LIGNES ASYMPTOTIQUES ET ÉQUATION DE LA CHALEUR

Autor(en): **Guigue, René**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26000

LIGNES ASYMPTOTIQUES ET ÉQUATION DE LA CHALEUR

PAR

René GUIGUE (Bonneville, Haute-Savoie).

I. — SUR LES ÉQUATIONS DU TYPE PARABOLIQUE RÉDUCTIBLES À L'ÉQUATION DE LA CHALEUR.

1. — Parmi les équations aux dérivées partielles du second ordre du type parabolique il en est une dont l'importance est capitale car elle intervient dans de nombreux problèmes. C'est l'équation dite de la chaleur

$$t = p \ . \tag{1}$$

Considérons d'abord une équation de la forme

$$r - 2\lambda s + \lambda^2 t + ap + bq + cz + d = 0 \ , \tag{2}$$

où λ, a, b, c, d sont des fonctions des seules variables x et y. On sait[1] que par un premier changement de variables convenablement choisi on peut ramener cette équation à la forme

$$t + f(x\,,\,y)\,p = 0 \tag{3}$$

(je remets x et y à la place des nouvelles variables). Il me suffira donc de considérer des équations (2) déjà mises sous la forme (3).

Ceci étant admis, je vais examiner les possibilités de ramener une équation (3) à l'équation (1) par un simple changement de variables.

---

[1] Voir GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, p. 152 ou DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, p. 194.

Un premier cas très simple où cela peut se faire est celui où la fonction $f(x, y)$ ne dépend que de x seul, $f(x, y) = \mathrm{X}$. On constate sans difficulté qu'en conservant la variable y et en remplaçant la variable x par x' tel que

$$x' = -\int \frac{dx}{\mathrm{X}}, \tag{4}$$

l'équation

$$t + \mathrm{X}p = 0$$

s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x'} .$$

On a à effectuer un changement de variables de ce genre quand on cherche les surfaces qui admettent un système d'asymptotiques situées sur des cylindres circulaires de même axe *oz*. En coordonnées cylindriques on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial z}{\partial r} = 0 ,$$

qui s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial z}{\partial u} ,$$

si l'on pose $u = -\log r$.

Ce résultat est dû à Bianchi. On pourra consulter à ce sujet un article de M. A. Buhl (Lignes asymptotiques et lignes de courbure, *Journal de Mathématiques*, 1929, p. 59).

2. — Prenons maintenant le cas général où la fonction $f(x, y)$ dépend à la fois de x et y et efforçons-nous de le ramener au précédent.

Soient

$$x' = \lambda(x, y) , \qquad y' = \mu(x, y)$$

les équations qui définissent le changement de variables. On a alors

$$p = \lambda_x \frac{\partial z}{\partial x'} + \mu_x \frac{\partial z}{\partial y'} , \qquad q = \lambda_y \frac{\partial z}{\partial x'} + \mu_y \frac{\partial z}{\partial y'} ,$$

$$t = \lambda_{yy} \frac{\partial z}{\partial x'} + \mu_{yy} \frac{\partial z}{\partial y'} + \lambda_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + 2\lambda_y \mu_y \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} + \mu_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} .$$

L'équation (3) devient

$$\lambda_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + 2\lambda_y \mu_y \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} + \mu_y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial z}{\partial x'} + \mu_{yy} \frac{\partial z}{\partial y'} + \\ + f\lambda_x \frac{\partial z}{\partial x'} + f\mu_x \frac{\partial z}{\partial y'} = 0 .$$

On veut que cette équation ait la forme:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} + X_1 \frac{\partial z}{\partial x'} = 0 ,$$

où X_1 ne dépendra que de x' seul.

Ceci exige d'abord que λ_y soit nul, ce qui entraîne la disparation des premier, deuxième, quatrième termes du premier membre; λ sera donc fonction de x seul, et en particulier on pourra conserver la variable x.

L'équation s'écrit maintenant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} + \frac{1}{\mu_y^2} (\mu_{yy} + f\mu_x) \frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{\lambda_x}{\mu_y^2} f \frac{\partial z}{\partial x'} = 0 :$$

On fera disparaître le terme en $\frac{\partial z}{\partial y'}$ en prenant pour $\mu(x, y)$ une solution de l'équation (3). Il faudra ensuite que $\frac{\lambda_x}{\mu_y^2} f$ soit fonction de la seule variable x, ce qui se traduit par

$$\frac{f}{\mu_y^2} = \frac{1}{4\,X^2} , \tag{5}$$

en désignant par X une fonction quelconque de x, ou

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{\mu_y^2}\right) = 0 ,$$

ou encore

$$f_y \mu_y - 2f \mu_{yy} = 0 . \tag{5'}$$

La fonction $y' = \mu(x, y)$ doit donc vérifier les équations (3) et (5′). En tenant compte de (3), (5′) s'écrit

$$f_y \mu_y + 2f^2 \mu_x = 0 . \tag{6}$$

3. — *On pourra ramener l'équation* (3)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

à la forme de l'équation classique de la chaleur chaque fois qu'on pourra trouver une intégrale $y' = \mu(x, y)$ *de l'équation du premier ordre* (6) *qui soit en même temps intégrale de l'équation* (3). *Le changement de variable* $y' = \mu(x, y)$ *ramène l'équation* (3) *à une équation de même forme ou le coefficient de* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *est fonction de* x *seul. On procède ensuite comme au paragraphe 1.*

4. — De la considération simultanée des deux équations:

$$\mu_{yy} + f\mu_x = 0\ , \quad \frac{f}{\mu_y^2} = \frac{1}{4X^2}\ ,$$

nous allons déduire une conséquence intéressante. La seconde donne

$$\mu_y = 2Xf^{\frac{1}{2}}\ .$$

L'autre conduit à

$$\mu_x = -Xf^{-\frac{3}{2}}f_y\ .$$

On obtiendra donc la fonction μ par l'équation aux différentielles totales

$$d\mu = (-Xf^{-\frac{3}{2}}f_y)\,dx + (2Xf^{\frac{1}{2}})\,dy\ . \tag{7}$$

Ecrivons que la condition d'intégrabilité est vérifiée, soit

$$X\frac{\partial}{\partial y}(f^{-\frac{3}{2}}f_y) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(Xf^{\frac{1}{2}}\right) = 0\ , \tag{8}$$

ou encore:

$$\frac{2ff_{yy} + 2f^2f_x - 3f_y^2}{f^3} = \frac{2X'}{X} = \text{fonct. de } x \text{ seul}\ . \tag{8'}$$

En résumé pour que l'équation (3) *puisse être ramenée à l'équation de la chaleur, il faut que la fonction* f (x, y) *soit telle que l'expression*

$$\frac{2ff_{yy} + 2f^2 f_x - 3f_y^2}{f^3}$$

ne dépende que de la seule variable x.

