant une propriété donnée P .

A tous ces principes s'ajoute encore comme axiome d'existence *absolu* le postulat qu'il existe un ensemble en général — ceci pour exclure la possibilité que tous ces principes ne s'appliquent qu'à vide.

Il faut ajouter à cela, que comme éléments d'un ensemble-puissance peuvent figurer seuls les sous-ensembles dont l'existence est assurée à l'aide des autres principes, en particulier aussi à l'aide du principe du triage. On déduit facilement de ces principes (surtout de 1. et de 4.) l'existence de l'ensemble nul, qui ne contient aucun élément, ainsi que de l'ensemble $\{m\}$, qui contient le seul élément donné m .

L'existence de l'ensemble-produit (Verbindungsmenge), que Cantor a introduit pour former le produit des nombres cardinaux, peut être assurée à l'aide des principes ci-dessus de la manière suivante : Soit m un ensemble d'ensembles et admettons, pour simplifier, que m soit disjoint, c'est-à-dire que deux quelconques des éléments de m n'aient pas d'éléments communs. Il peut arriver alors que l'ensemble-somme $\mathfrak{S}m$ contient des sous-ensembles ayant la propriété suivante P : le sous-ensemble a un et un seul élément commun avec *tout* élément de m . L'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathfrak{S}m$ ayant cette propriété existe alors d'après le principe de triage et est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathfrak{U}$ qui contient tous les sous-ensembles possibles de l'ensemble $\mathfrak{S}m$; c'est donc un sous-ensemble de l'ensemble-

puissance $U = \mathfrak{U} \mathfrak{S}m$. Chaque élément du sous-ensemble U_p de U ainsi obtenu est appelé *ensemble de choix* de m , car on peut se figurer que chacun de ces éléments (sous-ensembles de $\mathfrak{S}m$) provient d'un choix d'un élément de chaque ensemble qui est élément de m .

La question se pose alors: dans quelles circonstances l'ensemble U_p est vide, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'ensemble de choix du tout. Une condition *suffisante* est évidemment celle, que l'ensemble-nul soit élément de m ; car alors il est impossible de trouver un ensemble qui ait un élément commun avec cet élément de m . Mais est-ce que cette condition est aussi nécessaire? Autrement dit: y a-t-il au moins un ensemble de choix pour *tout* ensemble disjoint m d'ensembles non-nuls? On n'a pas réussi de résoudre ce problème à l'aide des principes ci-dessus; car la simple solution: «on choisit de chaque ensemble de m un élément et on forme de tous les éléments ainsi choisis un ensemble de choix» est contraire à la remarque de PEANO citée plus haut; elle est possible seulement si l'on peut donner une loi pour le choix des éléments en question, ce qui ne semble pas être possible en général. Nous établissons donc:

PRINCIPE DU CHOIX: L'ensemble-produit d'ensembles sans éléments communs devient nul *seulement* si l'un des ensembles-facteurs est nul. Ou bien: Un ensemble disjoint m d'ensembles non-nuls a toujours au moins un ensemble de choix, c'est-à-dire un ensemble, qui a un élément commun avec chaque élément de m .

Il ne s'agit donc pas dans cet axiome d'une *construction* d'un ensemble de choix — d'accord avec le fait, que notre axiome (contrairement aux principes ci-dessus) ne fixe pas l'ensemble en question d'une manière *univoque*. Le problème ne dit pas: Est-il possible de donner un ensemble de choix?, mais plutôt: Doit-on nier la non-existence d'ensembles de choix? D'une part la non-considération du caractère existentiel de notre principe a provoqué une série d'erreurs et de malentendus, même chez un chercheur profond et qui admet la théorie classique des ensembles comme l'était Julius KÖNIG; d'autre part précisément ce moment existentiel et non-constructif est la raison pour laquelle la majorité des intuitionnistes

d'empreinte radicale ou conservatrice déclarent notre principe sans signification ou inadmissible, l'identification de l'existence mathématique et de la constructibilité étant une thèse de base de l'intuitionnisme. Il est à remarquer que Henri POINCARÉ, dont la tendance était en grande partie de nature nettement intuitionniste, n'était pas contre le principe du choix; sa critique de la démonstration du théorème sur le bon ordre ne visait pas notre principe mais bien les définitions non-prédicatives.

Les autres principes mentionnés permettent, comme l'a montré ZERMELO dans le volume 65 des *Math. Ann.*, d'éliminer de l'énoncé ci-dessus du principe du choix la condition restrictive de la disjonctivité. On peut donc démontrer plus généralement:

A tout ensemble m , dont les éléments sont des ensembles non-nuls, correspond au moins une fonction uniforme $f(x)$, dont l'argument parcourt les éléments de m et dont la valeur $y = f(x)$ est toujours un élément de l'ensemble x .

