

SUR LA NOTION D'EXISTENCE DANS LES MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Fraenkel, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1935)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26600>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA NOTION D'EXISTENCE DANS LES MATHÉMATIQUES ¹

PAR

A. FRAENKEL (Jérusalem).

Pour traiter brièvement un sujet aussi général, nous sommes obligés de nous restreindre dans deux sens: *extérieurement* en limitant le sujet même et *intérieurement* en ne traitant que les points caractéristiques et essentiels. Dans le premier sens nous laisserons de côté la signification extrinsèque des mathématiques, c'est-à-dire leur caractère par rapport à la réalité de la *nature*. C'est donc seulement le problème d'existence immanent aux mathématiques qui nous intéressera, celui qui se limite au domaine des *mathématiques pures* sans considérer les applications possibles.

La plus grande partie de cette conférence sera consacrée à la notion et au problème de l'existence mathématique en *général* et nous serons amenés à faire quelques remarques d'ordre historique. Dans la seconde partie nous rendrons plus concrètes les considérations générales en les appliquant à une notion particulière, mais centrale dans les mathématiques, à *la notion du continu*.

I. — PARTIE GÉNÉRALE.

La différence de vues qui existe entre PLATON et ARISTOTE au sujet de l'existence des êtres mathématiques pourrait carac-

¹ Conférence faite le 19 juin 1934 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à la Logique mathématique.

tériser à elle seule l'essentiel de ce que nous avons à dire. Pour PLATON le monde des mathématiques est un monde indépendant, portant en lui-même *ses propres lois* et supérieur au physique dans sa façon d'être. L'existence des êtres mathématiques est, de ce fait, *indépendante de la pensée humaine* comme, en général, de toute activité extérieure. Pour ARISTOTE, au contraire, il n'y a pas de monde mathématique en soi; si l'on en parle c'est en tant qu'idées *abstraites de l'activité humaine*, à savoir des constructions des mathématiciens créateurs. Pour cette raison aussi, ARISTOTE considère les constructions mathématiques comme conduisant seules à une vraie *ἐπιστήμη*; mais la projection abstraite de ces constructions sur un monde en soi, en vérité irréel, ne serait qu'une *δῆξις*¹.

Sans vouloir approfondir le développement historique de ce problème depuis l'antiquité jusqu'à nos jours² nous mentionnerons encore l'opposition entre LEIBNIZ et KANT, voisine de la précédente. LEIBNIZ souligne la possibilité d'une *mathematica universalis* en tant que science mathématique, symbolique et formelle, qui dépasse tout ce qui est à la portée des constructions et intuitions humaines. Pour KANT, au contraire, non seulement la géométrie, mais même l'arithmétique sont liées aux formes de l'intuition *humaine*: espace et temps; la notion du nombre notamment dépend, d'après lui, essentiellement de la catégorie du temps.

Si nous voulons mettre les couples Platon-Aristote et Leibniz-Kant en rapport avec les recherches modernes sur les fondements des mathématiques, la classification usuelle, et en général juste, des tendances actuelles en intuitionnistes, formalistes et logisticiennes ne convient pas. C'est plutôt l'opposition entre les deux thèses suivantes, tirées des discussions modernes, qui me semble

¹ Dans cette interprétation des idées antiques je me base surtout sur les indications de H. SCHOLZ, qui me semblent particulièrement précieuses puisque ce philosophe est versé en philologie classique autant qu'en mathématiques. Voir surtout le profond mémoire (1930): « Die Axiomatik der Alten ». (*Blätter für Deutsche Philosophie* 4, pp. 259-278.)

² Sur ce point on trouvera des indications précieuses dans le livre de O. BECKER (avec lequel d'ailleurs je ne puis me mettre d'accord sur quelques points essentiels): « Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene », Halle a. S., 1927. (Ce mémoire a paru aussi dans le *Jahrbuch f. Philosophie u. phänomenologische Forschung* 8, 1927.)

décisive: I. *Pour l'existence des objets mathématiques la compatibilité dans le sens de la non-contradiction à l'intérieur d'une théorie mathématique est nécessaire et en même temps suffisante.* En d'autres termes (en acceptant un énoncé de BERNAYS): est existant ce qui peut être sujet, c'est-à-dire peut occuper des places libres dans des fonctions propositionnelles d'une théorie non-contradictoire des mathématiques ou d'une de leurs branches particulières. (A cette thèse il se lie d'habitude, quoique pas toujours, explicitement ou implicitement, l'appel à un monde d'idées mathématiques ayant une valeur propre.) II. *La non-contradiction n'est pas suffisante pour l'existence, c'est-à-dire pour la vérité; c'est la possibilité de construire qui est décisive, et pour cette raison les mathématiques sont un monde de constructions qui s'exécutent dans le temps.* Si l'on passait de ces constructions à une théorie dépourvue de l'élément temps, on obtiendrait un empire d'ombres, où les symboles et le langage, c'est-à-dire des éléments vraiment extra-mathématiques, joueraient en fin de compte le rôle décisif.