La condition précédente peut être mise sous une forme plus remarquable si l'on observe, comme le montre un calcul facile, que la condition d'intégrabilité (8) peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(Xf^{-\frac{1}{2}}\right) + f\frac{\partial}{\partial x}\left(Xf^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 . \tag{9}$$

D'où l'énoncé suivant:

On saura ramener l'équation (3) *à l'équation de la chaleur chaque fois qu'on connaîtra une fonction* X *de* x *telle que* $Xf^{-\frac{1}{2}}$ *soit solution de l'équation* (3).

II. — Applications.

5. — Première application. — *Comment faut-il choisir les fonctions* X *et* X_1 *de* x *pour que l'équation*

$$t + \frac{X}{(Xy + X_1)^2}p = 0 \tag{10}$$

soit réductible à l'équation t = p *par un changement de variables ?*

L'équation (6) s'écrit ici:

$$p - (Xy + X_1)q = 0 .$$

Pour obtenir l'intégrale de cette équation on est amené à considérer l'équation différentielle linéaire

$$\frac{dy}{dx} + Xy + X_1 = 0$$

dont l'intégrale générale résolue par rapport à la constante u s'écrit, comme on le sait:

$$u = \int X_1 e^{\int X dx} dx + y e^{\int X dx} .$$

Nous prendrons donc y' sous la forme

$$y' = \mu(u) = \mu\left(\int X_1 e^{\int X dx} dx + y e^{\int X dx}\right) .$$

Ecrivons que cette fonction y' vérifie l'équation donnée (10). On devra avoir:

$$\mu'' + \frac{X}{(Xy + X_1) e^{\int X dx}} \mu' = 0 .$$

Pour qu'on ait affaire à une équation différentielle entre μ et u, il faut que le coefficient de μ' soit fonction de u, ce que l'on peut aussi bien écrire

$$y e^{\int X dx} + \int X_1 e^{\int X dx} dx = F\left(\frac{(Xy + X_1) e^{\int X dx}}{X}\right) . \qquad (11)$$

Constatons tout de suite que ceci a lieu quand X_1 est identiquement nul. Nous pouvons donc affirmer que *les équations de la forme* $t + \frac{1}{Xy^2} p = 0$, *ou ce qui revient au même, de la forme*

$$t + \frac{X}{y^2} p = 0 , \qquad (12)$$

où X *désigne une fonction quelconque de* x, *peuvent se ramener à l'équation de la chaleur.*

Supposons maintenant que X_1 ne soit pas identiquement nul. Si on dérive (11) par rapport à y on a

$$e^{\int X dx} = e^{\int X dx} F' , \qquad \text{d'où} \quad F' = 1$$

et (11) s'écrit donc

$$y e^{\int X dx} + \int X_1 e^{\int X dx} dx = \frac{(Xy + X_1) e^{\int X dx}}{X} + a ,$$

a désignant une constante arbitraire, ou encore

$$\mathrm{X} \int \mathrm{X}_1 e^{\int \mathrm{X} dx} dx = \mathrm{X}_1 e^{\int \mathrm{X} dx} + a\mathrm{X} .$$

En dérivant par rapport à x on obtient

$$\mathrm{X}' \int \mathrm{X}_1 e^{\int \mathrm{X} dx} dx = \mathrm{X}_1' e^{\int \mathrm{X} dx} + a\mathrm{X}' .$$

Si l'on divise membre à membre ces deux dernières relations on a

$$\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{X}_1'}{\mathrm{X}_1} ,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{X}_1 = k\mathrm{X} ,$$

k étant une constante. L'équation (10) a alors la forme

$$t + \frac{1}{\mathrm{X}(y + k)^2} p = 0 ,$$

qui n'est pas au fond essentiellement différente de celle que nous avait donnée le cas où X_1 était identiquement nul.

Effectuons maintenant la réduction de l'équation

$$t + \frac{\mathrm{X}}{y^2} p = 0 \tag{12}$$

à celle de la chaleur.

On a successivement

$$u = ye^{\int \frac{dx}{\mathrm{X}}} ,$$

$$y' = \log u = \log y + \int \frac{dx}{\mathrm{X}} ; \qquad x' = -\int \frac{dx}{\mathrm{X}} .$$

Parmi les équations (12) il en est une qui présente un certain intérêt historique [1]. C'est l'équation

$$t - \frac{2x}{y^2} p = 0 . \tag{12'}$$

---

[1] Ed. GOURSAT, *Second ordre*, t. I, p. 80.

Cette équation a été étudiée par Ampère qui la déduisait de l'équation

$$(x + q)^2 r + 2(x + q)(y + p)s + (y + p)^2 t + 2(x + q)(y + p) = 0$$

par l'application d'une transformation de contact. Ampère la simplifiait ensuite en posant $y^2 = xe^{y'}$ et obtenait $\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - 2x\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Or c'est précisément à ce changement de la variable y que nous conduit l'application de la formule

$$y' = \log y + \int \frac{dx}{X}\,.$$

Les équations (12) possèdent quelques propriétés intéressantes que nous allons indiquer maintenant.

D'abord un changement de variable portant sur x seul permet d'écrire (12) sous la forme considérée par Ampère (12').

On peut faire entre (12') et l'équation de la chaleur (1), $t = p$, un rapprochement du même genre que celui qu'on fait, quand on étudie les équations différentielles linéaires, entre les équations à coefficients constants et les équations d'Euler. Le changement de variables qui permet de passer de (12') à (1) rappelle celui qui ramène une équation d'Euler à une équation à coefficients constants. On peut faire une remarque analogue en ce qui concerne les intégrales. L'équation de la chaleur admet une solution de forme exponentielle (comme les équations à coefficients constants) tandis que l'équation (12') admet une solution de la forme $x^\alpha y^\beta$ qui rappelle celle des intégrales des équations d'Euler et à partir de laquelle on pourrait évidemment déduire d'autres solutions.