L'importance du principe du choix en général ne sera pas exposée ici. Si l'on veut conserver l'analyse classique et la théorie des ensembles ne serait-ce que dans leurs lignes essentielles, on ne peut pas se passer du principe du choix; ainsi par exemple pour le calcul avec les puissances. Le rôle de ce principe en analyse a été indiqué surtout par M. SIERPIŃSKI et ses élèves, particulièrement MM. TARSKI et LINDENBAUM. Mais le principe du choix est d'une importance essentielle même en arithmétique. Les champs d'application les plus importants sont ici d'une part la théorie des élargissements infinis des corps et des anneaux, pour lesquels E. STEINITZ a montré le rôle de l'axiome, et d'autre part son application à la théorie des ensembles finis, pour la première fois indiquée par M. B. RUSSELL, où ce principe sert à la démonstration de l'équivalence des différentes définitions du caractère fini, ainsi par exemple le caractère fini dans le sens inductif et dans celui de DEDEKIND. Il semble qu'un théorème aussi simple comme « l'ensemble-puissance d'un ensemble fini est fini » ne peut pas être démontré sans l'aide du principe du choix si l'on comprend « fini » dans le sens « non-équivalent à aucun vrai sous-ensemble » (et d'ailleurs une démonstration

directe présente des difficultés même *avec* ce principe). D'après M. A. TARSKI on peut même juger de la valeur des définitions du fini selon leur rapport au principe du choix.

L'application la plus célèbre du principe du choix, pour laquelle ce principe a été expressément formulé comme nouvel axiome, est comme l'on sait son rôle dans la démonstration du *théorème sur le bon ordre* et ainsi du *théorème sur la comparabilité des puissances*. Il est clair, que si l'on pose le *théorème sur le bon ordre* comme axiome, le principe du choix devient démontrable, puisqu'on peut alors, dans tout ensemble qui a été bien ordonné, distinguer le premier élément par exemple. Hartogs a démontré dans les *Math. Ann.*, Vol. 76 (1915), que le *théorème du bon ordre* découle de celui de la comparabilité; ainsi chacun de ces deux *théorèmes* est équivalent au principe du choix, naturellement en admettant les autres principes. A cela correspond le fait que le *théorème du bon ordre* a le même caractère purement existentiel que le principe du choix.

Moins clair est l'état du *théorème de l'ordre*, c'est-à-dire de la proposition, que tout ensemble peut en général être ordonné. L'intuition permet de penser que ce cas spécial du *théorème du bon ordre* est plus faible que celui-ci, donc plus faible que le principe général du choix; car des exemples comme celui du continu linéaire montrent, que pour bien ordonner un ensemble qui est déjà ordonné il faut parfois encore surmonter des difficultés extraordinaires. Il est donc probable que ce que postule le *théorème de l'ordre*, et que l'on peut d'après HESSENBERG et M. C. KURATOWSKI formuler sans introduire une relation d'ordre spécial (à l'aide de la relation $a \varepsilon b$ seule), est plus faible que l'axiome du choix. Dans ce cas il serait d'un grand intérêt de chercher jusqu'où on peut aller dans un système de l'analyse et de la théorie des ensembles en admettant outre les principes usuels encore le *théorème de l'ordre* comme *postulat*. Il n'est pas exclu aussi que le *théorème de l'ordre* soit équivalent au principe du choix lui-même (ou bien à un de ses cas particuliers, dont il sera question tout à l'heure). Dans ce cas le *théorème de l'ordre* sera seulement *d'apparence* une spécialisation du *théorème du bon ordre*. Par contre on peut démontrer que la troisième possibilité est à rejeter, celle où le *théorème*

de l'ordre ne serait pas seulement *plus faible* que le principe du choix mais même *dépendrait* des autres principes, c'est-à-dire serait démontrable à l'aide de ces principes. Cette démonstration de l'indépendance sera facilement établie au cours de ce qui suit.

Nous passons maintenant au problème qui doit nous occuper encore aujourd'hui et demain, celui de la *dépendance et de l'indépendance du principe du choix*. Autrement dit il s'agit de savoir si le principe du choix est démontrable à partir des autres principes, et son énoncé comme nouvel axiome serait alors superflu, ou bien si l'on peut au contraire démontrer qu'il n'en découle pas. La première possibilité se recommande grâce au fait, indiqué par le savant anglais de grand talent décédé prématurément, le regretté F. P. RAMSEY (1903-1930), que le principe du choix a apparemment le même caractère tautologique que les axiomes logiques et les axiomes de relation en mathématique, tandis que les axiomes absolus d'existence, comme par exemple celui de l'infini, sont en tout cas *sui generis* et indépendants des autres axiomes. La seconde possibilité, celle de l'indépendance du principe du choix, est suggérée par le fait que nous ne possédons pas même un point de départ pour la démonstration de notre principe; aussi les nombreuses tentatives, souvent couronnées de beaux succès, des mathématiciens polonais surtout, d'établir des propositions équivalentes au principe du choix ou au théorème du bon ordre, et prises dans les différents domaines des mathématiques, n'ont jamais ouvert une voie qui rendrait possible la démonstration de l'une de ces propositions. Une démonstration *directe* du principe du choix serait évidemment d'établir d'une manière constructive un ensemble de choix; mais ceci donnerait une possibilité constructive de bien ordonner un certain ensemble qui y correspond; d'autre part l'état actuel du problème du continu montre combien un tel résultat est improbable. (Du reste, comme M. LEBESGUE l'a montré, il n'y a pas de fonction représentable analytiquement qui définisse un ensemble de choix, déjà au cas de l'ensemble-puissance du continu.)