Dans la suite nous appellerons la première de ces conceptions brièvement le *réalisme* (platonicien), la seconde l'*idéalisme*.

On classe d'habitude dans le réalisme les tendances logistiques de FREGE, de BERTRAND RUSSELL et de l'école de Vienne et aussi le formalisme de HILBERT et BERNAYS et de leurs élèves; dans l'idéalisme l'école intuitionniste de Paris et le néointuitionnisme de BROUWER (et en partie de WEYL). Cette division n'est pas tout à fait juste puisque les conceptions chevauchent plusieurs fois. Ainsi Henri POINCARÉ, qui (par exemple dans « *Science et Méthode* ») identifie l'existence dans les mathématiques avec la non-contradiction, ne peut pas être appelé tout simplement idéaliste. D'autre part la position de HILBERT n'est pas non plus si univoque qu'on le croit en général. C'est que pour lui — et cela le sépare des réalistes — les faits et objets de l'analyse et de la théorie des ensembles classique, et parfois même de l'arithmétique, ne sont pas donnés *en soi* et pour cela non-contradictaires, mais ils doivent être fondés sur une théorie purement constructive, intuitivement établie; les manières de conclusion transfinies et notamment les propositions purement existentielles ne sont, de cette façon, que des passages à des

résultats de caractère fini, et ses objets sont des idées dans le sens de KANT.

On peut cependant, malgré ces restrictions et d'autres précautions à prendre, adjoindre au point de vue platonicien le réalisme de l'école de Cambridge avec les *Principia Mathematica* d'une part, l'axiomatique classique de l'autre. Les réalistes anglais partent de faits fondamentaux, *vrais en vertu de leur évidence*. Ils procèdent par définitions et applications des procédés évidents de conclusion (règles de raisonnement), en employant toutefois à l'occasion des méthodes transfinies que l'intuition a de la peine à concevoir. Les axiomes du *choix* et de l'*infini* soulèvent une certaine difficulté parce qu'il n'est pas assez clair jusqu'à quel point ils appartiennent aux faits vrais d'évidence ou « tautologiques »¹ dans un sens qui peut être précisé. Pour l'axiome de l'infini cette question n'est pas si importante que pour l'autre parce que cet axiome, en tant que de nature non-tautologique, est en tout cas indispensable pour les mathématiques, science qui sans lui deviendrait une trivialité. Qui voit dans l'axiome de l'infini le seul caractère supplémentaire des mathématiques qui dépasserait la nature sans cela tautologique du système logico-mathématique ne porte guère atteinte à l'attitude de l'école de Cambridge ni à celle de l'école de Vienne qui s'est distinguée dans l'espace de ces derniers dix ans. (Sans doute elle diffère essentiellement de la première par sa théorie de la connaissance, mais quant à la logique les attitudes des deux écoles sont parallèles.) L'axiome de l'infini apparaît alors comme l'hypothèse fondamentale ou spécifique du système mathématique. — Beaucoup plus sérieuses sont les difficultés que soulèvent la théorie raffinée des types et l'axiome de réductibilité de RUSSELL. Jusqu'à ce jour elles ne sont pas entièrement surmontées; cependant elles se sont de beaucoup éclaircies ces dernières années, grâce surtout aux travaux de l'école de Vienne.

¹ Pour la bibliographie des sujets traités ici et dans la suite, nous renvoyons, pour autant qu'il s'agit de travaux parus avant 1928, à notre « *Einleitung in die Mengenlehre* » (3^e éd., Berlin, 1928). C'est seulement la littérature des dernières années que nous citerons au besoin. Pour les questions traitées plus haut, voir encore F. P. RAMSEY dans *Math. Gazette* 13, 185-194 (1928) et R. CARNAP dans *Erkenntnis* 1, 12-26, et 2, 91-105, 135-151 (1930-31).