Au point de vue de la généralisation d'une solution particulière de (12') il est encore important d'observer que cette équation admet la transformation $x' = ax$, $y' = a^2 y$ d'où il résulte que si $u(x, y)$ est une solution, il en est de même de $u(ax, a^2 y)$.

6. — Seconde application. — *Soit l'équation*

$$t + \frac{X}{Y} p = 0 \qquad (13)$$

où X *et* Y *sont respectivement fonctions de* x *et* y. *Déterminer toutes les formes de ces fonctions pour que cette équation soit réductible à celle de la chaleur.*

On a ici

$$f(x, y) = \frac{X}{Y}, \qquad f_y = -\frac{XY'}{Y^2}.$$

L'équation (6) s'écrit

$$2Xp - Y'q = 0 .$$

C'est une équation à variables séparées. La fonction $\mu(x, y)$ est fonction de x et y par l'intermédiaire de la variable u définie par

$$u = \int \frac{dx}{2X} + \int \frac{dy}{Y'} \cdot$$

On a alors

$$\mu_x = \frac{1}{2X}\mu', \qquad \mu_y = \frac{1}{Y'}\mu', \qquad \mu_{yy} = \frac{1}{Y'^2}\mu'' - \frac{Y''}{Y'^2}\mu' .$$

La fonction μ doit satisfaire à l'équation (13), ce qui donne

$$\mu'' + \left(\frac{Y'^2}{2Y} - Y''\right)\mu' = 0 .$$

Pour que cette égalité soit une équation différentielle entre μ et u il faut que le coefficient de μ', qui ne dépend que de y, se réduise à une constante k, puisque u dépend de x

$$2YY'' - Y'^2 + 2kY = 0 . \tag{14}$$

Donc *l'équation* (13) *est réductible à l'équation de la chaleur lorsque* Y *est une fonction de* y *vérifiant l'équation différentielle* (14). *La fonction* X *de* x *pourra être prise arbitrairement.*

Examinons en particulier le cas où k est nul.

Alors (14) devient

$$\frac{Y'}{Y} - \frac{2Y''}{Y'} = 0 ,$$

d'où

$$\log Y - \log Y'^2 = c^{te} = \log \frac{1}{4a^2}, \qquad Y' = 2a\sqrt{Y} .$$

On tire de là:

$$Y = (ay + b)^2 ,$$

a et b désignant des constantes [1]. On retrouve les résultats obtenus dans l'exercice précédent.

Etudions maintenant le cas général où k n'est pas nul dans l'équation (14).

Pour intégrer cette équation nous prendrons Y comme variable et y comme inconnue. Posons $Y' = \frac{dY}{dy} = p$.

Alors $Y'' = \frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dY}$.

L'équation (14) devient

$$2\,Yp\frac{dp}{dY} = p^2 - 2kY .$$

Si on pose provisoirement $p^2 = v$, elle s'écrit

$$v' = \frac{v}{Y} - 2k .$$

On a une équation linéaire pour déterminer v. Son intégrale générale est

$$v = Y(4a^2 - 2k \log Y) .$$

On a ensuite pour déterminer Y l'intégrale

$$y = \int \frac{dY}{\sqrt{Y(4a^2 - 2k \log Y)}} . \tag{15}$$

7. — Troisième application. — *Trouver la forme la plus générale de la fonction* X *de* x *pour que l'équation*

$$t + \frac{X}{x^2 + y^2}p = 0 \tag{16}$$

soit réductible à l'équation de la chaleur par un changement de variables.

[1] On peut aussi intégrer l'équation $Y'^2 - 2YY'' = 0$ en dérivant par rapport à y. On trouve $Y''' = 0$, d'où $Y = \alpha y^2 + \beta y + \gamma$. Mais Y ne doit dépendre que de deux constantes arbitraires. En écrivant que $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ vérifie $Y'^2 - 2YY'' = 0$ on obtient: $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$.

On a ici:

$$f(x\,,\,y) = \frac{X}{x^2 + y^2}\,, \qquad f_y = \frac{-\,2\,Xy}{(x^2 + y^2)^2}\,.$$

L'équation (6) s'écrit:

$$pX - qy = 0\,.$$

On prendra pour $y' = \mu(x, y)$ une fonction de

$$u = \int \frac{dx}{X} + \log y\,.$$

Il faut que la fonction μ soit solution de (16)

$$\mu_x = \frac{1}{X}\mu'\,, \qquad \mu_y = \frac{1}{y}\mu'\,, \qquad \mu_{yy} = \frac{1}{y^2}\mu'' - \frac{1}{y^2}\mu'\,.$$

On doit avoir, par conséquent,

$$\mu'' - \frac{x^2}{x^2 + y^2}\mu' = 0\,,$$

ou

$$\mu'' - \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\mu' = 0\,.$$

Il faut donc que la variable u dont dépend la fonction μ soit fonction de $\frac{y}{x}$. Ainsi

$$\int \frac{dx}{X} + \log y = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

On tire de là, en dérivant successivement par rapport à x et à y:

$$\frac{1}{X} = -\frac{y}{x^2}\varphi'\,, \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{x}\varphi'\,.$$

En divisant ces deux relations membre à membre on est finalement conduit à $X = -\,x$.

Il en résulte que la seule équation de la forme (16) réductible à l'équation de la chaleur est

$$t - \frac{x}{x^2 + y^2}p = 0\,. \tag{17}$$

Effectuons la réduction :

(6) s'écrit maintenant $px + qy = 0$, d'où $y' = \mu(x, y) = \mu\left(\frac{y}{x}\right)$.

Il faut que $\mu'' + \frac{1}{1+u^2}\mu' = 0$, en posant $y = ux$. On prendra donc

$$y' = \mu = \log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = \log\frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

L'équation (17) devient alors:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - x\frac{\partial z}{\partial x} = 0 .$$

On fait ensuite

$$x' = \log x$$

pour obtenir:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} = \frac{\partial z}{\partial x'} .$$

8. — Quatrième application. — *Déterminer la relation qui doit unir les constantes α et β dans l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{\alpha x + \beta y}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

pour qu'on puisse ramener cette équation à celle de la chaleur.