Trois remarques sont à faire avant de passer à la considération de l'indépendance du principe du choix:

1. On s'est beaucoup occupé de la question : comment pourrait-on introduire au lieu de l'énoncé général ci-dessus une proposition plus spéciale, donc plus *faible* que le principe du choix, qui se rattache à un ensemble disjoint m quelconque d'ensembles non-nuls. Une telle proposition pourrait suffire à la démonstration, sinon de tous les résultats, au moins d'une partie de ceux que l'on démontre à l'aide du principe général du choix. La manière la plus simple de spécialiser ce principe est de soumettre la puissance de l'ensemble m ou bien celle des ensembles, qui sont les éléments de m , à des conditions restrictives. Un cas est à considérer avant tout, c'est celui où m est un ensemble *fini*. En effet si m ne contient qu'un seul élément a , a étant un ensemble non-nul, on arrive à réaliser la proposition du choix sans l'aide du principe du choix. Car si nous voulons utiliser un ensemble du choix correspondant, c'est-à-dire un ensemble qui contient un seul élément α de a , nous ne pouvons faire usage d'aucune propriété de cet élément, excepté du fait, qu'il est un élément *quelconque* de a ou bien qu'il est un élément quelconque ayant une propriété qui correspond à l'ensemble a . La valeur de l'introduction de l'ensemble du choix consiste donc en cela seulement, que l'on démontre à l'aide de l'ensemble du choix une proposition dans laquelle ne figure plus l'élément α qui constitue l'ensemble du choix. Des méthodes de ce genre sont en effet souvent employées, par exemple en géométrie élémentaire déjà. Cette méthode (d'habitude sous la forme « Soit α un élément quelconque de a ») est admissible sans le principe du choix ou un autre axiome spécial. Ceci tient, d'après une remarque de M. BERNAYS, à un théorème du calcul de la logique, que l'on peut énoncer ainsi : Si à l'aide d'une formule $\mathfrak{A}$ on peut établir une formule $\mathfrak{B}$, et si $\mathfrak{A}$ ne contient aucune variable libre, on peut démontrer la proposition « $\mathfrak{A}$ implique $\mathfrak{B}$ » sans se servir de $\mathfrak{A}$. De là vient que dans notre cas on peut au lieu de l'élément « choisi » introduire une variable indépendante pour établir la proposition à démontrer. Ceci étant, on n'aura, dans aucun des systèmes logiques habituels, de difficultés pour passer de la proposition « l'ensemble a n'est pas nul » à l'expression « un élément quelconque de a est désigné par α ». (Tout autre est le cas où l'on admet au lieu de la proposition

« soit α un élément quelconque de a » la formule Dx , introduite récemment par M. FOSTER¹, qui donne pour ainsi dire un *représentant* de l'ensemble a ou d'une propriété correspondante. Cette formule exige évidemment un principe, qui implique la proposition d'existence pure, sans en être une conséquence.) La remarque faite ici pour le cas où m contient *un seul* élément peut être étendue au moyen de l'induction au cas où m possède un *nombre fini* d'éléments. Dans ce cas aussi le principe du choix n'est pas nécessaire pour établir l'existence d'un ensemble du choix.

La plus grande spécialisation possible de notre principe quant à la puissance de l'ensemble m serait donc que m est dénombrable. Pour les *éléments* e de m nous pouvons supposer même qu'ils sont tous finis, par exemple qu'ils sont tous des paires. La forme la plus faible dans cette direction, et que nous appellerons *le principe du choix le plus spécial*, sera donc :

A un ensemble m dénombrable et disjoint de paires (ou d'ensembles finis non-nuls) correspond toujours au moins un ensemble du choix.

Ceci n'exclut évidemment pas la possibilité d'établir d'autres propositions qui seraient des spécialisations importantes du principe du choix. Une telle proposition a déjà été mentionnée plus haut et nous en reparlerons plus loin, c'est le théorème de l'ordre. Une autre spécialisation, qui est toutefois utilisable pour les ensembles de points seulement, est le « principio di approssimazione » de M. Beppo LEVI (*Math. Ann.* **90**), que M. T. VIOLA a appliqué récemment².