L'axiomatique procède d'une façon différente¹: là, les faits fondamentaux de la mathématique ne sont pas *déduits* ou constructivement définis, mais seulement entièrement *décrits*, et ceci en faisant implicitement appel à un fond absolu dont les objets proviennent; cet appel de son côté peut être légitimé par une démonstration de la non-contradiction du système d'axiomes, démonstration qui confère à ce fond tout au moins le droit d'être imaginé. La description des objets se fait par l'indication des relations existant entre eux. L'opposition mentionnée entre les logisticiens et les partisans de l'axiomatique correspond à une différence dans la *création des notions* en général. Les premiers s'inspirent du principe de détermination « *per genus proximum et differentiam specificam* »; les autres procèdent fonctionnellement dans le sens souligné surtout par CASSIRER, d'après lequel une notion n'existe que par son rapport avec d'autres notions, « est une chose qui peut être prise comme sujet de certains jugements » (SCHLICK). Nous verrons plus tard quelle importance décisive possède l'appel implicite à un domaine d'existences absolues pour la définition, ou mieux, la description des objets mathématiques.

La parenté de ces tendances avec le réalisme platonicien est évidente. D'autre part, il est naturel de rapprocher de l'idéalisme aristotélicien (qui regarde les êtres mathématiques comme créations de notre esprit et non indépendants du sujet pensant), le néointuitionnisme tel qu'il se manifeste, dans les mathématiques, avec BROUWER et, dans la philosophie, de la manière la plus prononcée, avec l'anthropologisme de BECKER qui est lié à la métaphysique de HEIDEGGER. En effet, chez BROUWER les êtres mathématiques se construisent à partir de la suite des nombres entiers. Le procédé qui consiste à parcourir cette suite dérive d'une intuition primitive et fondamentale et requiert l'écoulement du temps.

MENGER² remarque avec raison que la notion de constructi-

¹ Une certaine union des deux points de vue est créée par le « heterodox view of logistic » de C. I. LEWIS, union qui, c'est vrai, ne garde que la tenue formelle des *Principia Mathematica*.

² Voir *Blätter für Deutsche Philosophie* 4, 311-325 (1930) et *Anzeiger Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl.*, 1930 (p. 257) et 1931 (p. 7). Nous voulons rappeler, à côté des exemples plus profonds de MENGER, que NELSON dans sa philosophie néofriesienne

bilité n'a pas un caractère absolu mais est prise différemment à des temps divers et suivant les buts poursuivis. Cette remarque, en soi juste sans doute, diminue l'utilité pratique de la thèse de la constructibilité, mais ne diminue pas sa valeur théorique.

La non-contradiction est pour les intuitionnistes un *attribut* qui découle de l'existence, tandis que la non-contradiction à elle seule est tout au plus un jeu illimité avec des choses qui pourraient n'être que des fictions. Le manque de contradiction garantirait aussi peu l'existence que le manque de preuve l'innocence d'un accusé. Pour cette raison aussi on se refuse à admettre l'énoncé purement existenciel de l'axiome du choix parce que dépourvu de sens, et cela indépendamment de la question de la compatibilité de cet axiome avec les autres ¹.

L'intuition primitive de la suite des nombres se ramène à une *bi-section de l'unité* conçue comme indéfiniment continuable, procédé dont la signification fondamentale a été soulignée jadis par PLATON. Elle ne permet pas, il est vrai, d'affirmer l'existence de la *totalité* des nombres naturels. Cette dernière est pour BROUWER plutôt un domaine ouvert dans lequel le *tertium non datur* n'est pas admissible, et cette totalité de son côté ne peut pas être traitée en objet mathématique. Le procédé de bi-section permet cependant la construction inductive de chaque nombre naturel ou la descente par récurrence d'un nombre quelconque vers l'unité. En accord avec cette intuition primitive c'est le temps ² qui devient en quelque sorte le substratum

considère les nombres complexes ordinaires et la géométrie d'Euclide comme constructivement déduits, tandis qu'il déclare que les nombres complexes d'ordre supérieur et les géométries non-euclidiennes ne sont que des jeux imaginaires quoique non-contradictaires.

¹ De la littérature récente nous citerons ici une conférence de BROUWER, « Mathematik, Wissenschaft und Sprache », voir *Monatshefte Math. Phys.* **36**, p. 153-164 (1929) (et aussi « Die Struktur des Kontinuums », Wien, 1930), et en plus R. WAVRE dans les *Archives Soc. Belge Philos.* **5**, fasc. 1 (1933).