Cette relation est $2\alpha = \beta^2$.

Exemples:

$$t + \frac{2}{x \pm 2y}p = 0 \;; \qquad 2t + \frac{1}{x \pm y}p = 0 .$$

III. — Sur un problème d'asymptotiques.

9. — Lorsqu'on cherche les surfaces dont les lignes asymptotiques de l'un des systèmes se projettent sur le plan des xy suivant les courbes (Γ) d'équation

$$\varphi(x, y) = c^{te}, \tag{19}$$

on est conduit à l'équation

$$X(z) = \varphi_y^2 r - 2\varphi_x\varphi_y s + \varphi_x^2 t = 0 . \tag{20}$$

Les caractéristiques de cette équation du second ordre sont précisément les courbes (Γ).

On peut se demander quelle est la forme la plus générale à adopter pour la fonction $\varphi(x, y)$ pour que l'équation (20) soit réductible à l'équation de la chaleur par un changement de variables.

Effectuons le changement de variables:

$$u = \varphi(x, y), \qquad v = \psi(x, y), \tag{21}$$

ψ désignant pour le moment une fonction quelconque de x et y.

L'équation (20) est remplacée par l'équation

$$(\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + X(\varphi)\frac{\partial z}{\partial u} + X(\psi)\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

X ( ) désignant un symbole opératoire dont le sens est explicité en (20).

En particulier si l'on prend pour ψ une solution de l'équation (20) cette équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + f\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \tag{22}$$

avec:

$$f = \frac{X(\varphi)}{(\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)^2}.$$

Nous exprimerons f en fonction de u et v et nous écrirons que f ne dépend pas de la variable v. Donc

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

Or un calcul facile montre que:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-\varphi_y}{\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x}; \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\varphi_x}{\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x}.$$

La condition précédente s'écrit donc

$$\varphi_y \frac{\partial f}{\partial x} - \varphi_x \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{23}$$

Posons provisoirement

$$\theta(x\,,\,y) = \varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x\,,$$

et dérivons f successivement par rapport à x et à y. On a par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\theta^3}\left[\theta \frac{\partial}{\partial x} X(\varphi) - 2\,\theta_x X(\varphi)\right].$$

L'équation (23) devient donc

$$2\,\varphi_y X(\varphi)\,\theta_x - 2\,\varphi_x X(\varphi)\,\theta_y = \left[\varphi_y \frac{\partial}{\partial x} X(\varphi) - \varphi_x \frac{\partial}{\partial y} X(\varphi)\right]\theta\,. \qquad (23')$$

La fonction θ étant ainsi déterminée par l'équation du premier ordre (23′) on devra ensuite choisir pour ψ une solution commune aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x = \theta(x\,,\,y)\,, \\ &\varphi_y^2 \psi_{xx} - 2\,\varphi_x \varphi_y \psi_{xy} + \varphi_x^2 \psi_{yy} = 0\,. \end{aligned}\right. \qquad (24)$$

10. — *Un cas particulier important sera celui où le coefficient de θ est nul dans le second membre de l'équation* (23′).

$$\varphi_y \frac{\partial}{\partial x} X(\varphi) - \varphi_x \frac{\partial}{\partial y} X(\varphi) = 0\,. \qquad (25)$$

Si l'on observe que

$$\frac{\partial}{\partial x} X(\varphi) = X(\varphi_x) + 2\,\varphi_x Y(\varphi)$$

en posant, pour abréger, $Y(z) = rt - s^2$, on peut écrire (25) sous la forme

$$\varphi_y X(\varphi_x) - \varphi_x X(\varphi_y) = 0\,. \qquad (25')$$

L'équation (25′) *est en particulier satisfaite si φ_x et φ_y sont des solutions de l'équation* (20).

S'il en est ainsi (23′) se réduit à

$$\varphi_y \theta_x - \varphi_x \theta_y = 0\,,$$

θ est fonction de φ, $\theta = - \mathrm{F}(\varphi)$ et le système (24) est maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_y p - \varphi_x q = \mathrm{F}(\varphi) \ , \\ \varphi_y^2 r - 2 \varphi_x \varphi_y s + \varphi_x^2 t = 0 \ . \end{array} \right. \qquad (24')$$

La fonction ψ qui doit vérifier les deux équations (24′) doit aussi vérifier celles qui se déduisent de la première par dérivation successive par rapport à x et y;

$$\varphi_y r - \varphi_x s + \varphi_{xy} p - \varphi_{xx} q = \mathrm{F}' \varphi_x \ ,$$

$$\varphi_y s - \varphi_x t + \varphi_{yy} p - \varphi_{xy} q = \mathrm{F}' \varphi_y \ ,$$

et la suivante qu'on déduit des précédentes par soustraction après les avoir multipliées respectivement par φ_y et φ_x, et, en tenant compte de la seconde équation (24′),

$$(\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy}) p + (\varphi_x \varphi_{xy} - \varphi_y \varphi_{xx}) q = 0 \ . \qquad (26)$$

La première équation (24′) et l'équation (26) nous donnent, pour p et q, les valeurs suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \dfrac{\mathrm{F}(\varphi)}{\mathrm{X}(\varphi)} (\varphi_y \varphi_{xx} - \varphi_x \varphi_{xy}) \ , \\ q = \dfrac{\mathrm{F}(\varphi)}{\mathrm{X}(\varphi)} (\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy}) \ . \end{array} \right. \qquad (27)$$

Finalement ψ pourra être déterminée par l'équation aux différentielles totales:

$$d\psi = \frac{\mathrm{F}(\varphi)}{\mathrm{X}(\varphi)} \left[(\varphi_y \varphi_{xx} - \varphi_x \varphi_{xy}) dx + (\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy}) dy \right] \qquad (28)$$

pourvu que la condition d'intégrabilité soit satisfaite. Or un calcul facile montre qu'il en est effectivement ainsi si l'on prend pour $\mathrm{F}(\varphi)$ une constante (par exemple: 1). On retrouve ainsi l'important théorème suivant dû à M. A. Buhl.