Remarquons encore que les savants de l'école intuitionniste (ou « idéaliste ») ne sont pas d'accord sur la question si le principe du choix ne devrait pas être accepté au moins dans le cas d'un ensemble dénombrable. M. BOREL trouve que ceci est à discuter tandis que M. LEBESGUE ne voit pas de raison pour une telle distinction (qui est plutôt de nature psychologique).

2. Un problème, que nous n'avons pas considéré jusqu'ici, joue un rôle important concernant la démonstration de l'indé-

¹ *Annals of Mathematics* (2) **32** (1931), p. 407-430.

² *Bollet. Unione Mat. Ital.* **10** (1931), p. 287-294, et **11** (1932), p. 74-78.

pendance du principe du choix, à côté des principes mentionnés au début de cette conférence (y compris l'axiome de l'infini), que nous considérons dès maintenant comme donnés. D'après la manière classique de donner des démonstrations d'indépendance nous aurons à construire une pseudo-théorie des ensembles, dans laquelle tous les principes sont valables sauf celui du choix. Ici une question se pose, qui surgit de même à la fondation de la théorie ordinaire des ensembles, c'est: quels sont les *non-ensembles* qui peuvent être admis comme éléments d'ensembles; autrement dit, de quels éléments primitifs se constituent les ensembles de notre domaine? M. ZERMELO laisse libres dans son important mémoire de 1908 la nature et la variété de ces éléments, qu'il appelle plus tard «éléments primitifs» (*Ur-elemente*), et il garde ce point de vue aussi dans le mémoire qu'il publia en 1930¹. J'ai proposé contrairement à ceci de *réduire* autant que possible ces éléments et d'admettre pour cela seulement l'ensemble-nul, dont l'existence est démontrable en tout cas; un tel domaine d'ensembles a le privilège d'être délimité mathématiquement avec plus de précision, et semble tout de même suffire dans tous les cas, y compris ceux des domaines d'application. Toutefois dans cette restriction on n'est pas arrivé jusqu'ici, à ma connaissance, à démontrer d'une manière mathématiquement sûre quoi que ce soit sur la dépendance ou l'indépendance du principe du choix². Je ne puis donc malheureusement rien vous dire aujourd'hui là dessus et je me contenterai pour la suite d'admettre avec ZERMELO que des *éléments primitifs quelconques* peuvent être adoptés. Le problème est ainsi moins profond qu'avec la restriction à l'ensemble-nul, ce qui semble prouver qu'au point de vue mathématique cette restriction justement a un mérite spécial.

3. Parmi les principes qui ont été mis plus haut à la base de la construction d'ensembles, il y en a un qui n'a pas la précision mathématique nécessaire, c'est le *principe du triage*. La notion de propriété qui s'y trouve doit être précisée; on le voit

¹ *Fundamenta Mathem.* 16, p. 29-47.

² Les idées de M. L. CHWISTEK (*Math. Zeitschr.* 25 [1926], p. 439-473) ne sont pas considérées ici puisque leur point de départ est incomparable avec l'ordinaire.

surtout lorsqu'on veut utiliser ce principe pour une démonstration déterminée, comme dans notre cas de la démonstration de l'indépendance. C'est pour cette raison que j'ai donné en 1922 un énoncé mathématique précis de la notion de propriété dans le principe du triage. Cette notion a été précisée d'une autre manière presque en même temps mais indépendamment par M. Th. SKOLEM. Une délimitation différente de cette notion de propriété a été proposée en 1929 par M. ZERMELO ¹, mais elle semble être moins utilisable tant au point de vue de l'axiomatique en général que dans le but de donner des démonstrations. Puisque dans les démonstrations qui vont suivre nous n'irons pas jusqu'aux derniers détails, nous pouvons nous contenter, quant à la précision en question, de l'indication suivante: On introduit à l'aide d'une définition une notion de fonction, et puis, $f(x)$ et $g(x)$ étant deux fonctions quelconques, on postule l'existence du sous-ensemble d'un ensemble donné m , qui contient les éléments x de m pour lesquels $f(x)$ est élément de l'ensemble $g(x)$, ou en symbole: $f(x) \in g(x)$. Dans la voie que j'ai suivie, la définition de la notion de fonction se fait de manière à appliquer à des ensembles variables les processus des principes sus-mentionnés: formation de paires, de l'ensemble-somme, de l'ensemble-puissance et enfin le triage lui-même. L'utilisation du processus du triage, qui lui-même utilise la notion de fonction, ne constitue pas un cercle vicieux, mais une classification en gradation des fonctions, ceci selon le nombre de fois que l'on utilise de suite le processus du triage.

* * *

Après ces préliminaires passons enfin aux démonstrations elles-mêmes. La première de ces démonstrations montrera que non seulement le principe du choix, mais même le principe du choix *le plus spécial* est indépendant des autres axiomes si nous utilisons pour les éléments primitifs des ensembles la liberté offerte par ZERMELO. Cette démonstration est publiée (contrairement à la suivante) ²; une remarque additionnelle se trouve dans la thèse de mon élève M. J. Merzbach ³.