² Le temps intervient dans le système néointuitionniste encore dans un autre sens et d'une façon qui est étrangère aux mathématiques classiques : dans le sens de la *dépendance à l'égard du temps des jugements mathématiques*. Dans l'étude du rôle du *tertium non datur* interviennent d'une façon essentielle certaines « propositions tierces » qui remplissent l'intervalle entre une proposition générale et la présentation d'exemples opposés réfutant cette proposition. (Ainsi, si $P(n)$ désigne une certaine propriété des nombres naturels n , elles s'intercalent entre les deux propositions suivantes : « tous les nombres naturels ont la propriété P » et « n_0 est un nombre naturel de la propriété non- P ».) Ces propositions tierces ne sont valables, comme BROUWER le remarque lui-même, que temporairement. Si leur élimination survient par une solution réussie du problème en question, on pourra citer d'autres propositions tierces, et le néointuitionnisme se contente de cette situation.

de la notion d'existence mathématique dans le néointuitionnisme. Le temps pris comme « phénomène fondamental de l'intellect » permet à un moment de vie de discerner entre deux choses qualitativement différentes, le passé et l'avenir (« division d'un moment de vie »). A cette bi-section est jointe — d'ailleurs en accord inconscient avec les idées d'Emile MEYERSON — la possibilité d'une identification de différentes suites (« procédé causal »). De cette façon BROUWER arrive à l'énoncé un peu paradoxal : Les considérations mathématiques se réalisent comme un acte de volonté servant l'instinct de conservation de l'homme particulier ; elles se font en deux phases, celle de l'attitude temporelle et celle de l'attitude causale.

Le phénoménologue Oskar BECKER pousse plus loin ces considérations sur l'existence dans les mathématiques et leur donne, dans le livre précité « *Mathematische Existenz* », les fondements philosophiques en accentuant leur signification anthropologique. L'homme, ou plutôt l'existence effective de l'homme, forment le centre des problèmes philosophiques. Ainsi, d'après BECKER, la vie effective de l'homme est le « fondement ontique » des mathématiques, contrairement à la conception « absolue » (approfondie par HUSSERL, le créateur de la phénoménologie) d'après laquelle le monde est un univers de l'existence en soi et l'homme n'est qu'un membre dans la gradation immense des êtres en général. La mise en rapport du problème du continu (voir plus bas) avec la mortalité de l'homme n'est qu'une conséquence de cette doctrine anthropologique. En général, les mathématiques qui ont la prétention de parvenir à des connaissances indépendantes du temps, seraient un moyen pour regagner l'état naturel qui ne connaît pas la mort et qui a disparu à cause de la conscience de soi-même ; elles seraient, en fin de compte, un trait primitif, archaïque dans l'existence historique.

Un emploi si illimité de l'anthropologisme en mathématiques, emploi qui, à vrai dire, conviendrait mieux à d'autres sciences, a évidemment fait surgir des oppositions chez les philosophes. Parmi eux CASSIRER¹ est à citer en premier lieu ; HUSSERL

¹ Philosophie der symbolischen Formen. III. Teil: Phaenomenologie der Erkenntnis. Berlin, 1929. Voir aussi : M. GEIGER dans *Götting. Gel. Anzeigen*, 1928, 401-419, et K. REIDEMEISTER dans *Philos. Anzeiger* 3, 15-47 (1929).

lui-même a souligné franchement son opposition et s'est joint à l'attitude réaliste de son grand prédécesseur BOLZANO pour affirmer que l'existence mathématique se réduit à la non-contradiction¹. C'est dans une parole de DEDEKIND, connue seulement depuis peu de temps, qu'on trouvera la thèse la plus opposée à la conception anthropologique: nous sommes du genre divin; par cette phrase il déclare que les actes scientifiques qui forment des notions ont une force créatrice supérieure à toute constructibilité. C'est d'ailleurs dans un sens profond le parallèle du « *ἀεὶ ὁ Θεὸς ἀριθμητικίζει* » de PLATON. Tandis que pour l'école logisticienne de Vienne toutes les propositions de la logique et de la mathématique sont tautologiques, et ce n'est que la limitation de l'esprit humain qui nous empêche de les embrasser toutes en même temps et de les considérer seulement comme *changeant la forme* des expressions de la connaissance sans *créer* des connaissances nouvelles; et c'est le regretté H. HAHN, le porte-parole de cette école, qui peut dire, en opposition extérieurement diamétrale au point de vue de PLATON: « Dieu ne fait jamais des mathématiques ». Ch. HERMITE était un partisan particulièrement fervent de la conception réaliste et il en est de même, parmi les mathématiciens illustres contemporains, de G. H. HARDY². Par contre, E. BOREL s'approche beaucoup de l'anthropologisme de BECKER, par exemple en liant la possibilité de définir des nombres suffisamment grands à la durée limitée de vie de l'Univers et par suite de la vie organique d'une part, à la théorie des quanta et au caractère discontinu de nos fonctions cérébrales³ de l'autre. Cette pensée s'accorde avec l'assertion fameuse de POINCARÉ (dont, d'ailleurs, la position entre les deux camps a varié en quelque façon): Quand je parle de tous les nombres entiers, je veux dire tous les nombres entiers qu'on a inventés et tous ceux que l'on pourra inventer un jour... et c'est ce « l'on pourra » qui est l'infini.

