2. — La connexion d'ordre n.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

dépendait de trois paramètres réels arbitraires dont on peut disposer pour que deux points donnés et deux directions données issues de ces points se correspondent.

Il est évident que la correspondance entre *d* et D sera établie si l'on peut représenter conformément chacun des deux domaines sur une aire canonique particulière, un cercle par exemple, et c'est ce que fait Riemann. Cette méthode de réduction du problème est générale en mathématique, elle intervient dans l'étude des transformations les plus générales, en géométrie, en algèbre et en arithmétique.

Postérieurement à Riemann, on s'est aperçu qu'il y avait lieu d'étudier des domaines pour lesquels la frontière n'était pas une courbe régulière. Le dernier en date des résultats importants obtenus dans cette direction est le suivant:

Toute aire simplement connexe dont la frontière contient plus d'un point peut être représentée conformément sur le cercle unité et l'on dispose encore, comme dans le cas précédent, de trois paramètres arbitraires.

2. — La connexion d'ordre *n*.

Mais pour aller plus loin, il importe de définir l'*ordre de connexion* d'un domaine. Je supposerai connu le langage de la théorie des ensembles.

Un domaine est un ensemble de points, tous intérieurs tels que deux quelconques d'entre eux puissent être reliés par une courbe de Jordan contenue elle-même dans le domaine.

La frontière peut se composer de *n* continus séparés. Dans ce cas, *l'ordre de connexion est* n. Un continu frontière peut, dans certains cas, se réduire à un seul point. On dira alors qu'il est dégénéré. Si un domaine n'a pas de point frontière, son ordre de connexion est nul. S'il est limité par une seule courbe fermée, il est dit simplement connexe. C'est le cas envisagé par Riemann. Un cercle dont on retranche le centre forme un domaine d'ordre 2, dont une frontière, à savoir le centre, est dégénérée; un cercle dont on retranche p cercles intérieurs sans point commun, est un domaine d'ordre $p + 1$. L'ordre peut être infini. A côté de cette notion d'ordre n, nous avons le *genre*, c'est le *nombre* n — 1. Au point de vue topologique, le genre s'interprète directement comme suit: c'est le nombre maximum de coupures que l'on peut pratiquer dans le domaine sans le morceler. Ces coupures sont des courbes joignant un point frontière à un autre et dont tous les points sont intérieurs au domaine. Un cercle est de

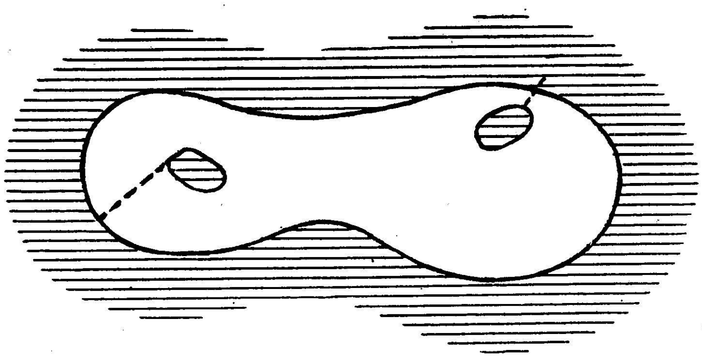

Fig. 2.

Domaine de genre 2, d'ordre de connexion 3.

genre 0, car toute coupure le morcellerait. Un cercle moins le centre est de genre 1, car un rayon ne le morcelle pas. Donc, si je puis faire n coupures qui ne morcellent pas un domaine, tandis que $n + 1$ coupures le morcelleraient quelles qu'elles soient, son genre est n. Le genre ainsi défini est en rapport, comme nous le verrons, avec le genre d'une courbe algébrique.

Dans un domaine d'ordre 1, toute courbe fermée peut être réduite à un point par déformation continue et sans sortir du domaine. C'est impossible si la connexion est d'ordre supérieur. Si l'on effectue n coupures convenables dans un domaine d'ordre $n + 1$, ce domaine devient simplement connexe.

Deux aires ne pourront être mises en correspondance conforme que si leur ordre de connexion est le même. En effet, les fonctions f et φ qui effectuent la correspondance étant holomorphes et jouissant de la propriété de continuité jusque sur les frontières, à un point frontière de l'un des domaines correspond un point frontière de l'autre et le nombre des continus séparés dont elles se composent est forcément le même. Mais cette condition n'est pas suffisante et un domaine limité par deux courbes fermées, dont l'une est intérieure à l'autre, n'est pas toujours représentable sur un anneau circulaire déterminé; il faut pour cela que le rapport des rayons des circonférences soit convenable.

C'est là une différence essentielle, dans la théorie de la représentation conforme, entre les domaines d'ordre 1 et ceux d'ordre supérieur.

3. — Description des domaines canoniques.

Schottky[1], inspiré par l'idée des domaines canoniques, introduit des aires d'un type simple et de connexion n. Ainsi on pourra classer les domaines d'ordre p suivant les propriétés des aires canoniques qui leur servent d'images. Deux domaines seront de la même classe s'ils peuvent être représentés sur le même domaine canonique et dans ce cas, comme on l'a vu, ils peuvent être représentés conformément l'un sur l'autre. Les aires canoniques multiplement connexes jouent ici un rôle encore plus fondamental que le cercle pour le problème de *Riemann*, puisque leur détermination complète permet de répartir en classes distinctes les domaines qui peuvent être mis en correspondance conforme.

Pour simplifier, nous supposerons les frontières non dégénérées et le domaine donné tout entier à distance finie.

Dans ces conditions, M. Koebe, poursuivant une idée de Schottky, a montré qu'un domaine limité par $p+1$ contours fermés $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p$ se laisse représenter sur une aire limitée par deux circonférences concentriques et $p-1$ arcs de circonférence situés dans la couronne limitée par les deux courbes précédentes et de même centre; ces arcs seront parcourus une fois dans chaque sens lorsque l'on décrit les courbes c_i qui leur correspondent. La circonférence extérieure correspond à la courbe qui contient toutes les autres et la circonférence intérieure à l'une quelconque des autres courbes. Cette dernière condition, comme celle d'être à distance finie, n'a rien d'essentiel car on sait qu'une substitution

$$z' = \frac{1}{z - z_0}$$

[1] Pour la bibliographie, voir G. Julia, *Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes*, Gauthier-Villars, 1934.