¹ *Fundam. Math.* **14**, p. 339-344; cf. SKOLEM, *ibidem* **15** (1930), p. 337-341.

² *Sitzungsber. Preuss. Math. Akad., Phys.-Math. Kl.*, 1922, p. 253-257.

³ *Bemerkungen zur Axiomatik der Mengenlehre*. Marburg (Lahn), 1925.

Le domaine $\mathfrak{D}$ de notre pseudo-théorie des ensembles, dans laquelle tous les principes sont valables mais où le principe du choix le plus spécial sera démontré non-valable, comprend les objets suivants :

I) L'ensemble-nul 0 et l'ensemble $N = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \dots\}$ introduit par ZERMELO et qui coïncide essentiellement avec l'ensemble des nombres naturels.

II) Un nombre infini dénombrable de couples d'objets différents $a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, a_3, \bar{a}_3, \dots$, où les éléments $a_k, \bar{a}_k$ ne sont pas des ensembles, c'est-à-dire ne contiennent pas d'éléments.

III) L'ensemble effectivement dénombrable

$$A = \{\{a_1, \bar{a}_1\}, \{a_2, \bar{a}_2\}, \{a_3, \bar{a}_3\}, \dots\} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}.$$

IV) Les ensembles que l'on obtient des objets du domaine à l'aide de la formation de paires, de somme, de puissance et par le triage.

Le domaine $\mathfrak{D}$ ne doit contenir aucun autre objet; nous dirons, « un ensemble existe », s'il est un des « objets de base » mentionnés sous I à III ou bien est construit avec ces objets de base à l'aide des processus mentionnés sous IV, employés en nombre fini de fois. Tous nos objets sont des ensembles à l'exclusion de ceux introduits sous II.

La notion de nombre naturel, c'est-à-dire l'induction complète n'est pas nécessairement employée dans l'expression « un nombre fini de fois » de tout à l'heure, mais on s'en sert en fait lors de l'introduction de la notion de fonction. Nous nous en servons donc par la suite sans crainte de l'induction. Le problème qui a été beaucoup discuté il y a un quart de siècle, si les nombres naturels et l'induction doivent être admis à la base de la théorie des ensembles ou au contraire, comme le voulait M. ZERMELO, doivent ressortir de la théorie générale des ensembles, a depuis reçu sa solution dans le premier sens (au point de vue métamathématique et mathématique) grâce aux travaux de l'école de HILBERT, donc dans le sens de POINCARÉ mais non pas avec ses arguments. En tout cas nous n'avons pas de raisons

pour éviter l'induction, surtout dans une démonstration d'indépendance.

Pour faciliter la notation nous désignerons, les éléments A_k de l'ensemble A comme *cellules*, les deux éléments de la cellule A_k comme éléments de cellule *conjugués*. Un sous-ensemble de A , qui contient *presque tous* les éléments de A (c'est-à-dire tous sauf un nombre fini d'entre eux), s'appellera *ensemble principal*. Ainsi l'intersection (partie commune, produit) d'un nombre fini d'ensembles principaux est elle-même un ensemble principal. L'ensemble que l'on obtient d'un ensemble quelconque m en permutant les éléments d'une certaine cellule A_k , sera dit *conjugué à m par rapport à A_k* et sera désigné par $\bar{m}^k$. Un ensemble conjugué à lui-même par rapport à A_k sera dit *symétrique* (par rapport à A_k).

Notre but est donc de démontrer le

Théorème fondamental: A tout objet M de $\mathfrak{D}$ correspond au moins un ensemble principal A_M tel que M soit symétrique par rapport à toutes les cellules de A_M .

Cela veut dire: On peut pour presque tous les indices k permuter a_k avec $\bar{a}_k$ sans changer par là l'objet M .

La démonstration de ce théorème fondamental établira l'indépendance du principe du choix, dans ce sens que selon lui le principe du choix n'est pas rempli dans notre domaine $\mathfrak{D}$. Car par exemple l'ensemble A de *toutes* les cellules ne peut pas avoir d'ensemble de choix d'après le théorème fondamental; tout ensemble de choix contiendrait un seul élément de chaque cellule et ne serait donc symétrique par rapport à aucune cellule. L'ensemble A donne une forme mathématiquement précise à l'idée de POINCARÉ et de RUSSELL, qui disent qu'un choix est impossible dans le cas d'un ensemble infini de paires de *chaussettes* également travaillées, et ainsi même l'équivalence de l'ensemble de toutes les chaussettes et de celui des *paires* de chaussettes ne peut pas être établie. Par contre dans le cas d'un nombre infini de paires de *souliers* on aura comme ensemble de choix par exemple celui de tous les souliers gauches qui existe à cause du principe du triage.