C'est le mot « inventer » qui est caractéristique dans ce propos. Car la question débattue ici pourrait aussi s'exprimer par l'alter-

¹ Formale und transcendente Logik. Halle, 1929 (voir cependant l'annexe III de cet ouvrage).

² Voir *Mind*, N. S. **38**, 1-25 (1929).

³ Voir un propos de N. LUSIN dans les *Fundamenta Math.* **16**, 51 (1930); cf. *ibidem* **21**, 114-126 (1933).

native suivante: Est-ce que le mathématicien *invente* ses objets et propositions ou est-ce qu'il les *découvre*? Il invente suivant les idéalistes, il découvre suivant les réalistes. E. T. BELL a fait dernièrement une expérience intéressante dans cette direction¹. Il a posé, au sujet des théorèmes de la géométrie élémentaire, la question précédente à environ 300 étudiants; les étudiants des sciences physiques et naturelles et les techniciens répondirent presque tous « le mathématicien invente », tandis que les mathématiciens purs se déclarèrent pour la « découverte ». Si les objets mathématiques préexistent aux efforts des mathématiciens, comme l'Amérique à la découverte de Christophe Colomb, alors la description axiomatique de ces objets est efficace et suffisante pour les caractériser d'une manière univoque, même si elle n'aide pas à obtenir une construction ou une reconstruction (création d'un modèle). Une image peut être ici utile: chaque bout de ficelle dans un peloton désespérément embrouillé devient parfaitement accessible au contrôle après une description complète du parcours du peloton, même si l'on n'arrive pas à le débrouiller et à le dénouer, c'est-à-dire à isoler constructivement les bouts particuliers.

II. APPLICATION A LA NOTION DU CONTINU.

C'est peut-être le plus ancien et en même temps le plus important des problèmes que posent les fondements des mathématiques que de construire un pont au-dessus du précipice qui s'étend entre deux natures: d'une part la nature *discrète, qualitative, combinatoire, individuelle* de l'*arithmétique* et surtout de la suite des nombres naturels (région du dénombrement), et d'autre part la nature *cohérente, quantitative, homogène* du *continu* géométrique et analytique, par exemple de la totalité des nombres réels (région de la mesure)². Ce problème fonda-

¹ Voir *Scientific Monthly* **32**, 193-209 (1931).

² Voir p. ex. H. FREUDENTHAL dans *Euclides* **8**, 89-98 (1932), puis le recueil « Continu et Discontinu » (par CHEVALIER, CARLHEINC, etc.): *Cahiers de la nouvelle journée*, N° 15 (Paris, 1929) dans lequel on traite aussi des relations de notre problème aux sciences naturelles et à la théorie de la connaissance. Un historique de cet antagonisme se trouve dans la conférence de H. WEYL: *Die Stufen des Kontinuums* (Jena, 1931), laquelle me paraît cependant contestable sous certains rapports.

mental est à la base des paradoxes connus de Zénon d'Elée et de certains sophistes. Malgré les efforts des sciences philosophiques, mathématiques et aussi théologiques nous n'y avons guère avancé pendant plus de deux mille ans. En tout cas nous sommes très loin d'avoir construit un pont satisfaisant entre les nombres, qui représentent des individus aux propriétés caractéristiques pour chacun d'eux, et les points uniformément répartis dans la « bouillie » fluide du continu.