On pourra toujours ramener l'équation (20) *à l'équation de la chaleur par un changement de variables dans le cas où* φ_x *et* φ_y *sont des solutions de cette équation.*

La condition précédente paraît assez restrictive, mais il est aisé de lui donner une plus grande généralité de la façon suivante:

Supposons qu'il existe une fonction $\lambda(x, y)$ telle que

$$\varphi_x = \lambda \mathrm{B} , \qquad \varphi_y = - \lambda \mathrm{A} ,$$

A et B désignant des fonctions de x et y.

Alors l'équation (20) peut être écrite

$$\mathrm{A}^2 r + 2\mathrm{AB} s + \mathrm{B}^2 t = 0 \tag{20'}$$

et il résulte du raisonnement précédent que (20′) est réductible à l'équation de la chaleur.

11. — Le cas où φ_x et φ_y sont solutions de (20) n'est pas le cas le plus général où le coefficient de θ est nul dans l'équation (23′).

Pour cela il suffit que $\mathrm{X}(\varphi)$, considéré comme fonction de x et y, vérifie l'équation

$$\varphi_y \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{X}(\varphi) - \varphi_x \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{X}(\varphi) = 0 \ ;$$

donc $\mathrm{X}(\varphi)$ doit être une fonction de φ.

L'équation (23′) se réduit encore à

$$\varphi_y \theta_x - \varphi_x \theta_y = 0$$

d'où $\theta(x, y) = - \mathrm{F}(\varphi)$. Le calcul se poursuit comme au paragraphe précédent. En posant $\dfrac{\mathrm{F}(\varphi)}{\mathrm{X}(\varphi)} = \mathrm{G}(\varphi)$, on a

$$p = \mathrm{G}(\varphi)(\varphi_y \varphi_{xx} - \varphi_x \varphi_{xy}) , \qquad q = \mathrm{G}(\varphi)(\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy}) .$$

Pour que la détermination de la fonction ψ soit possible, il faudra que la condition d'intégrabilité soit satisfaite, ce qui nous conduit à

$$\frac{d\mathrm{G}}{d\varphi} \varphi_y (\varphi_y \varphi_{xx} - \varphi_x \varphi_{xy}) + \mathrm{G}\left[\mathrm{Y}(\varphi) + \varphi_y \varphi_{xxy} - \varphi_x \varphi_{xyy}\right]$$
$$= \frac{d\mathrm{G}}{d\varphi} \varphi_x (\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy}) + \mathrm{G}\left[- \mathrm{Y}(\varphi) + \varphi_y \varphi_{xxy} - \varphi_x \varphi_{xyy}\right] .$$

ou:

$$\frac{d\mathrm{G}}{d\varphi} \mathrm{X}(\varphi) + 2\mathrm{G}\mathrm{Y}(\varphi) = 0 . \tag{29}$$

Pour que (29) soit une équation différentielle entre G et φ, il faudra donc que $Y(\varphi)$ soit une fonction de φ. En résumé, *on pourra aussi ramener l'équation* (20) *à l'équation de la chaleur si la fonction* φ *vérifie les deux conditions :* $X(\varphi) =$ *fonction de* φ, $Y(\varphi) =$ *fonction de* φ. *Le changement de variables à effectuer sera*

$$u = \varphi(x, y) \quad , \qquad v = \psi(x, y)$$

ψ *étant donnée par l'équation aux différentielles totales*

$$d\psi = G(\varphi)\left[(\varphi_y \varphi_{xx} - \varphi_x \varphi_{xy})\,dx + (\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy})\,dy\right]$$

$G(\varphi)$ *étant une fonction de* φ *vérifiant l'équation différentielle* (29).

Remarque. — Constatons que dans ce cas, comme dans celui du paragraphe précédent la fonction $\psi(x, y)$ qu'il faut adopter est une fonction de $\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$.

En effet la fonction ψ doit vérifier l'équation (26) que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) \cdot p - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) \cdot q = 0 \,. \tag{26'}$$

Ce qui justifie la propriété énoncée.

12. — Le cas où le coefficient de θ est nul dans l'équation (23′) peut être traité de la façon suivante.

L'équation (25), ou l'équation équivalente (25′), est alors vérifiée par la fonction φ, et la fonction ψ doit être une solution commune aux deux équations

$$\varphi_y p - \varphi_x q = F(\varphi) \; ; \tag{24'}$$

$$(\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy}) p + (\varphi_x \varphi_{xy} - \varphi_y \varphi_{xx}) q = 0 \,. \tag{26}$$

On sait que pour que le système de deux équations du premier ordre

$$H(x, y, z, p, q) = 0 \;, \qquad K(x, y, z, p, q) = 0$$

soit compatible il faut que $[H, K] = 0$, ou, si les équations ne contiennent pas z que $(H, K) = 0$, soit identiquement, soit en tenant compte des équations elles-mêmes.

Si l'on applique cette règle au système formé par les deux équations (24') et (26) on est conduit à la condition

$$X(\varphi_y)\,p - X(\varphi_x)\,q = X(\varphi)\,F' \,. \tag{30}$$

1° L'équation (30) sera vérifiée identiquement si les trois conditions suivantes sont satisfaites (théorème de M. Buhl):

$$X(\varphi_y) = 0 \,, \qquad X(\varphi_x) = 0 \,, \qquad F(\varphi) = c^{te} \,.$$

2° L'équation (30) sera une combinaison linéaire de (24') et (26) si

$$\begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_x & F(\varphi) \\ \varphi_y\,\varphi_{xy} - \varphi_x\,\varphi_{yy} & \varphi_y\,\varphi_{xx} - \varphi_x\,\varphi_{xy} & 0 \\ X(\varphi_y) & X(\varphi_x) & F'X(\varphi) \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Si l'on développe le déterminant du premier membre par rapport aux éléments de la troisième colonne, on trouve

$$\left[X(\varphi_x)(\varphi_y\,\varphi_{xy} - \varphi_x\,\varphi_{yy}) - X(\varphi_x)(\varphi_y\,\varphi_{xx} - \varphi_x\,\varphi_{xy})\right] F(\varphi) + X^2(\varphi)\,F'(\varphi) = 0$$

ce que l'on peut écrire

$$\varphi_y\,\varphi_{xy} - \varphi_x\,\varphi_{yy})\frac{\partial X(\varphi)}{\partial x} - (\varphi_y\,\varphi_{xx} - \varphi_x\,\varphi_{xy})\frac{\partial X(\varphi)}{\partial y} + 2\,X(\varphi)\,Y(\varphi)\Big]F + X^2(\varphi)\,F'(\varphi) = 0 \,.$$

Si l'on suppose que $X(\varphi)$ est une fonction de φ: $\Phi(\varphi)$ et si l'on pose $\frac{F(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = G(\varphi)$ la condition précédente devient:

$$\frac{G'}{G} + \frac{2\,Y(\varphi)}{X(\varphi)} = 0 \,.$$

On retrouve le cas du paragraphe (11) où $Y(\varphi)$ et $X(\varphi)$ sont l'un et l'autre des fonctions de φ. L'équation ci-dessus n'est autre que l'équation (29) de (11).