La démonstration du théorème fondamental se fait essentiel-

lement par l'induction complète, d'après le nombre des processus de construction nécessaires pour obtenir les ensembles de $\mathfrak{D}$ à partir des objets de base d'après IV. Le théorème fondamental est en tout cas vrai pour les objets de base eux-mêmes. Car l'ensemble-nul, l'ensemble N , ainsi que A (l'ensemble de toutes les cellules) sont symétriques par rapport à toutes les cellules, c'est-à-dire par rapport aux cellules de l'ensemble principal A lui-même. Mais les objets a_k et $\bar{a}_k$ sont symétriques par rapport à chacune des cellules sauf une, cela veut dire par rapport à toutes les cellules de l'ensemble principal $A - \{A_k\}$.

La marche de la démonstration inductive est la suivante: On a tout d'abord besoin d'un

Lemme: Soit m un objet quelconque de $\mathfrak{D}$ et soit A_k une cellule quelconque, il existe alors l'objet conjugué à m par rapport à A_k .

La démonstration ne se laisse pas mener, comme on s'attendrait, de manière à suivre la construction de m à partir des objets de base et de passer à la voie conjuguée. Le processus de formation de puissance et celui de triage, qui s'enlacent de manière non-prédicative, s'y opposent. La démonstration se base sur la notion d'une gradation des ensembles qui dépendent des éléments de cellule $a_k, \bar{a}_k$: un de ces éléments de cellule lui-même est dit d'ordre 0, un ensemble qui contient des éléments de cellule (la cellule A_k par exemple) est d'ordre 1, en général un ensemble qui contient des éléments d'ordre $n - 1$ (et peut-être d'ordre inférieur), est d'ordre n . Par induction d'après cet ordre il n'est pas difficile de démontrer le lemme.

La démonstration du théorème fondamental se fait au moyen d'une chaîne de théorèmes comme suit:

Théorème 1. Un ensemble, que l'on obtient au moyen de formation de paires, de somme ou de puissance à partir d'objets (« objets de départ »), qui sont symétriques chacun par rapport aux cellules d'un ensemble principal, est symétrique lui-même par rapport aux cellules d'un certain ensemble principal.

Démonstration. Le couple formé de deux tels objets est évidemment symétrique par rapport aux cellules de l'intersection

des deux ensembles principaux en question. Quant à la somme et à la puissance, soit l'ensemble arbitraire M symétrique par rapport aux cellules de l'ensemble principal A_M , et soit A_k une cellule quelconque de A_M ainsi que $\bar{M}^k = M$. Si alors $\mu \in m \in M$, on aura $\bar{\mu}^k \in \bar{m}^k \in \bar{M}^k$; de $\bar{M}^k = M$ on a $\bar{\mu}^k \in \mathfrak{S}M$, c'est-à-dire que $\mathfrak{S}M$ aussi est symétrique par rapport à A_M . De même pour l'ensemble de puissance: D'après le lemme il existe pour tout sous-ensemble de M un ensemble conjugué par rapport à A_k , et cet ensemble est un sous-ensemble de $\bar{M}^k = M$; ainsi $\mathfrak{U}M$ aussi est symétrique par rapport à toutes les cellules de A_M . Le théorème 1 est ainsi démontré.

Une conséquence facile du théorème 1 est le théorème suivant:

Théorème 2. Si dans les conditions du théorème 1 l'objet de départ ou l'un des objets de départ est laissé variable, à la fonction $\varphi(x)$ ainsi obtenue correspondra un ensemble principal tel que pour tout objet x_0 $\varphi(\bar{x}_0^k)$ sera toujours conjuguée à $\varphi(x_0)$ par rapport à la cellule quelconque A_k de l'ensemble principal.

Le théorème 2 fournit le moyen d'étendre le théorème 1 sur le processus du triage. Car on a le

Théorème 3. Soient φ et ψ deux fonctions du genre décrit au théorème 2 et soit l'ensemble M symétrique par rapport aux cellules d'un ensemble principal, alors ceci aura lieu aussi pour le sous-ensemble de M déterminé par (φ, ψ) , c'est-à-dire pour l'ensemble des $x \in M$ pour lesquels $\varphi(x) \in \psi(x)$.

La démonstration se fait de la manière que l'on comprend facilement, en formant l'intersection des ensembles principaux qui correspondent à φ et ψ d'après le théorème 2 et de l'ensemble principal qui correspond à M d'après les données. Cette intersection est de nouveau un ensemble principal, et le sous-ensemble en question de M est symétrique par rapport aux cellules de cet ensemble principal.

On démontre aussi un théorème analogue au théorème 2 pour la fonction que l'on obtient d'un tel sous-ensemble en laissant variable un élément de départ, et l'on procède par induction en définissant:

A) Tout objet de base et tout ensemble provenant des objets de base par formation de paires, sommation, formation de

puissance, est dit de classe zéro. De même une *fonction* de classe zéro est une fonction qui correspond à un ensemble de classe zéro si l'on laisse variable un des objets de départ.