Si l'on peut en général (mais non pas sans exception) attribuer à l'antiquité la tendance à concevoir les notions et faits combinatoires sous le jour de l'analyse, c'est cependant la tendance opposée, celle de l'arithmétisation de l'analyse et de la géométrie, qui règne dans les mathématiques modernes. Cette dernière s'est manifestée bien avant que la lutte autour des fondements se soit enflammée à nouveau au début de ce siècle. Dans cette direction-là, le pas le plus décisif a été fait par WEYL (1918-20) dans sa première théorie du continu (du continu « atomistique »). Là WEYL développe également sa doctrine dans le sens du postulat « existence = constructibilité ». Le caractère très conséquent de cette théorie en trace les limites. Cette théorie prend — en refusant l'intuition géométrique — comme donnée initiale le système des nombres rationnels et indique une suite de procédés bien définis de construction qui aboutissent aux éléments admissibles du continu, ayant une raison d'être, donc à certains nombres réels. Le continu composé de ces éléments et d'eux seulement, porte le nom du continu « atomistique » parce qu'il consiste en points isolés, non cohérents au sens mathématique (quoique denses sur tout intervalle, donc cohérents au sens de l'intuition ordinaire, comme la totalité des points rationnels). Evidemment WEYL ne peut plus s'imaginer, comme DÉMOCRITE et les anciens atomistes, qu'il épuise au moyen de ce « continu discontinu » le continu homogène donné intuitivement. Ayant désespéré des essais d'arriver à une arithmétisation constructive du continu intuitif, WEYL met à sa place son continu (plus étroit, mais constructivement concevable et « défini en extension ») « qui extrait de la bouillie fluide du continu intuitif une multitude (dense) de gouttes atomiques ».

H. WEYL reconnaît avec BROUWER que la totalité des nombres

réels ne peut pas être construite d'une manière purement arithmétique — idée que l'on retrouve dans les écrits de HÖLDER qui remontent à 40 ans. Cependant BROUWER ne se contente pas d'un pseudo-continu atomistique et introduit à la place des points des « suites de choix », dans le sens d'une continuation indéfinie et arbitraire du procédé de bi-section de chaque intervalle partiel du continu. WEYL aussi s'est rallié plus tard à ce point de vue. Sauf les cas exceptionnels où l'on peut *construire* des points (classe qui comprend par exemple tous les nombres algébriques), la suite de choix se forme d'une manière non-constructive. Pour cette raison et aussi à cause de l'écoulement du temps — auquel, d'après l'interprétation néointuitionniste, le devenir d'une suite de choix est essentiellement lié — une suite de choix particulière ne représente pas quelque chose de définitif, seulement un devenir, pas un être. Pour les nombres naturels, au contraire, chaque élément est bien déterminé et c'est la totalité de ces nombres qui n'est pas un être donné et définitif, comme nous l'avons déjà mentionné. Le continu conçu de cette manière est un « milieu de libre devenir »; tant les points construits que les suites de choix en font partie. Mais ce continu n'est *plus composé de points*, il n'est pas — comme dans la théorie de WEIERSTRASS et CANTOR — de son essence de contenir des éléments, mais d'embrasser des parties, encore divisibles sans limite et restant toujours continues.

D'après cela la disjonction « deux points doivent être ou bien coïncidents ou bien distincts » ne s'impose plus; c'est surprenant mais parfaitement conséquent. Il reste un troisième état entre ces deux, la possibilité tierce mentionnée plus haut qui dépend de notre degré de connaissances en ce moment. D'après BROUWER on peut donner un exemple simple d'un couple de points, qui, étant données nos connaissances actuelles, ne peuvent être déclarés ni distincts ni identiques: Soit, dans le développement décimal de π , k le rang décimal où commence, pour la première fois, la suite de chiffres 1 2 3 4 5 6 7 8 9. (Nous ne sommes pas renseignés si un tel k existe.) Définissons ensuite un nombre réel ρ par $\rho = \pi + 10^{-k}$, alors le développement décimal de ρ peut être écrit de proche en proche. En particulier $\rho = \pi$ est vrai si une démonstration générale nous a appris que dans le

développement décimal de π la suite précitée n'apparaîtra jamais. En tout cas ρ est univoquement déterminé, mais on ne peut pas affirmer d'après des principes purement constructifs que ρ est ou bien différent de π (car il faudrait avoir trouvé le nombre k) ou bien égal à π (ce qui exigerait que la démonstration générale mentionnée soit donnée). Le *tertium non datur* est automatiquement supprimé parce que les membres de la disjonction ne se correspondent pas comme p et non- p , comme une proposition et sa négation. Le même doute est possible pour chaque proposition générale, parce que la négation d'une proposition générale (« tous les p sont q ») représente une proposition purement existentielle. Cette négation est, de ce fait, dépourvue de sens pour l'intuitionnisme qui limite l'existence à la construction.