13. — Les considérations précédentes conduisent à un grand nombre d'applications intéressantes. On en trouvera quelques-unes très remarquables dans le mémoire de M. A. Buhl qui contient le théorème cité plus haut (« Sur les surfaces dont un

système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes données, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXXI, 1903. Voir, dans le même volume, d'intéressants rapprochements dus à M. L. LECORNU.). Je ne donnerai ici qu'un seul exemple.

Cherchons comment il faudrait prendre la fonction X de x pour que la détermination des surfaces admettant pour asymptotiques les courbes: $\varphi(x, y) = u = xy + \mathrm{X}$ se ramène à l'intégration de l'équation de la chaleur. On a:

$$\varphi_x = y + \mathrm{X}', \quad \varphi_y = x, \quad \varphi_{xx} = \mathrm{X}'', \quad \varphi_{xy} = 1, \quad \varphi_{yy} = 0$$

$$\mathrm{X}(\varphi) = x^2\mathrm{X}'' - 2x(y + \mathrm{X}') = x^2\mathrm{X}'' - 2x\mathrm{X}' - 2xy, \qquad \mathrm{Y}(\varphi) = 1 .$$

Nous serons donc dans le cas du paragraphe (11) si $\mathrm{X}(\varphi)$ est fonction de φ, ce qui ne peut avoir lieu que si $\mathrm{X}(\varphi) = -2\varphi$. Il faudra alors que

$$x^2\mathrm{X}'' - 2x\mathrm{X}' - 2\mathrm{X} = 0 ,$$

équation d'Euler dont l'intégrale générale est

$$\mathrm{X} = \mathrm{C}_1 x + \mathrm{C}_2 x^2 .$$

En définitive les courbes considérées sont les hyperboles:

$$\mathrm{C}_2 x^2 + \mathrm{C}_1 x + xy = u .$$

La fonction $\mathrm{G}(\varphi)$ est alors donnée par l'équation

$$\frac{d\mathrm{G}}{\mathrm{G}} + \frac{d\varphi}{\varphi} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{G} = \frac{1}{\varphi} .$$

On a ensuite

$$d\psi = \frac{-(y + \mathrm{C}_1)\,dx + x\,dy}{\mathrm{C}_2 x^2 + \mathrm{C}_1 x + xy} .$$

Le changement de variables à effectuer ici est donc

$$u = \mathrm{C}_2 x^2 + \mathrm{C}_1 x + xy , \qquad v = \log \frac{\mathrm{C}_2 x + \mathrm{C}_1 + y}{x} .$$

On peut constater que la remarque du paragraphe (11) s'applique.

14. — Envisageons maintenant le cas général où dans (23′) le coefficient de θ n'est pas nul. Nous devons pouvoir déterminer une fonction $\psi(x, y)$ qui soit une solution commune de (23′) et de l'équation $X(\psi) = 0$, θ désignant dans (23′) $\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x$. Si l'on remplace θ par cette valeur, cette équation devient

$$\left[2\,X(\varphi)\,(\varphi_x \varphi_{yy} - \varphi_y \varphi_{xy}) + \varphi_y\left[\varphi_y \frac{\partial}{\partial x} X(\varphi) - \varphi_x \frac{\partial}{\partial y} X(\varphi)\right]\right]\psi_x$$
$$+ \left[2\,X(\varphi)\,(\varphi_y \varphi_{xx} - \varphi_x \varphi_{xy}) - \varphi_x\left[\varphi_y \frac{\partial}{\partial x} X(\varphi) - \varphi_x \frac{\partial}{\partial y} X(\varphi)\right]\right]\psi_y = 0 \,. \tag{31}$$

Nous écrirons cette équation

$$\alpha \psi_x + \beta \psi_y = 0 \,,$$

α et β désignant les coefficients de ψ_x et ψ_y dans (31). Donc ψ est une solution commune des deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha \psi_x + \beta \psi_y = 0 \,, \\ &\varphi_y^2 \psi_{xx} - 2\,\varphi_x \varphi_y \psi_{xy} + \varphi_x^2 \psi_{yy} = 0 \,. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Dérivons successivement la première équation (32) par rapport à x et à y. On a

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha \psi_{xx} + \beta \psi_{xy} = -\,\alpha_x \varphi_x - \beta_x \psi_y \,, \\ &\alpha \psi_{xy} + \beta \psi_{yy} = -\,\alpha_y \psi_x - \beta_y \psi_y \,. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Si l'on tire ψ_{xx} et ψ_{yy} de ces deux équations et si on les remplace par ces valeurs dans la seconde équation (32) on obtient, après quelques calculs, une nouvelle équation que doit vérifier ψ, soit

$$(\alpha \varphi_x + \beta \varphi_y)^2 \psi_{xy} + (\beta \alpha_x \varphi_y^2 + \alpha \alpha_y \varphi_x^2)\,\psi_x + (\beta \beta_x \varphi_y^2 + \alpha \beta_y \varphi_x^2)\,\psi_y = 0 \,. \tag{34}$$

On constatera facilement que

$$\alpha \varphi_x + \beta \varphi_y = 2\,X^2(\varphi) \,.$$

Le coefficient de ψ_{xy} dans (34) n'est donc pas nul en général et cette relation ne peut être identiquement satisfaite. L'ensemble des équations (33) et (34) permet d'exprimer ψ_{xx}, ψ_{xy}, ψ_{yy} en fonction linéaire de x, y, ψ_x, ψ_y et comme la première relation (32) permet d'exprimer ψ_y en fonction de ψ_x toutes les dérivées d'ordre égal ou supérieur au second de la fonction ψ s'expriment au moyen de x, y, ψ_x. La solution la plus générale du système (32) dépend donc au plus de deux constantes arbitraires *si toutes les conditions d'intégrabilité sont vérifiées.* Le calcul des deux conditions d'intégrabilité (que l'on obtiendra en calculant ψ_{xxy} et ψ_{xyy} de deux façons différentes) paraît malaisé étant donnée la complication des fonctions α, β. Nous sommes donc dans l'impossibilité de donner les conditions les plus générales que doit remplir la fonction $\varphi(x, y)$ pour que l'équation (20) puisse être ramenée à l'équation de la chaleur.