B) Si l'on détermine, pour un ensemble M de classe p au plus, un sous-ensemble au moyen de deux fonctions φ et ψ , dont chacune est aussi de classe p au plus, le sous-ensemble en question sera dit de classe $p + 1$ au plus. De même une *fonction* correspondante sera dite de classe $p + 1$ au plus; ici on laissera variable l'ensemble M , ou l'une des constantes qui se trouvent dans φ et ψ , ou bien les deux à la fois.

D'après le théorème 1 et la remarque faite au sujet de la symétrie des objets de base, tout objet de classe 0 est symétrique par rapport aux cellules d'un certain ensemble principal. Si l'on considère ceci comme démontré pour tout ensemble de classe p au plus, on démontre en analogie avec la démonstration des théorèmes 2 et 3, que la même propriété de symétrie subsiste pour les ensembles de classe $p + 1$ au plus. Puisque pour tout ensemble on a des nombres naturels p tels que M soit de classe p au plus, le théorème fondamental est démontré et avec lui l'indépendance du principe du choix le plus spécial.

La démonstration vient évidemment essentiellement de la possibilité d'admettre l'existence d'objets $a_k, \bar{a}_k$ provenant pour ainsi dire du rien et qui ne sont pas des ensembles. Si l'on restreint le domaine de la théorie des ensembles à des *ensembles* seulement, y compris l'ensemble-nul, ce qui est sûrement de bon sens et même préférable au point de vue mathématique, la question de l'indépendance du principe du choix reste ouverte même après la démonstration précédente.

Notre démonstration résout du reste en même temps le problème de l'indépendance du *théorème de l'ordre* et ceci dans le sens positif. Car le théorème de l'ordre implique le principe du choix le plus spécial. Ainsi si le théorème de l'ordre est valable, on peut, *sans* se servir du principe du choix, ordonner l'ensemble de tout nos éléments de cellule, c'est-à-dire l'ensemble $\mathfrak{S}A$. Avec ceci on a en même temps et simultanément ordonné toutes les cellules, et même bien ordonné, car les cellules

sont des ensembles finis; les cellules deviennent des paires ordonnées. Ceci étant, le principe du triage suffit pour former un ensemble de choix de l'ensemble A, c'est l'ensemble qui contient le premier élément de chaque cellule. Les autres principes sans celui du choix ne permettant pas, d'après notre théorème fondamental, la constitution d'un ensemble de choix de A, le théorème de l'ordre est ainsi indépendant de ces principes. Il implique même comme conséquence le principe du choix le plus spécial.

On reconnaît de suite d'après ce qui a été démontré plus haut, que cette relation reste sans changement, si l'on admet dans le principe du choix le plus spécial des ensembles finis quelconques au lieu des paires. Par contre la question reste ouverte, si le théorème de l'ordre est plus faible que le principe général du choix ou bien lui est équivalent.

La question se pose naturellement, si le principe du choix le plus spécial suffit aux besoins des mathématiques, c'est-à-dire si le principe général en découle, ou bien si *le principe du choix le plus spécial est une atténuation essentielle du principe général*. Le second cas dirait, que le principe général est indépendant par rapport à un système d'axiomes qui comprend, outre les principes introduits plus haut, encore le principe du choix le plus spécial. On peut en effet répondre à cette question et dans *le sens de l'indépendance*, le principe du choix le plus spécial pouvant aussi être pris dans le sens plus général où il est valable pour un ensemble dénombrable d'ensembles finis non-vides *quelconques*, et non de paires seulement.

La démonstration de ce théorème donne même un peu plus: On peut premièrement poser au lieu du principe général du choix une forme plus spéciale, où il est question seulement d'un ensemble *dénombrable* d'ensembles quelconques. Le principe du choix le plus spécial se montre être une atténuation même par rapport à ce principe plus spécial. La même chose est d'autre part valable pour la relation qui existe entre le principe général et l'extension du principe le plus spécial que l'on obtient en considérant un ensemble *quelconque* d'ensembles finis au lieu d'un ensemble dénombrable. Autrement dit: La réussite de la

démonstration de l'indépendance dépend seulement du contraste entre les ensembles finis et les ensembles infinis desquels le choix doit être fait.

La démonstration de notre théorème d'indépendance sera publiée à une autre occasion. Ici sera donnée seulement la ligne générale de l'idée principale.

Nous formons de nouveau un domaine $\mathfrak{F}$ d'objets, dans lequel tous les principes, y compris celui du choix le plus spécial, sont valables, et nous montrerons que le principe général du choix n'y est pas valable, même pas avec la restriction à un ensemble *dénombrable* d'ensembles infinis.

Le domaine $\mathfrak{F}$ contiendra:

I) De nouveau 0 et l'ensemble N de *Zermelo*.

II) Un certain ensemble disjoint dénombrable (même effectivement dénombrable)

$$Q = \{ Q_1, Q_2, Q_3, \dots \}$$

d'ensembles infinis Q_k , ainsi que les ensembles Q_k eux-mêmes et leurs éléments. Pour les ensembles infinis Q_k , que nous appellerons aussi des *cellules*, on supposera pour simplifier, que leurs éléments ne sont pas des ensembles; on ne supposera rien de plus sur la nature de ces éléments.