Le problème de la nature du continu se présente sous une forme complètement différente au point de vue axiomatique. Ici la non-contradiction garantit l'existence; en plus, il semble permis de se référer à un fond absolu d'idées platoniciennes tant que la démonstration de la non-contradiction n'est pas fournie — comme, par exemple, pour le continu. Ayant accepté cette attitude GEORG CANTOR a pu donner la première description *exhaustive* du continu linéaire en se servant de la relation d'ordre. Il le décrit comme un ensemble parfait dans lequel un sous-ensemble dénombrable est dense. Cette nouvelle attitude ressort plus explicitement encore si l'on fait abstraction de l'ordre. On considère alors le continu (qui est facile à mettre en rapport avec la totalité de tous les *ensembles possibles de nombres naturels*) comme l'ensemble $U = \mathfrak{U} N$ de tous les sous-ensembles d'un ensemble dénombrable, par exemple de l'ensemble N des nombres naturels. Or, on ne peut *construire* qu'une infinité dénombrable de sous-ensembles de N ; et ce serait un retour au continu atomistique de vouloir se restreindre à cela. Mais nous arriverons sans difficulté à l'ensemble non dénombrable désiré en considérant l'ensemble dénombrable N et ses sous-ensembles comme préexistants, comme des objets achevés et donnés et indépendants de toutes les opérations qu'on aurait pu leur faire subir (ou bien en employant l'axiome de réductibilité de RUSSELL qui produit le même effet). La méthode

diagonale de CANTOR — qui, chose surprenante, a fait dernièrement l'objet d'investigations très critiques ¹ — est alors soustraite à toutes les objections et nous garantit que notre continu est vraiment plus que dénombrable. Nous sommes de même sûrs que la formation de certains sous-ensembles de U ne pourra modifier les éléments de U par exemple, c'est-à-dire les sous-ensembles de N , et l'on échappe aux circonstances fâcheuses qui se sont révélées dans le paradoxe de RICHARD. Une telle influence est exclue, même si l'on emploie un sous-ensemble de U — ou encore U lui-même — pour déterminer un élément de U qui est peut-être un élément du sous-ensemble en question. De telles définitions non-prédicatives n'ont pas lieu de nous inquiéter, parce que l'élément en question ne doit pas son existence à notre détermination, mais existe indépendamment de la manière particulière de l'introduire. Il ne s'agit donc pas d'une *construction*, qui évidemment devrait être prédicative, mais d'une *description* et celle-ci peut être faite univoquement même par une détermination non-prédicative.

Enfin, ce point de vue nous conduit à faire mention de l'attitude moyenne de POINCARÉ, auquel nous devons d'avoir insisté sur les particularités des définitions non-prédicatives. POINCARÉ ² fait un bout important du chemin avec CANTOR; il donne lui-même (1909) une modification remarquable de la méthode diagonale de CANTOR et insiste d'une façon convaincante sur la différence essentielle des classifications d'une part dans ce procédé diagonal et de l'autre dans le paradoxe de RICHARD, qui paraît si semblable. POINCARÉ, on le sait, soutenait la thèse « existence = non-contradiction »; malgré cela dans l'alternative « découverte ou invention des objets mathématiques » il était entièrement du côté de l'invention et ne pouvait

¹ P. ex. A. F. BENTLEY, *Linguistic analysis of mathematics* (Bloomington Ind., 1932); P. W. BRIDGMAN, *A physicist's second reaction to Mengenlehre*, dans *Scripta Mathem.* 2, 101-117 et 224-234 (1934). Cf. mon article dans le Vol. 25 des *Fundamenta Mathematicæ*.

² POINCARÉ était d'ailleurs un des premiers qui ait appliqué les découvertes de CANTOR sur la théorie des ensembles à des problèmes de la théorie des fonctions. (Ce qui est remarquable étant donné ses attaques ultérieures contre le « Cantorisme » et l'infini actuel en général.) Il a même traduit en français une série de mémoires de CANTOR pour les *Acta Mathematica*; voir ma biographie de GEORG CANTOR, *Jahresb. Deutschen Math. Ver.* 39, 189-266 (1930; paru aussi séparément: Leipzig u. Berlin, 1930), p. 208.