15. — Dans bien des cas l'application des résultats des paragraphes (10) et (11) nous permettra de nous prononcer sur la possibilité du problème et d'effectuer la réduction. Sinon il nous paraît commode de procéder de la façon suivante.

On ramènera d'abord l'équation (20) à la forme (22) par le changement de variables (21) où ψ n'est assujettie qu'à la seule condition d'être solution de (20). Or ceci est toujours possible car x et y sont des solutions de cette équation et il suffit de conserver pour ψ l'une de ces variables, par exemple x.

Dans ces conditions la valeur de f donnée par la formule

$$f = \frac{X(\varphi)}{(\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)^2}$$

s'écrit

$$f = \frac{X(\varphi)}{\varphi_y^2},$$

de telle sorte que l'équation (22) aura la forme:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + f(x, u)\frac{\partial z}{\partial u} = 0 . \tag{22'}$$

Il est intéressant de constater que la fonction y définie implicitement en fonction de x et de u par la relation $\varphi(x, y) = u$ est une solution de (22'). On peut le vérifier directement, mais il est plus simple de constater que y est solution de (20).

Nous avons vu au paragraphe (4) la condition que doit vérifier la fonction $f(x, u)$ pour que l'équation (22′) puisse être ramenée à celle de la chaleur.

(On se rendra un compte exact de la difficulté du problème en se plaçant dans le cas le plus simple, celui où la fonction $f(x, u)$ se réduirait à une constante a. Il faudrait alors que la fonction $\varphi(x, y)$ vérifie l'équation

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t - aq^2 = 0$$

qui n'est pas intégrable par la méthode de Monge-Ampère.)

Ayant exprimé f en fonction de x et u nous calculerons l'expression

$$\frac{2f \cdot f_{xx} + 2f^2 f_u - 3f_x^2}{f^3}.$$

Selon qu'elle dépendra de u seul, ou bien à la fois de x et de u la réduction à l'équation de la chaleur sera possible ou impossible.

Signalons en particulier les cas suivants où la réduction est possible. La fonction $f(x, u)$ est: 1° une constante, ou 2° une fonction U de u seul, ou encore 3° de la forme $\frac{\mathrm{U}}{x^2}$.

16. — *Application.* — Considérons la famille de courbes (Γ) d'équation

$$y = u\mathrm{F}(x)$$

où u désigne un paramètre variable. Posons

$$u = \frac{y}{\mathrm{F}(x)} = \varphi(x, y)$$

et cherchons ce que devient la fonction $f(x, u) = \frac{\mathrm{X}(\varphi)}{\varphi_y^2}$ du paragraphe précédent. On peut écrire

$$\varphi_x = -y\frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}^2}, \qquad \varphi_y = \frac{1}{\mathrm{F}}, \qquad \varphi_{yy} = 0, \qquad \varphi_{xy} = -\frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}^2},$$

$$\varphi_{xx} = y\frac{2\mathrm{F}'^2 - \mathrm{FF}''}{\mathrm{F}^3}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{X}(\varphi)}{\varphi_y^2} = \mathrm{F}^2\left[\frac{1}{\mathrm{F}^2}\cdot\frac{y(2\mathrm{F}'^2 - \mathrm{FF}'')}{\mathrm{F}^3} - 2y\frac{\mathrm{F}'^2}{\mathrm{F}^5}\right] = -\frac{y}{\mathrm{F}}\cdot\frac{\mathrm{F}''}{\mathrm{F}}.$$

D'où

$$f(x\,,\,u) = -u\frac{F''}{F}\,. \tag{35}$$

Il résulte de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes $u =$ cte soient des asymptotiques de la surface

$$x = v\,,\qquad y = u\mathrm{F}(v)\,,\qquad z = z(u\,,\,v)$$

est que z soit une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - u\frac{F''}{F}\frac{\partial z}{\partial u} = 0\,.$$

Il est intéressant de constater que x et y sont aussi des solutions de cette équation.

On montrera aisément que le second système d'asymptotiques est donné par l'équation

$$\mathrm{F}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du = 2\left(\mathrm{F}'\frac{\partial z}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)dv\,.$$

Revenons à (35) et posons

$$-\frac{F''}{F} = \frac{1}{\varpi(x)}\,,$$

de telle sorte que

$$f(x\,,\,u) = \frac{u}{\varpi(x)}\,.$$

Pour que l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{u}{\varpi(x)}\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \tag{36}$$

puisse être ramenée à celle de la chaleur il faut, d'après (6), que:

$$2\varpi\varpi'' - \varpi'^2 + 2k\varpi = 0\,.$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle est donnée par la quadrature.

$$x = \int \frac{d\varpi}{\sqrt{\varpi(4a^2 - 2k\log\varpi)}}\,.$$

En particulier si k est nul on trouve

$$\varpi(x) = (ax + b)^2 .$$

On peut donc adopter pour $\frac{F''}{F}$ l'une des deux formes simples

$$\frac{F''}{F} = c^{te} , \quad \frac{F''}{F} = \frac{c^{te}}{x^2} .$$

Premier cas. — $\frac{F''}{F}$ se réduit à une constante et alors $f(x, u)$ est une fonction de u seul. On peut sans diminuer la généralié du problème supposer cette constante égale à $\pm$ 1. Donc

$$F'' \pm F = 0 ;$$

F a l'une des deux formes suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} F &= \alpha \sin x + \beta \cos x \\ F &= \alpha e^x + \beta e^{-x} . \end{aligned} \right. \qquad (37)$$

Deuxième cas. — $\frac{F''}{F} = \frac{h}{x^2}$. Alors: $f(x, u) = -\frac{uh}{x^2}$. Il est commode d'écrire la constante h sous la forme $\alpha(\alpha + 1)$.