III) Les ensembles que l'on obtient à partir des objets du domaine à l'aide des quatre principes: formation de paires, sommation, formation de puissance et triage.

IV) Les ensembles dont l'existence est établie au moyen du principe suivant (principe du choix le plus spécial): Pour tout ensemble dénombrable disjoint d'ensembles finis non-nuls qui existe en $\mathfrak{F}$, il existe au moins un ensemble de choix. Puisqu'il s'agit ici d'un axiome de pure existence, qui ne détermine aucun ensemble spécial, on n'en pourra conclure que le fait que le manque total de tels ensembles de choix est impossible.

D'autres objets n'existent pas dans $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ contient donc seulement premièrement les objets de base I et II qui, à part les éléments des cellules Q_k , sont tous des ensembles; deuxièmement

les ensembles, que l'on obtient à partir de nos objets à l'aide de l'emploi de nos principes un nombre fini de fois. Le domaine $\mathfrak{F}$ n'est nullement déterminé catégoriquement, surtout à cause de la nature de notre demande IV. Mais ceci ne joue aucun rôle pour notre but; la démonstration faite pour un domaine quelconque du genre considéré suffit pour démontrer l'indépendance du principe général du choix par rapport au principe le plus spécial.

Pour formuler le résultat essentiel introduisons ici de nouveau une notion de *symétrie* en définissant: Un objet de $\mathfrak{F}$ est dit *symétrique par rapport à la cellule* Q_k , s'il est invariant par rapport à des permutations arbitraires des éléments de Q_k entre eux.

D'après cette définition tous les objets de base par exemple sont symétriques par rapport à toute cellule, à l'exclusion des éléments de cellule: les éléments de Q_k sont symétriques par rapport à toutes les cellules sauf Q_k elle-même. Ici aussi on appelle un objet, qui provient d'un objet donné a par une permutation quelconque de Q_k , *conjugué à a par rapport à Q_k* . Il est facile de voir, que pour tout objet qui n'est pas symétrique par rapport à Q_k on a un nombre infini de conjugués différents par rapport à Q_k , — une remarque qui joue un rôle important pour la démonstration. On a de nouveau un théorème analogue au précédent :

Théorème fondamental: Tout objet de $\mathfrak{F}$ est symétrique par rapport à presque toutes les cellules.

Ceci démontré, on aura l'indépendance voulue. Car d'après le théorème fondamental l'ensemble Q de *toutes* les cellules n'aura pas d'ensemble de choix; un tel ensemble de choix contiendrait de chaque cellule un seul élément et ne sera donc symétrique par rapport à *aucune* cellule. D'ailleurs Q est un ensemble dénombrable, et l'indépendance sera donc démontrée, d'après la remarque faite auparavant, même pour un cas spécial du principe général du choix.

La démonstration du théorème fondamental se base de nouveau sur les deux faits que les objets de base ont la propriété de symétrie en question et que l'application des principes mentionnés sous III et IV sur des ensembles ayant la propriété

en question donne de nouveau des ensembles ayant cette propriété. Nous nous dispensons de l'explication du dernier fait par rapport aux principes mentionnés sous III; car la marche de la démonstration est analogue à celle esquissée plus haut. La partie principale de la démonstration consiste donc dans le lemme suivant.

Lemme: Soit m un ensemble disjoint dénombrable d'ensembles finis non-nuls dans $\mathfrak{F}$, qui est symétrique par rapport à presque toutes les cellules; s'il existe dans $\mathfrak{F}$ l'ensemble de choix a de m , alors a est symétrique du moins par rapport aux mêmes cellules que m .

La proposition exprimée par ce lemme est évidemment triviale dans le cas où non seulement m mais aussi les éléments des éléments de m (c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}m$) sont symétriques tous par rapport aux cellules d'un même ensemble Q . Car dans ce cas même tous les éléments de tout ensemble de choix — qui est en tout cas un sous-ensemble de $\mathfrak{S}m$ — sont symétriques au même sens, donc les ensembles de choix eux-mêmes le sont aussi. Nous désignons ce cas spécial comme cas de préférence. Le nerf de la démonstration du lemme est en ceci, que l'emploi de IV dans $\mathfrak{F}$ n'est nécessaire en aucun autre cas que celui de préférence. La démonstration sera terminée avec ça, et en cela consiste aussi la raison principale du fait que l'indétermination de l'exigence posée par IV ne rend pas impossible de parler du « domaine $\mathfrak{F}$ » et d'y opérer ¹.

¹ Aux conférences à Genève, j'ai ajouté ici une série d'explications concernant l'idée de la démonstration, mais il semble inutile de les répéter avant la publication complète de la démonstration, qui est assez compliquée.