pas, pour cette raison, attribuer sans autres l'existence aux objets déterminés non-prédicativement. Il faut, par exemple, prévoir la possibilité que d'un sous-ensemble de U que l'on vient de former découlent des nouveaux éléments de U qui auparavant n'étaient pas connus, ou, comme le faisait remarquer POINCARÉ, qu'à l'intérieur du domaine de nos objets mathématiques, domaine irréprochablement délimité par les axiomes et assuré contre les contradictions extérieures, paraissent des objets nouveaux et même suspects d'antinomie et cela à cause de nos propres procédés non-constructifs de formation d'ensembles. Le danger se trouve surtout dans l'enlacement des procédés, dont l'un définit des sous-ensembles particuliers par l'indication d'une propriété caractéristique, tandis que l'autre forme l'ensemble de tous les sous-ensembles.

Malgré cette divergence des points de vue mentionnés sur l'existence dans les mathématiques et malgré la fameuse parole pessimiste de POINCARÉ¹ à cet égard, je n'irai pas si loin que M. J. HADAMARD. Pour lui une entente réciproque au sujet de certains énoncés mathématiques, inaccessibles à une vérification, semble être aussi improbable que l'entente d'un homme à vue normale et d'un daltonien (ignorant son infirmité) qui, laissés sur une île déserte, discutent de l'influence des longueurs d'onde lumineuse sur les sensations de couleur dans l'œil². Quand HADAMARD se prononçait dans ce sens la situation était vraiment critique et, au surplus, aggravée par la véhémence, avec laquelle les partis en lutte augmentaient encore leur distance. Mais ces dernières années on a pu, heureusement, constater un progrès important. Ce n'est pas, il est vrai, dans un changement de *points de vue* qu'il se manifeste, mais dans le sens d'une *compréhension* mutuelle, quoique trop unilatérale encore, des attitudes opposées et une plus juste appréciation de leurs causes. Ainsi des essais pleins de succès ont été faits de différents côtés visant à incorporer le système néointuitionniste dans les mathématiques classiques, à déterminer sa fonc-

¹ Voir « Dernières pensées » (Paris, 1926), p. 161.

² Préface à « Les fondements des mathématiques » de F. GONSETH (Paris, 1926).

tion et à apprécier son rôle dans cet ensemble ¹, essais facilités par les travaux précieux de HEYTING ².

Et je voudrais terminer par le souhait que des travaux de cette tendance continuent à paraître et contribuent à l'entente mutuelle dans ce domaine de la Logique mathématique.

SUR L'AXIOME DU CHOIX ³

PAR

A. FRAENKEL (Jérusalem).

Les discussions sur l'axiome du choix durent depuis plus de 30 ans, son énoncé ayant été formulé pour la première fois sous forme d'un principe spécial par M. Beppo LEVI en 1902 ⁴ et utilisé en 1904 par M. Ernst ZERMELO (d'après une suggestion de M. Erh. SCHMIDT) comme base de démonstration du théorème sur le bon ordre. Les uns contestent en général la possibilité d'attribuer un sens à cet énoncé, comme je l'ai expliqué hier dans ma conférence sur la notion d'existence en mathématique. Un second groupe voit dans ce principe une proposition ayant un sens mais indémontrée et même indémontrable. Cette proposition ne peut servir comme moyen de démonstra-

¹ Voir entre autres Menger, *loc. cit.*; V. GLIVENKO dans *Acad. R. Belgique, Bull. Cl. Sc.* (5) **14**, 225-228, et **15**, 183-188 (1928/9); A. KOLMOGOROFF dans *Math. Ztschr.* **35**, 58-65 (1932); K. GÖDEL dans *Anzeiger Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl.*, 1932, 65-66, et *Ergebn. Math. Kolloq.* (Menger) **4**, 9-10 et 39-40 (1933); puis les travaux de LUKASIEWICZ et d'autres traitant de la logique plurivalente.

² *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, 1930, 42-71 et 158-169; voir aussi *Erkenntnis* **2**, 106-115 et 135-151 (1931) et *Verh. Intern. Math. Kongress Zürich* 1932, II, 344-345 (1933).

³ Conférences faites les 20 et 21 juin 1934 dans le cycle des Conférences internationales des Sciences mathématiques organisées par l'Université de Genève; série consacrée à la Logique mathématique.

J'exprime mes vifs remerciements à M. B. AMIRA (Jérusalem) qui a bien voulu se charger de la rédaction française de ce mémoire.

⁴ Pour les écrits parus jusqu'à 1928, voir la troisième édition de mon « *Einleitung in die Mengenlehre* » (Berlin, 1928).