F est ainsi une solution de l'équation linéaire d'Euler

$$x^2 F'' - \alpha(\alpha + 1) F = 0 .$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$F(x) = A x^{\alpha+1} + B x^{-\alpha} . \qquad (38)$$

Donc si l'on cherche les surfaces admettant pour l'un de leurs systèmes d'asymptotiques la famille de courbes:

$$y = u(A x^{\alpha+1} + B x^{-\alpha}) ,$$

où u désigne un paramètre variable et A, B, α des constantes, on est conduit à intégrer l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha(\alpha + 1) \frac{u}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \qquad (39)$$

que l'on sait ramener à l'équation de la chaleur. On pourra prendre pour équations paramétriques de l'une de ces surfaces:

$$x = v\ ,\qquad y = u(\mathrm{A}v^{\alpha+1} + \mathrm{B}v^{-\alpha})\ ,\qquad z = z(u\ ,\ v)\ ,$$

z désignant une intégrale quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \alpha(\alpha+1)\frac{u}{v^2}\frac{\partial z}{\partial u} = 0\ . \tag{39'}$$

On sait que toute solution de l'équation de la chaleur est remplacée par une autre par les opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$. Partant de là on pourra établir que toute solution de l'équation (39′) est changée en une autre par les opérateurs $u\frac{\partial}{\partial u}$, $v\frac{\partial}{\partial v}$.

Il importe de noter cependant que ce procédé ne fournit pas nécessairement des solutions nouvelles. C'est ce qui arrive quand on l'applique aux solutions particulières

$$z = uv^{-\alpha}\ ,\qquad z = uv^{\alpha+1}\ .$$

Il serait possible de développer de nombreux exemples: Signalons seulement les deux suivants

1° La surface $x = v$, $y = uv^{\alpha+1}$, $z = uv^{-\alpha}$ admet pour asymptotiques les courbes $u =$ cte. Cette surface est une surface réglée à plan directeur zoy et à directrice rectiligne. Le second système d'asymptotiques est donc constitué par les génératrices rectilignes.

En éliminant v entre les trois équations de la surface on montrera que les asymptotiques autres que les génératrices rectilignes sont les intersections de cette surface par les paraboloïdes équilatères

$$zy = u^2 x\ .$$

2° La surface

$$x = v\ ,\qquad y = uv^{\alpha+1}\ ,\qquad z = \log\frac{u}{v^{\alpha(\alpha+1)}}$$

admet pour asymptotiques les courbes

$$u = \mathrm{c^{te}}\ ,\qquad uv^{2(\alpha+1)} = \mathrm{c^{te}}\ .$$

17. — Le problème qui consiste à déterminer les surfaces admettant pour l'un de leurs systèmes d'asymptotiques une famille de courbes données (par exemple par leurs projections sur le plan xoy) se révèle comme incontestablement difficile puisqu'il conduit à intégrer des équations du second ordre du type parabolique en général peu accessibles aux méthodes classiques d'intégration.

D'abord envisagé par Bianchi dans un cas particulier (celui où les courbes se projettent suivant des cercles concentriques) ce problème a été surtout approfondi par M. A. Buhl dans le mémoire déjà cité et dans les travaux suivants:

a) « Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus » (*Journal de Math.*, 5me série, t. 10, 1904, p. 85);

b) « Lignes asymptotiques et lignes de courbure » (*Journal de Math.*, 1929, p. 45);

c) « Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures » (*Nouvelles Annales de Math.*, 4me série, t. VIII, 1908; t. IX, 1909; t. X, 1910).

M. A. Buhl a étudié la question en se plaçant en général au point de vue de la Théorie des Groupes. Mais il m'a semblé qu'en s'en tenant à des méthodes plus élémentaires on pouvait déjà obtenir des résultats indéniablement intéressants *chaque fois que l'on saurait ramener l'équation du problème à celle de la chaleur.*

En effet, si l'on tient compte de la remarquable transformation due à P. Appell[1] qui change l'équation de la chaleur en elle-même et qui par conséquent remplace une solution de cette équation par une autre solution de forme parfois très différente, si l'on se rappelle aussi que d'une intégrale de cette équation dépendant de paramètres variables on peut en déduire de nouvelles par des dérivations ou par des quadratures par rapport à ces paramètres, on verra qu'en ce qui concerne notre problème d'asymptotiques il est permis d'envisager un nombre très étendu de transformations susceptibles de remplacer une surface

[1] P. Appell, Sur l'équation $r = q$ et la théorie de la chaleur (*Journal de Mathématiques*, 4me série, t. 8, 1892, p. 187).

admettant une famille d'asymptotiques dont on connaît les projections orthogonales sur un plan donné et par suite situées sur certains cylindres droits donnés, par d'autres surfaces admettant elles aussi une famille d'asymptotiques situées sur les mêmes cylindres.

Mais pour cela il faut pouvoir donner une réponse aux deux questions essentielles qui suivent:

1° Dans quels cas peut-on ramener une équation parabolique à celle de la chaleur par un changement de variables, et

2° Quel est, dans chaque cas, le changement de variables convenable ? C'est ce que je me suis efforcé de faire ici.

Signalons encore qu'au point de vue de la formation de solutions particulières de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

il peut être commode d'utiliser les développements en série suivants, qui sont des solutions de cette équation:

$$F(x) + \frac{y^2}{2!}F'(x) + \frac{y^4}{4!}F''(x) + \dots,$$

$$\frac{y}{1!}\Phi(x) + \frac{y^3}{3!}\Phi'(x) + \frac{y^5}{5!}\Phi''(x) + \dots,$$

$$\psi(y) + \frac{x}{1!}\psi''(y) + \frac{x^2}{2!}\psi^{\mathrm{IV}}(y) + \dots,$$

où F, Φ, ψ sont des fonctions arbitraires.

Les séries ci-dessus peuvent ne pas être convergentes, mais si l'on prend pour les fonctions arbitraires des polynômes, ces séries se réduisent elles-mêmes à des polynômes. D'où résulte la possibilité d'obtenir une infinité de surfaces possédant un système d'asymptotiques connu (voir le mémoire de M. A. Buhl cité en *a*) au paragraphe 17).