4. — L'analogie avec les courbes algébriques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

conserve le caractère des domaines canoniques. C'est la seule, d'ailleurs, qui jouisse de cette propriété; elle dépend de trois paramètres complexes, donc six réels, ce qui donne de nouveau $3p - 3$ paramètres réels et le même nombre de conditions pour que deux domaines soient représentables l'un sur l'autre.

Ce nombre évoque à lui seul la théorie des courbes algébriques.

4. — L'analogie avec les courbes algébriques.

L'analogie entre les domaines de genre p et les courbes algébriques de genre p fut aperçue par Schottky dans son mémoire fondamental paru au tome 83 du *Journal de Crelle*. Cette analogie est très profonde. A cette époque, on savait seulement, par des exemples relatifs aux domaines de genre 1, qu'il n'était pas toujours possible, comme nous l'avons dit, d'effectuer la représentation sur un anneau circulaire donné. Il fallait que le rapport des rayons fût convenable et dans la discussion intervenait le module K^2 des fonctions elliptiques. (On sait, d'autre part, que les fonctions elliptiques permettent d'exprimer les coordonnées des courbes de genre 1 en fonctions uniformes d'un paramètre.)

Appelons alors classe de courbes algébriques l'ensemble des courbes algébriques dont les points peuvent être mis en correspondance rationnelle bi-univoque. Les courbes et les transformations envisagées ici sont celles définies seulement par des équations à coefficients réels. Si les courbes sont de *genre* p, une telle classe, dite de genre p, dépend de $3p - 3$ paramètres, dès que $p > 1$. Schottky montre alors qu'à toute aire de genre p, donc limitée par $p + 1$ contours, est associée une classe de genre p. Réciproquement, à toute classe réelle de genre p correspondent des domaines d de genre p. Et pour que deux domaines soient représentables l'un sur l'autre, il *faut* et il *suffit* que les classes de courbes algébriques qui leur correspondent soient identiques.

Schottky procède par un moyen qui paraît tout d'abord détourné. Il envisage la classe des fonctions $K(z)$ méromorphes dans le domaine donné d et sur sa frontière, réelles sur cette frontière. Toutes ces $K(z)$ sont alors des fonctions rationnelles à coefficients réels de deux d'entre elles $r(z)$ et $s(z)$

$$K = \varphi(r, s) .$$

Les deux fonctions r et s sont alors liées par une équation algébrique à coefficients réels de genre p: $A(r, s) = 0$. (On sait que p est le nombre des intégrales abéliennes de première espèce associées à la courbe algébrique envisagée.) Ce résultat est-il surprenant ? Non !

Soit en effet $r(z)$ l'une des fonctions $K(z)$. Lorsque z décrit d, $r(z)$ décrit une surface de Riemann R_0 limitée par $p + 1$ contours *situés sur l'axe réel* (puisque ces contours correspondent aux contours limitant d, sur lesquels r est réel). La surface R'_0 symétrique de R_0 par rapport à l'axe réel (surface décrite par $\overline{r(z)}$ — imaginaire conjuguée de $r(z)$ — lorsque r décrit d) peut être soudée à R_0 le long de ces $p + 1$ courbes et l'on obtient ainsi une surface de Riemann fermée de genre p. Cette surface R est l'image du domaine d pris avec ses deux faces: R_0 correspondant à l'une des faces, R'_0 à l'autre; le domaine d ainsi considéré est bien une surface fermée de genre p: on peut en effet l'obtenir en aplatissant une surface fermée à p trous. A la classe des fonctions $K(z)$ correspond alors la classe des fonctions de r uniformes et méromorphes sur R et réelles sur les lignes de soudure de R_0 avec R'_0 et grâce à cette correspondance, les résultats de Schottky se rattachent directement aux théorèmes de Riemann sur les fonctions algébriques.

5. — La représentation conforme non biunivoque et l'uniformisation suivant Poincaré.

Soit $F(z)$ une fonction définie dans un domaine d de genre p fini ou non. Elle sera supposée holomorphe ou au plus méromorphe dans d, mais elle sera, en général, multiforme, ce qui est fort possible puisque ce domaine est à connexions multiples. Considérons alors un point z de d et joignons-le à un point O quelconque par un chemin tout entier dans d. Deux chemins